

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE CARTIER

Géométrie et analyse sur les arbres

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 407, p. 123-140

http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__123_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE ET ANALYSE SUR LES ARBRES

par Pierre CARTIER

Bruhat et Tits [1] ont montré récemment comment associer des objets combinatoires ("immeubles") aux groupes algébriques semisimples sur un corps local K . L'immeuble associé à un groupe p -adique joue le même rôle que l'espace riemannien symétrique associé à un groupe réel. Il est donc naturel de chercher à étendre aux immeubles les méthodes qui ont fait leur preuve pour les espaces riemanniens symétriques : horocycles, compactification, fonctions harmoniques, fonctions sphériques, etc... Ce programme n'a reçu un commencement de réalisation que dans le cas de rang 1, où les immeubles sont des arbres homogènes. Serre [6] a pu ainsi unifier et généraliser des résultats de Nagao, Ihara, etc... sur les sous-groupes de $SL_2(K)$; Tits [8] a étudié les groupes d'automorphismes des arbres, et nous avons nous-même fait la théorie des fonctions harmoniques et des fonctions sphériques [2,3]. Nous nous proposons d'esquisser ici ces développements.

1. Compactification d'un arbre (Serre [6], Cartier [2]).

Soit X un arbre, d'ensemble de sommets S et d'ensemble d'arêtes A ; on suppose que X est infini (l'ensemble S est infini) et localement fini (un sommet n'appartient qu'à un nombre fini d'arêtes). On dit que deux sommets s et t sont liés s'il existe une arête joignant s à t (c'est-à-dire si $\{s,t\}$ appartient à A).

L'espace riemannien associé à $SL_2(\mathbb{R})$ peut se réaliser comme le disque-unité ouvert dans \mathbb{R}^2 , défini par l'inégalité $x^2 + y^2 < 1$, avec la métrique riemannienne $\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$. La compactification naturelle est le disque-unité fermé, défini par

l'inégalité $x^2 + y^2 \leq 1$, et la frontière est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Or les points de ce cercle sont en correspondance bijective avec les rayons, qui ne sont autres que les demi-géodésiques issues du centre.

Pour définir la compactification de X , choisissons donc un sommet o ; l'analogie des géodésiques est constitué par les chaînes infinies d'origine o : suites infinies $[s_0, s_1, \dots, s_n, \dots]$ de sommets deux à deux distincts, telles que $s_0 = o$ et que s_n soit lié à s_{n+1} pour tout $n \geq 0$. Comme il est d'usage, la distance $d(s, t)$ du sommet s au sommet t est la borne inférieure des longueurs des chemins joignant s à t . Pour tout $n \geq 0$, notons alors S_n l'ensemble des sommets s tels que $d(o, s) = n$; pour $n \geq 1$ et $s \in S_n$, il existe un unique sommet $\pi_n(s)$ dans S_{n-1} qui soit lié à s . Les chaînes infinies d'origine o sont alors les éléments de la limite projective du système

$$S_0 \xleftarrow{\pi_1} S_1 \xleftarrow{\pi_2} S_2 \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} S_n \xleftarrow{\pi_{n+1}} S_{n+1} \xleftarrow{\quad} \dots$$

Cette limite projective est un espace compact Σ_o qui se prête parfaitement au rôle de frontière de l'arbre. Cependant, pour les applications éventuelles à la théorie des groupes p -adiques, il est maladroit de fixer un sommet de référence o . Pour éliminer o , on introduit une relation d'équivalence entre chaînes infinies d'origine variable: deux telles chaînes définissent le même bout si et seulement si elles ne diffèrent que par un nombre fini de sommets. Si s est un sommet et b un bout, il existe une unique chaîne infinie d'origine s dans la classe d'équivalence définissant le bout b ; on l'appelle la chaîne joignant s à b . On note B l'ensemble des bouts et \hat{S} l'ensemble somme de S et B . On peut alors munir \hat{S} d'une topologie d'espace compact avec les propriétés suivantes:

a) Muni de la topologie discrète, S est un sous-espace ouvert dense de \hat{S} .
 b) Le sous-espace B de \hat{S} est compact, et l'application qui associe à tout $\left. \begin{array}{l} \text{bout} \\ b \end{array} \right\}$ la chaîne joignant o à b est un homéomorphisme de B sur Σ_o .

c) Soit b un bout; pour tout entier $n \geq 0$, soit V_n l'ensemble des sommets s tels que

la chaîne joignant s à b ait ses sommets à la distance $\geq n$ de o , et des bouts b' tels que les chaînes joignant respectivement o à b et à b' aient au moins n sommets en commun; alors $(V_n)_{n \geq 0}$ est une base de voisinages ouverts de b dans \hat{S} .

