

Astérisque

PIERRE CARTIER

Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki, exp. n° 580, p. 21-44

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__21_0>

© Société mathématique de France, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PERTURBATIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES
ET ANALYSE NON-STANDARD

par Pierre CARTIER

§ 1. Introduction

1. L'équation de van der Pol a servi de prototype aux études sur les oscillateurs auto-entretenus. Rappelons que, convenablement normalisée, cette équation s'écrit sous la forme :

$$(1) \quad \varepsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad ;$$

comme il est d'usage depuis Newton, on désigne par un point la dérivée par rapport au temps, et x est une fonction à déterminer du temps t . Un résultat fondamental est que cette équation admet une solution périodique, et que, à l'exception de la solution $x = 0$, toute autre solution de l'équation (1) est asymptotique à la solution périodique. Le point à mentionner est que dans l'approximation linéaire de cette équation, à savoir $\varepsilon \ddot{x} - \dot{x} + x = 0$, le terme $-\dot{x}$ est expansif, et que toute solution $x(t)$ est non bornée et tend exponentiellement vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. Il n'y a donc pas de solution périodique dans ce cas, et seule la non-linéarité introduite par le terme $x^2\dot{x}$ permet l'existence de la solution périodique, qui représente une auto-oscillation.

Dans les applications courantes de l'équation de van der Pol, le paramètre ε est petit, de l'ordre de 10^{-4} ou 10^{-5} par exemple. Cette petitesse est responsable d'une forme remarquable des solutions (figure 1). On constate qu'il y a alternance, au cours d'une période, de deux phases lentes et de deux phases rapides qui se traduisent par l'existence de branches presque verticales dans le graphe de la

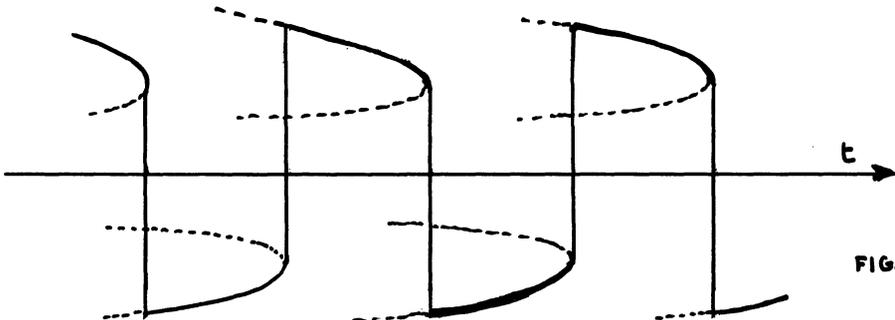


FIG. 1

fonction . De telles oscillations portent le nom d'oscillations de relaxation ; on les rencontre très fréquemment , par exemple dans les contractions cardiaques [15]. De nombreuses études classiques leur ont été consacrées par van der Pol [13] , par Liénard [12] et par Haag [9,10] . En particulier , Haag a mis au point une méthode heuristique , qui rend de grands services pratiques , et permet une étude qualitative rapide . Mais la justification rigoureuse en est malaisée ; la difficulté principale provient de ce que l'ordre de l'équation différentielle de van der Pol s'abaisse de 2 à 1 lorsque l'on fait tendre ϵ vers 0 , ce que l'on désigne sous le nom de "perturbation singulière" . Une des méthodes couramment employées utilise des développements en séries de puissances de ϵ , qui ne sont le plus souvent que des développements asymptotiques ; les calculs sont en général complexes , et assez délicats à justifier ; de plus , il se pose le plus souvent le problème du raccordement de solutions conduisant à des développements asymptotiques distincts selon la région envisagée .

2. Les développements récents dont nous allons rendre compte sont dus à l'école de Reeb à Strasbourg , Mulhouse et Oran . Ils ont donné lieu à d'innombrables notes publiées par l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg (IRMA) , reprises pour l'essentiel dans les six thèses soutenues cette année et répertoriées dans notre bibliographie . A l'exception de celle de J.Harthong [26] , consacrée aux équations aux dérivées partielles , elles concernent le domaine des perturbations singulières des équations différentielles ordinaires . L'originalité de ces recherches réside dans l'emploi des méthodes infinitésimales (ou non-standard) élaborées par A.Robinson dans un ouvrage [21] qui est peut-être un des chefs-d'oeuvre mathématiques du 20e siècle .