Classiquement, les horocycles associés à un point b du cercle-unité sont les courbes orthogonales du réseau des géodésiques d'extrémité b ; ces horocycles jouent le rôle de cercles de centre b et de rayon infini. Dans le cas d'un arbre, on montre ceci: si s et s' sont deux sommets et si le sommet t s'éloigne indéfiniment sur une chaîne infinie de bout b , la différence $d(s,t) - d(s',t)$ finit par garder une valeur constante $\delta_b(s,s')$. Si s, s' et s'' sont des sommets, on a évidemment $\delta_b(s,s'') = \delta_b(s,s') + \delta_b(s',s'')$; il existe alors une partition de S en ensembles H_n tels que l'on ait $\delta_b(s,s') = m - n$ pour s dans H_m et s' dans H_n . A une translation près sur l'indice n , cette partition est unique; ses éléments sont les horocycles associés à b .

2. Structure du groupe des automorphismes d'un arbre (Tits [8]).

Soit g un automorphisme d'un arbre X . On démontre élémentairement que l'on a les trois possibilités exclusives suivantes:

a) il existe un sommet s tel que $g(s) = s$;

b) il existe deux sommets liés s et t tels que $g(s) = t$ et $g(t) = s$;

c) il existe une suite $(s_n)_{-\infty < n < +\infty}$ de sommets distincts telle que s_n soit lié à s_{n+1} pour tout n , et un entier i tel que $g(s_n) = s_{n+i}$ pour tout n .

Dans les cas a) et b), toutes les orbites de g sont finies; elles sont toutes infinies dans le cas c).

Soit G un groupe d'automorphismes de X ; on suppose qu'il n'existe dans G aucun élément du type c). Alors G laisse invariant un sommet, ou une arête, ou bien il existe un bout b tel que tout horocycle associé à b soit invariant par G .

Soit $\text{Aut}(X)$ le groupe de tous les automorphismes de X . Pour toute partie F de S ,

notons $\text{Aut}_{\mathbb{F}}(X)$ le groupe des automorphismes g de X tels que $g(s) = s$ pour tout s dans F . On peut alors munir $\text{Aut}(X)$ d'une topologie de groupe localement compact totalement discontinu dans laquelle les sous-groupes $\text{Aut}_{\mathbb{F}}(X)$ pour F fini forment une base de voisinages de l'unité. Soit G un sous-groupe de $\text{Aut}(X)$; pour que G soit relativement compact, il faut et il suffit que toutes ses orbites dans S soient finies; s'il en est ainsi, G laisse invariant un sommet ou une arête d'après le résultat mentionné plus haut. En particulier, pour que G soit un sous-groupe compact maximal de $\text{Aut}(X)$, il faut et il suffit qu'il soit égal au stabilisateur d'un sommet ou d'une arête ⁽¹⁾.

Le théorème de simplicité suivant est dû à Tits [8]; la démonstration se fait par des raisonnements géométriques élémentaires.

THÉOREME 1.- Soient X un arbre et G un groupe d'automorphismes de X . On fait les hypothèses suivantes :

(i) Soit $(s_n)_{a < n < b}$ une chaîne ⁽²⁾ dans X ; pour tout entier n dans l'intervalle $]a, b[$, soit F_n l'ensemble des sommets s tels que $d(s, s_n) < d(s, s_m)$ pour tout $m \neq n$ dans $]a, b[$. Soit g une permutation de S ; on suppose que pour tout n dans $]a, b[$ on a $g(s_n) = s_n$ et qu'il existe un élément g_n de G dont l'action sur F_n coïncide avec celle de g . Alors on a $g \in G$.

(ii) Il n'existe aucun sous-arbre de X , distinct de \emptyset et X , invariant par G .

(iii) Il n'existe pas de bout b tel que tout horocycle associé à b soit invariant par G .

Soit G^+ le sous-groupe de G engendré par les éléments g de G pour lesquels il existe deux sommets liés s et t avec $g(s) = s$ et $g(t) = t$.

Alors, tout sous-groupe de G normalisé par G^+ et non réduit à l'élément neutre contient G^+ . En particulier, G^+ est réduit à l'élément neutre ou c'est un groupe simple.

⁽¹⁾ Les propriétés de cet alinéa supposent X infini et localement fini.

⁽²⁾ Autrement dit, s_n est lié à s_{n+1} lorsque n et $n+1$ appartiennent à $]a, b[$.

Le théorème 1 prend toute sa valeur pour un arbre homogène (le nombre d'arêtes contenant un sommet est indépendant du sommet) . Il existe une partition $S = S' \cup S''$ telle que la distance de deux sommets appartenant tous deux à S' ou tous deux à S'' soit paire , et que soit impaire la distance d'un sommet de S' à un sommet de S'' . Le groupe $\text{Aut}(X)^+$ se compose des automorphismes de X conservant S' et S'' ; il est d'indice 2 dans $\text{Aut}(X)$. Les conditions (i) , (ii) et (iii) sont satisfaites lorsque $G = \text{Aut}(X)$, et le théorème 1 prouve donc que $\text{Aut}(X)^+$ est un groupe simple .