Le langage mathématique usuel ne permet pas de donner un sens rigoureux à la notion de "petit" ou de "grand", ni de justifier des règles d'emploi courant comme "la somme d'un petit nombre de nombres petits est petite" ou "la différence d'un grand nombre et d'un petit nombre est un grand nombre". Le système de Robinson permet d'idéaliser cette situation en introduisant des nombres infiniment grands et des nombres infiniment petits , et en codifiant les raisonnements portant sur ces concepts . Ainsi l'équation de van der Pol sera étudiée en supposant ϵ infiniment petit ; ce faisant , on a une seule équation à étudier , et non une famille , et l'on peut à la fois alléger le langage et contourner de délicats théorèmes de passage à la limite . Une tendance analogue se manifeste dans la géométrie algébrique à la Grothendieck , où l'on considère par exemple un schéma en groupes sur le spectre d'un anneau local intègre , avec "la" fibre générique et "la" fibre spéciale . Les mathématiques dans un topos (voir mon exposé n° 513 à ce Séminaire) généralisent cette manière de procéder . L'emploi des points infiniment voisins est courant dans la géométrie algébrique classique , et Grothendieck en a donné une justification complète avec sa théo-

PERTURBATIONS SINGULIÈRES

rie des schémas . La justification des infiniment petits en Analyse est plus ardue , ce qui explique peut-être le retard pris par leur diffusion .

Grâce à ces techniques infinitésimales nouvelles , l'Ecole Strasbourgeoise a pu donner une justification aisée des méthodes de van der Pol et Haag. Un vocabulaire très suggestif a été créé : ombre , halo , permettant de conserver aux raisonnements rigoureux une forme très voisine de l'intuition géométrique , et de formuler de manière précise des concepts fondamentaux : oscillation de relaxation , champ lent-rapide ... Enfin , l'apport le plus intéressant est la mise à jour de phénomènes nouveaux , les "canards" qui accompagnent très souvent les bifurcations de Hopf . De nombreuses équations différentielles ont été étudiées sous cet angle par Callot , Ur-lacher , Troesch , F. et M. Diener , et ont révélé leurs canards . A côté de ces exemples , il conviendrait peut-être de s'attacher à formuler et démontrer des phénomènes généraux dans ce champ d'étude neuf .

§ 2. Infiniment grands

3. Maintenant que le Calcul des Probabilités , sous la forme axiomatique décrite par Kolmogoroff , a acquis droit de cité en Mathématiques "pures" , il peut être instructif de justifier les infinitésimaux par référence aux variables aléatoires . Nous considérons donc le triplet usuel $(\Omega, \underline{F}, P)$ avec des hypothèses un peu différentes des conventions habituelles :

- a) Ω est un ensemble ;
- b) \underline{F} est l'ensemble de toutes les parties de Ω ;
- c) P est une application de \underline{F} dans $\{0,1\}$ qui est additive (on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ lorsque A et B sont des parties disjointes de Ω) et normalisée (on a $P(\Omega) = 1$) .

Soit X un ensemble ; on dit que deux applications x' et x'' de Ω dans X sont égales presque partout si l'on a $P\{x' = x''\} = 1$ (en notant $\{x' = x''\}$ l'ensemble des points ω de Ω tels que $x'(\omega) = x''(\omega)$) . Un élément aléatoire dans X est une classe d'équivalence x d'applications de Ω dans X , pour l'égalité presque partout ; un élément x' de x s'appelle une version de x . La loi de probabilité de x est définie par $P_x(T) = P\{x' \in T\}$ pour toute version x' de x et toute partie T de X .

Notons X^* l'ensemble des éléments aléatoires de X ; pour tout élément x de X , notons x^* l'élément de X^* dont une version est l'application constante de valeur x de Ω dans X .

4. L'amphithéâtre où se joue l'Analyse Mathématique peut se décrire rapidement comme suit : on considère la plus petite classe d'ensembles contenant $\underline{\mathbb{R}}$ et qui , avec deux ensembles A et B contient leur produit $A \times B$ et l'ensemble des parties de A ;

on l'appelle l'échelle . Tous les objets mathématiques courants sont des éléments de l'un des ensembles de l'échelle . Par exemple , une application f de I dans J , où I et J sont des intervalles de $\underline{\underline{R}}$, est identifiée à son graphe , donc à un élément de $\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{R}} \times \underline{\underline{R}})$; l'ensemble ℓ^2 des suites de carré sommable de nombres réels est un élément de $\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{R}} \times \underline{\underline{R}}))$; on laisse au lecteur le plaisir de situer dans cette hiérarchie l'espace des distributions , ou un autre favori

A chaque ensemble A de l'échelle correspond un ensemble A^* d'éléments aléatoires , et à chaque élément x de A un élément x^* de A^* . On dispose par exemple de l'ensemble $\underline{\underline{R}}^*$, ou de $\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{R}})^*$, en notant $\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{R}})$ l'ensemble des applications continues de $\underline{\underline{R}}$ dans $\underline{\underline{R}}$. On a les règles de calcul suivantes :

$$(2) \quad (A \cup B)^* = A^* \cup B^* \quad , \quad (A \cap B)^* = A^* \cap B^* \quad , \quad (A \setminus B)^* = A^* \setminus B^*$$

$$(3) \quad (A \times B)^* = A^* \times B^*$$

$$(4) \quad (\epsilon_A)^* = \epsilon_{A^*} \quad , \quad (=_{\underline{\underline{A}}})^* = =_{A^*} \quad ,$$

où ϵ_A désigne la partie de $A \times \underline{\underline{P}}(A)$ formée des couples (x,y) tels que $x \in y$, et où $=_A$ désigne la diagonale de $A \times A$. De même , l'opération $*$ est compatible avec les projections et les échanges de facteurs dans un ensemble produit .

Les théorèmes mathématiques portant sur les objets de l'échelle peuvent en principe se transcrire en formules exprimant des relations entre ensembles fabriquées avec les opérations précédentes . Par exemple , notons S le graphe de l'addition ; c'est l'ensemble des triplets (x,y,z) dans $\underline{\underline{R}}^3$ tels que $x + y = z$. Le fait que S soit un graphe se traduit par la formule

$$(5) \quad [(S \times \underline{\underline{R}}) \cap s_{34}(S \times \underline{\underline{R}})] \setminus (\underline{\underline{R}}^2 \times =_{\underline{\underline{R}}}) = \emptyset \quad ,$$

en notant s_{ij} l'échange des coordonnées d'indice i et j dans un espace $\underline{\underline{R}}^p$. On s'exercera à vérifier que l'associativité de l'addition dans $\underline{\underline{R}}$ se traduit par la formule :

$$(6) \quad [s_{34}\{(S \times \underline{\underline{R}}^3) \cap s_{56}(\underline{\underline{R}}^2 \times S \times \underline{\underline{R}})\} \cap s_{45}(\underline{\underline{R}} \times S \times \underline{\underline{R}}^2)] \setminus s_{14}(\underline{\underline{R}}^3 \times S) = \emptyset \quad .$$

Compte tenu des règles d'emploi de $*$, chacune des formules (5) et (6) entraîne la formule analogue où l'on remplace $\underline{\underline{R}}$ par $\underline{\underline{R}}^*$ et S par S^* ; autrement dit , S^* est le graphe dans $(\underline{\underline{R}}^*)^3$ d'une loi d'addition associative dans $\underline{\underline{R}}^*$. On dit que l'on a effectué le transfert de l'addition dans $\underline{\underline{R}}^*$. Bien entendu , toutes les propriétés algébriques de $\underline{\underline{R}}$ se transportent à $\underline{\underline{R}}^*$, qui devient ainsi un corps commutatif ordonné .