3. Groupes libres et produits amalgamés (Serre [6]) .

Soient G un groupe et P une partie de G ; le graphe $\Gamma(G,P)$ a G pour ensemble de sommets et les ensembles $\{g, gp\}$ (pour $g \in G$ et $p \in P$) pour arêtes . Le groupe G agit sur le graphe $\Gamma(G,P)$ par les translations à gauche .

THÉORÈME 2.- a) Supposons que le groupe G soit libre et que P soit une famille basique de G ; alors le graphe $\Gamma(G,P)$ est un arbre .

b) Réciproquement , si l'on a $P \cap P^{-1} = \emptyset$ et si le graphe $\Gamma(G,P)$ est un arbre , alors le groupe G est libre , de famille basique P .

La démonstration se fait immédiatement en mettant en relation les décompositions réduites d'un élément de G comme produit d'éléments de $P \cup P^{-1}$ avec les chemins sans aller-retour dans le graphe $\Gamma(G,P)$.

THÉORÈME 3.- Soient X un arbre et G un groupe d'automorphismes de X . On suppose que G opère librement sur l'ensemble S des sommets de X et sur l'ensemble A des arêtes de X . Alors le groupe G est libre .

On choisit d'abord une partie connexe T de S rencontrant chaque orbite de G en au plus un point et maximale pour ces propriétés ; il est immédiat que tout sommet est de la forme gt avec $g \in G$ et $t \in T$. Comme G opère librement sur A , il existe une orientation de X invariante par G . Soit P l'ensemble des $g \in G$ pour lesquels il existe une arête positivement orientée joignant un sommet de T à un sommet de gT ; on a

$P \cap P^{-1} = \emptyset$. De plus, la famille $(gT)_{g \in G}$ est une partition de S en ensembles connexes ; deux éléments g et g' de G sont liés dans $\Gamma(G,P)$ si et seulement s'il existe dans X une arête joignant un sommet de gT à un sommet de $g'T$. Il en résulte immédiatement que $\Gamma(G,P)$ est un arbre, et le théorème 2 montre que G est libre, de famille basique P .

C.Q.F.D.

Les théorèmes 2 et 3 entraînent le théorème classique de Schreier selon lequel tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

Soient toujours X un arbre et G un groupe d'automorphismes de X . Un domaine fondamental de X mod G est un ensemble T de sommets avec les deux propriétés suivantes :

- a) Toute orbite de G dans l'ensemble des sommets rencontre T en un point et un seul.
- b) Soient $t \in T$ et G_t le stabilisateur de t dans G ; toute orbite de G_t dans l'ensemble des sommets liés à t rencontre T en un point et un seul.

Serre a démontré dans [6] le théorème de structure suivant.

THÉORÈME 4.- a) Le groupe G est engendré par $\bigcup_{t \in T} G_t$.

b) Soient H un groupe, et pour tout $t \in T$ un homomorphisme u_t de G_t dans H . On suppose que, lorsque t et t' sont liés, les homomorphismes u_t et $u_{t'}$ coïncident sur $G_t \cap G_{t'}$. Il existe alors un homomorphisme u de G dans H induisant u_t sur G_t pour tout $t \in T$.

Le cas le plus intéressant est celui où T a deux éléments t et t' , nécessairement liés. Alors G est le produit amalgamé de G_t et $G_{t'}$, par rapport à leur intersection.

4. L'arbre associé à SL_2 (Serre [6]).

Soient K un corps local, \mathcal{O} l'anneau de ses entiers, \mathfrak{p} l'idéal maximal de \mathcal{O} et $v : K^X \rightarrow \mathbb{Z}$ la valuation normalisée de K . On note V l'espace vectoriel K^2 sur le corps K . Un réseau dans V est un sous- \mathcal{O} -module de V qui est libre de rang 2, donc engendre V sur K ; on dit que deux réseaux M et M' sont équivalents s'il existe λ dans K^\times tel que $M' = \lambda M$.

On définit alors un arbre X dont les sommets sont les classes d'équivalence de réseaux ; deux sommets s et s' sont liés si et seulement si l'on peut trouver des représentants M pour s et M' pour s' tels que M' soit un sous-module maximal de M . Le groupe $SL_2(K)$ agit de manière naturelle sur l'arbre X ; le noyau de cette action est le sous-groupe $\{1, -1\}$ de $SL_2(K)$, et l'image de $SL_2(K)$ dans $Aut(X)$ est contenue dans $Aut(X)^+$.

Soit q le nombre d'éléments du corps résiduel $k = \mathbb{O}/\mathbb{P}$; l'arbre X est homogène de degré $q+1$, c'est-à-dire que tout sommet appartient à $q+1$ arêtes. En particulier, X est infini et localement fini. On peut identifier les bouts aux droites de l'espace vectoriel V de manière à avoir la propriété suivante : soient s un sommet, b un bout, M un réseau représentant s et D la droite associée à b ; pour tout entier $n \geq 0$, soit s_n la classe du réseau $\mathbb{P}^n M + (D \wedge M)$; alors $[s_0, s_1, \dots, s_n, \dots]$ est la chaîne infinie joignant s à b . L'interprétation des horocycles est laissée au lecteur.