5. Ici intervient un changement subtil de point de vue . Appelons "nombres réels standard" les nombres usuels , et notons $\underline{\underline{R}}_{st}$ leur ensemble ; au lieu d'écrire $(\underline{\underline{R}}_{st})^*$, écrivons simplement $\underline{\underline{R}}$. Nous identifions tout nombre réel standard x à l'élément correspondant x^* de $\underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{R}}_{st})^*$. Autrement dit , nous élargissons

PERTURBATIONS SINGULIÈRES

la notion de nombre réel de manière à y inclure les éléments aléatoires du type particulier considéré, et nous créons le qualificatif "standard" pour distinguer les "vrais" nombres réels de leurs colocataires. La convention analogue s'applique aux vecteurs, matrices, fonctions, polynômes....., de sorte qu'on distinguera par exemple les polynômes standard parmi les polynômes. De manière générale, on appellera ensemble standard tout ensemble de la forme A^* , où A est un élément d'un des ensembles appartenant à l'échelle construite sur $\mathbb{R}_{=st}$.

On peut alors formuler un principe général de transfert. Appelons "interne" toute notion ou toute propriété dont la définition ne fait nulle part, directement ou indirectement, intervenir le vocable "standard". Alors, pour établir la validité d'une propriété interne contenant des variables x, y, f, \dots représentant des nombres, des fonctions, ... , il suffit de le faire en se restreignant au cas où x, y, f, \dots sont standard. Les théorèmes usuels se transportent ainsi tels quels, par exemple, les théorèmes d'existence et d'unicité des équations différentielles.

Avec l'ordre d'exposition adopté, le principe de standardisation est évident : si A est un ensemble appartenant à un ensemble de l'échelle construite sur \mathbb{R} (au nouveau sens), l'ensemble de ses éléments standard est un élément A_{st} de l'échelle construite sur $\mathbb{R}_{=st}$, et l'on peut former l'ensemble $(A_{st})^*$: c'est l'unique ensemble standard ayant mêmes éléments standard que A .

6. La théorie ainsi développée contient-elle quelque chose de nouveau ? Non évidemment si Ω ne contient qu'un seul élément, auquel cas, on a $A^* = A$ pour tout A . Dans le cas général, remarquons que la donnée de P équivaut à celle d'un ultrafiltre \underline{U} sur Ω , tel que l'on ait $P(A) = 1$ si $A \in \underline{U}$ et $P(A) = 0$ si $A \notin \underline{U}$. La construction de X^* à partir de X est la construction connue des ultrapuissances de \mathcal{L} os.

Soient alors X un ensemble standard et x un élément de X . Les traces sur X_{st} des parties standard de X contenant x forment un ultrafiltre \underline{U}_x sur X_{st} ; si l'on choisit une version x' de x , interprétée comme application de Ω dans X_{st} , l'ultrafiltre \underline{U}_x est l'image de \underline{U} par x' ; de plus, la loi de probabilité de x est définie par $P_x(A) = 1$ si $A \in \underline{U}_x$ et $P_x(A) = 0$ si $A \notin \underline{U}_x$. Un lemme classique dû à Bourbaki assure que, étant donnée une famille d'ensembles X_i munis d'ultrafiltres \underline{U}_i , il existe un ensemble T , un ultrafiltre \underline{V} sur T et des applications f_i de T dans X_i tels que \underline{U}_i soit l'image de \underline{V} par f_i pour tout i . Ce lemme joue le rôle du théorème de Kolmogoroff affirmant l'existence de variables aléatoires indépendantes ayant des lois de probabilité données à l'avance. Il nous permet de choisir (Ω, \mathcal{F}, P) assez gros pour que, quels que soient l'ensemble standard X et l'ultrafiltre \underline{U}_0 sur X_{st} , il existe un élément x de X tel que $\underline{U}_0 = \underline{U}_x$.

Nous faisons désormais l'hypothèse précédente qui nous assure d'un stock impor-

tant d'objets "idéaux" . On peut alors énoncer le principe d'idéalisation :

Soient A et B deux ensembles standard , et R une partie standard de $A \times B$. On suppose que , pour tout entier standard n et toute suite d'éléments standard x_1, \dots, x_n de A , il existe un élément standard y de B tel que l'on ait $(x_i, y) \in R$ pour $i = 1, \dots, n$. Il existe alors un élément b de B tel que l'on ait $(x, b) \in R$ pour tout élément standard x de A .

7. L'ensemble $\underline{\mathbb{N}}$ des entiers positifs est standard ; il faut distinguer entre $\underline{\mathbb{N}}$ et la partie $\underline{\mathbb{N}}_{st}$ formée des entiers positifs standard . Appliquons le principe d'idéalisation au cas où A et B sont égaux à $\underline{\mathbb{N}}$ et où R se compose des couples (i, j) d'entiers positifs tels que $i < j$. Il existe donc un entier ω tel que l'on ait $n < \omega$ pour tout entier n standard , autrement dit un entier infiniment grand ω .

Est-ce possible ? On a évidemment $0 \in \underline{\mathbb{N}}_{st}$ et la relation $n \in \underline{\mathbb{N}}_{st}$ entraîne $n+1 \in \underline{\mathbb{N}}_{st}$, et l'on devrait avoir $\underline{\mathbb{N}}_{st} = \underline{\mathbb{N}}$ d'après le principe de récurrence ! Le paradoxe se résout grâce à la notion d'ensemble interne . Dans l'analogie probabiliste qui nous sert de guide , on décrit une partie aléatoire A de $\underline{\mathbb{R}}$ en donnant l'une de ses versions , qui est une application $\omega \mapsto A(\omega)$ de Ω dans l'ensemble des parties de $\underline{\mathbb{R}}$. Une telle partie aléatoire de $\underline{\mathbb{R}}$ détermine une classe \underline{A} de variables aléatoires x , à savoir celles qui satisfont à la relation $P\{x \in A\} = 1$. Mais , pour prendre un exemple , la classe des variables aléatoires dont la loi est gaussienne ne peut se décrire au moyen d'un ensemble aléatoire .

On dira donc qu'une partie d'un ensemble standard X est "interne" si elle appartient à l'ensemble standard $\underline{P}(X_{st})^*$, qui est distinct en général de $\underline{P}(X) = \underline{P}((X_{st})^*)$; toute partie standard de X est interne , mais la réciproque est fautive si l'ensemble standard X est infini . L'ensemble X_{st} des éléments standard de X n'est pas une partie interne de X si l'ensemble standard X est infini .

Une fonction sera dite interne si son graphe est un ensemble interne . On vérifie facilement que l'ensemble des points d'un ensemble standard X qui satisfont à une propriété interne est une partie interne de X . Par exemple , si n est un entier infiniment grand , l'intervalle $]n, n+1[$ de $\underline{\mathbb{R}}$ est une partie interne de $\underline{\mathbb{R}}$ qui ne contient aucun nombre réel standard . La fonction $t \mapsto \sin t$ est standard , la fonction $t \mapsto \sin(nt)$ (où n est un entier infiniment grand) est interne , mais non standard . De manière générale , si l'on remplace dans une fonction standard $f(x, y, \dots | a, b, \dots)$ les paramètres a, b, \dots par des nombres standard ou non , on obtient une fonction interne des variables x, y, \dots . Une fonction interne doit donc être considérée comme une fonction dépendant de paramètres cachés ; par contre , tout objet qui est caractérisé de manière unique par une propriété interne est standard en vertu du principe de transfert .

Revenons au principe de récurrence . Il a deux versions :

A) PRINCIPE DE RÉCURRENCE INTERNE : toute partie interne de $\underline{\mathbb{N}}$ qui contient 0 , et

PERTURBATIONS SINGULIÈRES

qui avec un entier n contient son successeur $n+1$ est égale à $\underline{\mathbb{N}}$.

B) PRINCIPE DE RÉCURRENCE EXTERNE : toute partie de $\underline{\mathbb{N}}$ qui contient 0 , et qui avec un entier standard n contient son successeur $n+1$ contient tous les entiers positifs standard.

Il n'y a pas de paradoxe, parce que l'ensemble $\underline{\mathbb{N}}_{st}$ des entiers positifs standard n'est pas une partie standard, ni même interne, de $\underline{\mathbb{N}}$. On déduit de là un nouveau principe fondamental : soit A une partie interne de $\underline{\mathbb{N}}$; alors, ou bien il existe un entier standard n_0 tel que l'on ait $n < n_0$ pour tout élément n de A , ou bien il existe dans A des entiers infiniment grands. De manière plus ramassée, une partie interne de $\underline{\mathbb{N}}$ contient des entiers infiniment grands si et seulement si elle contient des entiers standard arbitrairement grands.