Par ce qui précède, les sous-groupes de Borel de $SL_2(K)$ sont les stabilisateurs des bouts de l'arbre X . Les sous-groupes compacts maximaux de $SL_2(K)$ (rappelons que le corps K est localement compact) sont les stabilisateurs des sommets de X ; il y a deux orbites de $SL_2(K)$ dans l'ensemble des sommets de X , d'où deux classes de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux de $SL_2(K)$. De manière plus précise, soient s la classe du réseau $\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}$ et s' la classe du réseau $\mathbb{O} \oplus \mathbb{P}$; le stabilisateur de s est le groupe $SL_2(\mathbb{O})$ des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$ et a, b, c, d dans \mathbb{O} ; le stabilisateur de s' se compose des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$, a, d dans \mathbb{O} , c dans \mathbb{P} et b dans \mathbb{P}^{-1} , c'est-à-dire le groupe $gSL_2(\mathbb{O})g^{-1}$ avec $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$ et π dans $\mathbb{O} - \mathbb{P}$.

Par application des théorèmes 3 et 4, on obtient les résultats suivants de Ihara :

a) Soit G un sous-groupe de $SL_2(K)$ n'ayant pas de sous-groupe relativement compact non trivial ; alors G est un groupe libre.

b) Le groupe $SL_2(K)$ est produit amalgamé des sous-groupes $SL_2(\mathbb{O})$ et $gSL_2(\mathbb{O})g^{-1}$ suivant

leur intersection (composée des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$, a, b, d dans $\underline{0}$ et c dans \underline{p}).

5. Applications à la géométrie algébrique (Serre [6] et [7]).

Soit k un corps fini et soit C une courbe projective connexe et lisse définie sur k . Soient F le corps des fonctions rationnelles sur C (définies sur k) et soit P un point de C rationnel sur k . On note A l'anneau des fonctions rationnelles sur C n'ayant de pôle qu'en P , et v la valuation normalisée de F associée à P . On prend pour K le complété du corps F pour la valuation v . Alors le sous-groupe $\Gamma = SL_2(A)$ de $SL_2(K)$ est discret et agit proprement sur l'arbre X associé à $SL_2(K)$.

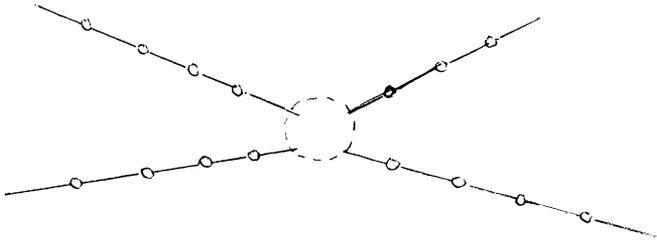
Soit L_P le fibré vectoriel de rang 1 sur C associé au diviseur P ; pour tout entier n , on note L_{nP} la puissance tensorielle n -ième de L_P . On peut alors identifier X/Γ à l'ensemble des classes de fibrés vectoriels E de rang 2 sur C tels que $\wedge^2 E$ soit isomorphe à L_{nP} pour n convenable; les fibrés E et E' sont équivalents s'il existe un entier n tel que E' soit isomorphe à $L_{nP} \otimes E$. La correspondance s'explique comme suit: soient s un sommet de X , M un réseau représentant s ; soit \underline{F} le sous-faisceau du faisceau constant $F \oplus F$ sur C , dont la fibre est $M \cap (F \oplus F)$ en P et $\underline{0}_P \oplus \underline{0}_P$, en tout point P' distinct de P (on note $\underline{0}_{P'}$, l'anneau local de C en P'). Comme le faisceau \underline{F} est localement libre de rang 2, il lui correspond un fibré vectoriel E de rang 2 sur C . Si s est un sommet de X , le stabilisateur de s dans Γ s'identifie au groupe des automorphismes d'un fibré vectoriel E de rang 2 associé à s .

Les constructions précédentes sont particulièrement simples lorsque C est la droite projective P_k^1 et P le point à l'infini. On sait par Grothendieck que tout fibré vectoriel de rang 2 sur C est isomorphe à $L_{mP} \oplus L_{nP}$ pour des entiers m et n convenables. On en déduit facilement que le graphe quotient X/Γ est une chaîne infinie



Les théorèmes de structure du n° 3 montrent alors que le groupe $SL_2(k[T])$ est produit amalgamé de $SL_2(k)$ et du groupe de Borel $B(k[T])$ selon leur intersection $B(k)$ ⁽¹⁾.