8. Concluons ! Nous avons introduit parmi l'univers de tous les ensembles la classe des ensembles standard, qui intuitivement sont les ensembles définis sans ambiguïté. Une classe plus vaste est formée des ensembles internes, qui intuitivement sont les ensembles dépendant de paramètres. Enfin, il existe des ensembles non internes, que nous appellerons externes. Le principe de standardisation permet de décrire un ensemble standard en caractérisant ses éléments standard. Le principe de transfert permet un va-et-vient constant entre les ensembles standard et les ensembles internes, en assurant que ces ensembles ont les mêmes propriétés internes. Par contre, le principe d'idéalisation introduit la nouveauté en créant des êtres idéaux tels que l'entier infiniment grand ω . De tels objets ne sont pas définis de manière univoque et doivent être considérés comme des fictions commodes (mais qui a jamais vu un ultrafiltre non trivial, une base de $\underline{\mathbb{R}}$ comme espace vectoriel sur $\underline{\mathbb{Q}}$, sans parler de la clôture algébrique d'un corps fini ou d'un corps p -adique ?).

Au point où nous en sommes arrivés, oublions l'échafaudage qui nous a permis de construire $\underline{\mathbb{R}}$ à partir de $\underline{\mathbb{R}}_{st}$; retenons la distinction entre ensembles standard, ensembles internes et ensembles externes, les trois principes fondamentaux de transfert, de standardisation et d'idéalisation, et les conséquences que nous en avons déduites. Gardons toute la richesse des théorèmes standard, et transférons-les systématiquement aux ensembles internes.

Le point de vue que nous avons exposé a été complètement axiomatisé par Nelson [20] et Hrbacek [16]; il me semble plus commode que le point de vue initialement introduit par Robinson [21].

§3. Éléments d'Analyse Infinitésimale

9. La distinction entre nombres réels standard et non-standard introduit une clas-

sification nouvelle des nombres réels . Un nombre réel x est dit limité (on dit aussi "fini") s'il existe un entier standard n tel que $|x| < n$; si x n'est pas limité , il est dit infiniment grand. Un nombre réel x est dit infiniment petit si l'on a $|x| < 1/n$ pour tout entier standard $n > 0$; ceci est la définition qu'avait tenté Abel , mais où il ne précisait pas que n soit standard , ce qui ne laissait que 0 comme infiniment petit . Enfin , un nombre réel x est dit appréciable s'il est limité , mais non infiniment petit .

Toute partie majorée de $\underline{\mathbb{R}}_{st}$ admet une borne supérieure dans $\underline{\mathbb{R}}_{st}$. Par transfert , toute partie interne de $\underline{\mathbb{R}}$, qui est majorée , admet une borne supérieure dans $\underline{\mathbb{R}}$. On voit aussitôt que l'ensemble $\underline{\mathbb{R}}_{st}$ des nombres standard , l'ensemble des nombres limités , ou celui des nombres infiniment petits , ne peuvent avoir de borne supérieure ; ce ne sont donc pas des parties internes de $\underline{\mathbb{R}}$.

Soit x un nombre limité ; l'ensemble des nombres standard majorés par x a une borne supérieure dans $\underline{\mathbb{R}}_{st}$, qu'on note x° ou $st[x]$, et qu'on appelle l'ombre ou la partie standard de x . On voit aussitôt que x° est l'unique nombre standard a tel que $x - a$ soit infiniment petit . Autrement dit , l'ensemble des nombres limités est un sous-anneau $\underline{\mathbb{G}}$ de $\underline{\mathbb{R}}$, somme directe de son sous-anneau $\underline{\mathbb{R}}_{st}$ et de l'idéal des nombres infiniment petits .

On dit que deux nombres x et y sont équivalents (notation $x \sim y$) si $x - y$ est infiniment petit . On écrit $x \ll y$ ou $y \gg x$ si l'on a $x < y$ et que x, y ne soient pas équivalents . Deux nombres x et y satisfont à une et une seule des relations $x \ll y$, $x \sim y$, $x \gg y$.