Revenons au cas général. On peut montrer que le groupe Γ a un nombre fini d'orbites dans l'espace des bouts de l'arbre X , en correspondance naturelle avec les classes d'idéaux de l'anneau de Dedekind A . Le graphe quotient X/Γ est alors réunion d'un sous-graphe fini et d'un nombre fini de chaînes infinies, correspondant aux classes d'idéaux de A . Serre a déduit de là dans [7] la structure du groupe Γ rendu abélien et il a appliqué ces résultats à l'étude des sous-groupes de congruence de $\Gamma^* = SL_2(A)$.



6. Théorie du potentiel sur un arbre (Cartier [2], Kemeny-Snell-Knapp [5]).

Soit X un arbre, d'ensemble de sommets S (le contenu de ce numéro est valable pour un graphe orienté quelconque). On suppose associé à tout chemin c de longueur finie dans X un nombre $p(c) > 0$ de sorte que l'on ait $p(cc') = p(c)p(c')$ lorsque le chemin composé cc' est défini. On suppose aussi que, pour deux sommets quelconques s et t , la somme $G(s,t)$ des nombres $p(c)$ pour tous les chemins c joignant s à t est finie. On dit que la fonction G sur $S \times S$ est le noyau de Green.

Soit h une fonction sur S ; on définit la fonction Ph sur S par $Ph(s) = \sum p(\vec{st})h(t)$ avec une sommation sur tous les sommets t liés à s (on note \vec{st} l'arête $\{s,t\}$ orientée de s vers t); on pose aussi $\Delta h = Ph - h$. L'opérateur Δ est l'analogue de l'opérateur

⁽¹⁾ Pour tout anneau A , on note $B(A)$ l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & a' \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ (a, a' dans A).

de Laplace-Beltrami en géométrie riemannienne . Par analogie , on dit que la fonction h est harmonique si l'on a $\Delta h = 0$ et qu'elle est surharmonique si l'on a $\Delta h \leq 0$. Enfin , le potentiel d'une fonction positive v sur S est la fonction Gv finie ou non , définie sur S par $Gv(s) = \sum_{t \in S} G(s,t)v(t)$.

Par un raisonnement élémentaire dû à Doob [4] , on montre que toute fonction surharmonique positive h s'écrit de manière unique sous la forme $h' + Gv$ avec h' harmonique positive et v positive . On a $v = -\Delta h$. Par suite , pour toute fonction positive v , l'équation de Poisson $\Delta h = -v$ a une solution positive (finie) si et seulement le potentiel Gv est fini ; ce potentiel est alors la solution positive minimale de l'équation de Poisson .

On a alors les corollaires usuels . Par exemple , la borne inférieure de deux fonctions surharmoniques positives est surharmonique positive ; toute fonction surharmonique positive majorée par un potentiel fini est un potentiel fini ; toute fonction surharmonique positive est limite d'une suite croissante de potentiels finis .

On peut aussi développer la théorie du balayage . Soient T une partie de S et h une fonction surharmonique positive . Il existe alors une fonction surharmonique positive $H_T h$, la réduite de h sur T , caractérisée par les propriétés suivantes :

- a) On a $H_T h \leq h$, avec égalité sur T .
- b) Toute fonction surharmonique positive q qui majore h sur T majore $H_T h$ partout .
- c) La fonction $H_T h$ est harmonique en dehors de T .
- d) Si h est le potentiel d'une fonction positive nulle hors de T , on a $H_T h = h$.

On déduit de là le principe du maximum : si une fonction surharmonique h majore un potentiel fini Gv en tout point où v ne s'annule pas , on a $h \geq Gv$ partout .

Tout ce qui précède est un cas particulier de la théorie du potentiel associée à une chaîne de Markov ; cette théorie est maintenant bien connue , et l'on en trouvera

un excellent exposé dans le traité de Kemeny-Snell-Knapp . Cependant ces auteurs font l'hypothèse markovienne , c'est-à-dire supposent que la constante 1 est harmonique . Pour éviter cette restriction (plus apparente que réelle) , nous associons à chaque ensemble C de chemins une fonction U_C sur $S \times S$: la valeur $U_C(s,t)$ est la somme des nombres $p(c)$ pour tous les chemins c joignant s à t et appartenant à C . Par exemple , on a $G = U_{\Gamma}$ où Γ est l'ensemble de tous les chemins , et $P = U_{\Gamma(1)}$ où $\Gamma(1)$ est l'ensemble des chemins de longueur 1 . Si C , C' et C'' sont trois ensembles de chemins , et si C se compose des chemins de la forme $c'c''$ avec $c' \in C'$ et $c'' \in C''$ (décomposition unique) , on a $U_C = U_{C'} U_{C''}$ (c'est-à-dire plus explicitement $U_C(s,u) = \sum_{t \in S} U_{C'}(s,t) U_{C''}(t,u)$) . Cette formule fournit des démonstrations combinatoires simples d'un grand nombre de relations . Par ailleurs , on peut fonder la théorie du balayage sur la seule inégalité $U_C h \leq h$ (c'est-à-dire explicitement $\sum_{t \in S} U_C(s,t) h(t) \leq h(s)$) valable pour toute fonction surharmonique $h \geq 0$.

7. Représentations intégrales des fonctions harmoniques (Cartier [2]) .

Les hypothèses sont celles des nos 1 et 6 . Conformément à la méthode classique de Martin, normalisons le noyau de Green en un sommet de référence o par

$$(1) \quad K(s,t) = G(s,t)/G(o,t) \quad .$$

Par un argument combinatoire utilisant les méthodes du no 6 , on établit la formule $K(s,t) = K(s,s')$ où s' est le point de la géodésique de s à o le plus rapproché de t . La compactification de S étant définie comme au no 1 , on montre alors que K s'étend en une fonction continue (notée encore K) sur $S \times \hat{S}$. Cette fonction K est le noyau de Martin .

Le problème de Dirichlet est aisé à résoudre au niveau "fini" . Pour tout entier $n \geq 0$, soit S_n l'ensemble des sommets à la distance n de o , et soit $S(n) = \bigcup_{j=0}^n S_j$.

Pour tout $n \geq 1$, toute fonction sur S_n s'étend de manière unique en une fonction sur $S(n)$ harmonique dans l' "intérieur" $S(n-1)$ de $S(n)$; de plus, ce prolongement est le potentiel d'une fonction nulle hors de S_n .

Soit alors h une fonction harmonique positive. Pour tout entier $n \geq 0$, il existe d'après ce qui précède une unique fonction v_n nulle hors de S_n telle que

$$(2) \quad h(s) = \sum_{t \in S} K(s,t) v_n(t) \quad (s \in S(n)).$$

Le point non évident est la positivité de v_n , qui résulte de la théorie du balayage. Ceci acquis, notons μ_n la mesure positive sur \hat{S} , portée par S_n et qui attribue la masse $v_n(t)$ à tout point t de S_n . On montre facilement que les mesures μ_n convergent vaguement vers une mesure positive μ sur \hat{S} , portée par l'ensemble B des bouts. Par passage à la limite, on déduit de (2) la formule de représentation intégrale

$$(3) \quad h(s) = \int_B K(s,b) \mu(db) \quad (s \in S).$$

La mesure μ sur B est caractérisée par cette formule.

La théorie des ensembles convexes compacts due à Choquet permet de prouver a priori l'existence d'une représentation intégrale du type (3), mais reste inefficace sans l'explicitation de l'espace compact B . De plus, on a ici deux particularités intéressantes :

- a) La compactification de Martin \hat{S} de S ne dépend que de la "topologie" de l'arbre X , et non des coefficients $p(\vec{st})$ attribués aux arêtes orientées.
- b) Pour tout point b de B , la fonction $s \mapsto K(s,b)$ est un point extrémal de l'ensemble convexe compact formé des fonctions harmoniques positives h telles que $h(o) = 1$.

On peut généraliser le théorème de représentation intégrale. L'espace compact \hat{S} est totalement discontinu et sa topologie est engendrée par l'algèbre de Boole \underline{B} des parties ouvertes et fermées. Une mesure additive sur cette algèbre de Boole s'appelle

une distribution sur \hat{S} . Pour tout s dans S , la fonction $t \mapsto K(s,t)$ sur \hat{S} est localement constante, donc étagée par rapport à \underline{B} . Si λ est une distribution sur \hat{S} , on peut donc définir l'intégrale $K\lambda(s) = \int_{\hat{S}} K(s,t)\lambda(dt)$.

THÉORÈME 5.- L'application $\lambda \mapsto K\lambda$ est une bijection de l'ensemble des distributions sur \hat{S} sur l'ensemble des fonctions sur S . La fonction $K\lambda$ est surharmonique positive si et seulement si la distribution λ est une mesure positive sur \hat{S} . La fonction $K\lambda$ est harmonique si et seulement si la distribution λ est portée par B .

8. Théorème de Fatou (Cartier [2]).

On fait maintenant l'hypothèse markovienne : la fonction constante 1 est harmonique. D'après le théorème de représentation intégrale du n° 7, il existe donc une mesure positive de masse 1 sur B , soit ν , caractérisée par la relation

$$(4) \quad \int_B K(s,b)\nu(db) = 1 \quad \text{pour tout } s \in S.$$

On dit que ν est la mesure de Poisson.

En utilisant la méthode de Doob [4], on introduit un cheminement aléatoire $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ sur l'arbre X régi par les conventions suivantes : on a $X_0 = o$; sous l'hypothèse $X_n = s$, les valeurs permises pour X_{n+1} sont les sommets t liés à s , et la probabilité de passer de s à t est $p(\vec{st})$. Comme le noyau de Green est fini, le lemme de Borel-Cantelli montre que X_n tend presque-sûrement vers un point aléatoire X_∞ de B ; la loi de probabilité de X_∞ est la mesure de Poisson ν sur B .

Soit h une fonction harmonique bornée. Le théorème des martingales montre que la suite des variables aléatoires $h \circ X_n$ tend presque sûrement vers une variable aléatoire Y . On montre ensuite qu'il existe une fonction borélienne et bornée φ sur B telle que $Y = \varphi \circ X_\infty$. On a alors l'analogie de la formule intégrale de Poisson

$$(5) \quad h(s) = \int_B K(s,b)\varphi(b)\nu(db) \quad (s \in S),$$

et l'analogue du théorème de convergence radiale de Fatou

$$(6) \quad \varphi(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(s_n) \quad \text{pour } \nu\text{-presque tout } b \in B,$$

où l'on a noté $[s_0, s_1, \dots, s_n, \dots]$ la chaîne infinie joignant o à b .

L'existence de X_∞ et φ repose sur le lemme topologique suivant : tout chemin infini issu de o , qui ne passe qu'un nombre fini de fois en chaque sommet, tend vers un point de B , et passe par chacun des points de la chaîne infinie joignant o à b .

Cette propriété très particulière des arbres permet donc de déduire le théorème de convergence radiale du théorème probabiliste de Fatou. Ceci est d'autant plus remarquable que la probabilité est nulle que le cheminement aléatoire suive une chaîne infinie.

9. Arbres homogènes (Serre [6], Cartier [3]).

On note q un entier ≥ 1 et X un arbre homogène de degré $q + 1$; autrement dit, tout sommet de X appartient à $q + 1$ arêtes. Voici quelques exemples d'arbres homogènes :

a) Le graphe $\Gamma(G, P)$ où G est le groupe libre à n générateurs x_1, \dots, x_n et où $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ (cf. n° 3); on a ici $q = 2n - 1$.

b) Le graphe $\Gamma(G, P)$ où G est défini par les générateurs x_1, \dots, x_n et les relations $x_1^2 = \dots = x_n^2 = 1$, et où $P = \{x_1, \dots, x_n\}$; on a ici $q = n - 1$.

c) Le graphe associé à un corps local K comme au n° 4; q est alors le nombre d'éléments du corps résiduel de K .

On note S l'ensemble des sommets de X , et \underline{K} l'espace des fonctions complexes sur S , qui sont nulles hors d'une partie finie de S . Le groupe $\text{Aut}(X)$ agit de manière évidente sur l'espace \underline{K} . L'algèbre \underline{H} de tous les endomorphismes de l'espace vectoriel \underline{K} qui commutent à $\text{Aut}(X)$ s'appelle l'algèbre de Hecke de l'arbre X . Pour tout entier $n \geq 0$, l'opérateur $\textcircled{\omega}_n$ est défini ainsi : pour toute fonction $f \in \underline{K}$ et tout sommet s , la valeur de $\textcircled{\omega}_n f$ en s est la somme des valeurs de f aux points à la distance n de s . Alors la suite $\textcircled{\omega}_0, \textcircled{\omega}_1, \textcircled{\omega}_2, \dots, \textcircled{\omega}_n, \dots$ est une base de l'espace vectoriel

\underline{H} ; la table de multiplication est la suivante :

$$(7) \quad \textcircled{W}_m \cdot \textcircled{W}_n = \sum_{i=0}^{\infty} c(m,n|i) \textcircled{W}_i \quad ,$$

avec les valeurs suivantes des coefficients :

$$(8) \quad c(m,n|i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > \inf(m,n) \\ 1 & \text{si } i = 0 \\ (q-1)q^{i-1} & \text{si } 0 < i < \inf(m,n) \\ q^i & \text{si } i = \inf(m,n) \text{ et } m \neq n \\ (q+1)q^{i-1} & \text{si } i = m = n \end{cases}$$

On pose $T = \textcircled{W}_1$. On obtient par spécialisation des formules précédentes les valeurs suivantes

$$(9) \quad \begin{cases} T \cdot \textcircled{W}_0 = \textcircled{W}_1 \\ T \cdot \textcircled{W}_1 = \textcircled{W}_2 + (q+1)\textcircled{W}_0 \\ T \cdot \textcircled{W}_m = \textcircled{W}_{m+1} + q \textcircled{W}_{m-1} \quad \text{si } m \geq 2 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que les monômes T^n pour $n \geq 0$ forment une base de l'algèbre de Hecke , qui est donc l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[T]$. La formule (9) s'exprime plus commodément sous la forme

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \textcircled{W}_n u^n = \frac{1 - u^2}{1 - uT + qu^2} \quad .$$

Le cheminement aléatoire le plus naturel sur l'arbre \bar{X} est celui où la probabilité de passer d'un sommet s à un sommet t lié à s est indépendante de t , donc égale à $1/(q+1)$. On a alors $Ph = Th/(q+1)$ pour toute fonction $h \in \underline{K}$; comme on a $G = \sum_{n=0}^{\infty} P^n = \lim_{u \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} u^n P^n$, on peut déduire des formules précédentes la valeur du noyau de Green

$$(11) \quad G(s,t) = \frac{1-d(s,t)}{q-1} \quad ;$$

dans cette formule , $d(s,t)$ est la distance du sommet s au sommet t . Le calcul du noyau de Martin est alors facile . Choisissons un sommet o de référence . Soit b un bout ; nous numérotions les horocycles associés à b (cf. $n^0 1$) de telle sorte qu'on ait $o \in H_o$. On a alors $K(s,b) = q^{-n}$ pour tout sommet $s \in H_n$.

10. Fonctions sphériques (Cartier [3]) .

Les notations sont celles du $n^0 9$. On appelle fonction sphérique sur X toute fonction F sur $S \times S$ avec les deux propriétés suivantes :

- a) On a $F(gs,gs') = F(s,s')$ quels que soient les sommets s et s' et l'automorphisme g de X ; autrement dit , $F(s,s')$ ne dépend que de la distance $d(s,s')$.
- b) Pour tout sommet s' , la fonction $s \mapsto F(s,s')$ est une fonction propre pour chaque élément de l'algèbre de Hecke \underline{H} .

On normalise les fonctions sphériques par $F(s,s) = 1$ pour tout sommet s .

Les formules (9) donnent facilement la forme des fonctions sphériques ; pour tout nombre complexe $v \neq 0$, on a une fonction sphérique F_v définie par

$$(12) \quad F_v(s,s') = \frac{v^{n+1} q^{l-n} - v^{n-1} q^{l-n} + v^{1-n} - q^2 v^{-1-n}}{(q+1)(v - qv^{-1})} .$$

Toute fonction sphérique est de la forme F_v et l'on a $F_v = F_{v'}$ si et seulement si l'on a $v = v'$ ou $vv' = q$. Comme fonction de s , la fonction sphérique $F_v(s,s')$ est associée à la valeur propre $v + qv^{-1}$ de T .

On montre ensuite que la fonction sphérique F_v est de type positif si et seulement si l'on a $|v + qv^{-1}| \leq q+1$, autrement dit si v est complexe de module $q^{1/2}$ ou bien réel de module compris entre 1 et q . Ceci se démontre en traduisant la condition que F_v est de type positif de manière géométrique : il existe une application $\tilde{\Phi}$ de S dans l'ensemble des vecteurs unitaires d'un espace de Hilbert , telle que

$$(13) \quad \sum_{t \text{ lié à } s} \tilde{\Phi}(t) = (v + qv^{-1}) \tilde{\Phi}(s)$$

pour tout sommet s . La condition $|v + qv^{-1}| \leq q+1$ (est donc nécessaire ; inversement, si elle est remplie, on construit de proche en proche Φ sur l'ensemble des sommets à la distance n d'un sommet o de référence).

Supposons pour terminer que X soit l'arbre associé à $SL_2(K)$ (cf. n° 4), où K est un corps local. La formule (12) pour les fonctions sphériques est en accord avec les formules de Mautner. On peut montrer que le cercle $|v| = q^{1/2}$ correspond à la série principale de représentations de $SL_2(K)$, et les intervalles $1 \leq v \leq q$ et $-q \leq v \leq -1$ à la série complémentaire. Ce qui précède fournit une construction unifiée de ces deux séries de représentations par des méthodes combinatoires. On peut même réaliser les représentations de la série discrète de $SL_2(K)$ dans l'espace des fonctions de deux sommets de l'arbre associé à $SL_2(K)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes réductifs sur un corps local , à paraître aux Publ. Math. I.H.E.S. (voir un résumé dans 4 Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris , t. 263 (1966) , p. 598-601 , 766-768 , 822-825 , 867-869) .
- [2] P.CARTIER - Fonctions harmoniques sur un arbre , à paraître aux Atti del Convegno della Probabilità , Roma (mars 1971) .
- [3] P.CARTIER - Homogeneous trees , à paraître.
- [4] J.L. DOOB - Discrete potential theory and boundaries , J. Math. and Mech. 8 (1959), p. 433-458 .
- [5] J.G. KEMENY , J.L. SNELL and A.W. KNAPP - Denumerable Markov chains , Van Nostrand, New-York , 1966 .
- [6] J.-P. SERRE - Arbres , amalgames et SL_2 , Collège de France 1968/69 (notes polyco- piées , rédigées avec la collaboration de H. BASS) .
- [7] J.-P. SERRE - Le problème des groupes de congruence pour SL_2 , Ann. of Maths , 92 (1970) , p. 489-527 .
- [8] J. TITS - Sur le groupe des automorphismes d'un arbre , dans "Mémoires dédiés à Georges de Rham " , p. 188-211 , Springer Verlag , Berlin , 1970 .