Soit p un entier positif standard . On dit qu'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_p)$ de $\underline{\mathbb{R}}^p$ est standard , ou limité , ou infiniment petit , si chacune de ses coordonnées a la même propriété . On munit $\underline{\mathbb{R}}^p$ d'une des normes usuelles , par exemple

$$\|x\| = \sup(|x_1|, \dots, |x_p|) .$$

Alors x est limité , ou infiniment petit , si et seulement si $\|x\|$ est limité , ou infiniment petit . On dira que deux vecteurs x et y sont infiniment voisins , ou équivalents si $x - y$ est infiniment petit ; on note $x \sim y$ cette relation . Si x est limité , son ombre est l'unique vecteur standard x° infiniment voisin de x .

10. Nous énonçons maintenant quatre principes d'emploi constant . Notons A une partie interne de $\underline{\mathbb{R}}$.

PRINCIPE DE LIMITATION : Si A se compose de nombres limités , elle est contenue dans un intervalle de la forme $[-n, n]$, où n est un entier positif standard .

PRINCIPE DE PERMANENCE : Si A contient tous les nombres positifs limités , elle contient un intervalle de la forme $[0, \omega]$, où ω est infiniment grand .

PERTURBATIONS SINGULIÈRES

PRINCIPE DE CAUCHY : Si A contient tous les nombres positifs infiniment petits , elle contient un intervalle de la forme $[0, a[$, où le nombre $a > 0$ est standard.

PRINCIPE DE ROBINSON : Si A se compose de nombres infiniment petits , elle est contenue dans un intervalle de la forme $[-\epsilon, \epsilon]$, où ϵ est infiniment petit .

Pour établir le principe de limitation , remarquons que si A se compose de nombres limités , on a $|a| < \omega - 1 < \omega$ pour tout nombre infiniment grand positif ω ; donc $|A|$ est majorée et sa borne supérieure s satisfait à $s < \omega$ pour ω positif infiniment grand ; donc s est limité , et par suite majoré par un entier standard n . Le principe de permanence s'établit de même en considérant la borne inférieure b de $\underline{\mathbb{R}}_+ \setminus A$, qui satisfait à $a \leq b$ pour tout nombre standard a , donc est infiniment grande . Le principe de Cauchy se déduit du principe de limitation appliqué à l'ensemble des nombres $1/x$, où x parcourt $\underline{\mathbb{R}}_+ \setminus A$, et l'on déduit de manière analogue le principe de Robinson du principe de permanence .

11. Les quatre principes précédents impliquent de nombreux résultats d'uniformité , et l'on peut souvent utiliser le principe de limitation et le principe de Cauchy pour transformer un résultat "non-standard" en un résultat "standard" .

Soient p et q des entiers positifs standard , et f une application interne de $\underline{\mathbb{R}}^p$ dans $\underline{\mathbb{R}}^q$. Si $f(x)$ est limité pour tout x dans $\underline{\mathbb{R}}^p$, l'ensemble des nombres $\|f(x)\|$ pour x parcourant $\underline{\mathbb{R}}^p$, est une partie de $\underline{\mathbb{R}}$ composée de nombres limités ; d'après le principe de limitation , f est donc bornée dans $\underline{\mathbb{R}}^p$. De manière analogue , si $f(x)$ est limité pour tout point limité x de $\underline{\mathbb{R}}^p$, la fonction f est bornée sur toute partie bornée standard de $\underline{\mathbb{R}}^p$. D'après le principe de Robinson, si $f(x)$ est infiniment petit pour tout point x de $\underline{\mathbb{R}}^p$, il existe un nombre infiniment petit ϵ tel que l'on ait $\|f(x)\| < \epsilon$ pour tout point x de $\underline{\mathbb{R}}^p$.

Voici une conséquence plus subtile :

LEMME DE ROBINSON : Si $f(x)$ est infiniment petit en tout point limité x de $\underline{\mathbb{R}}^p$, il existe un nombre infiniment grand positif ω , tel que $f(x)$ soit infiniment petit pour tout point x de $\underline{\mathbb{R}}^p$ tel que $\|x\| \leq \omega$.

Pour la démonstration , il suffit d'appliquer le principe de permanence à l'ensemble interne A formé des nombres réels r positifs tels que l'on ait $r \cdot \|f(x)\| \leq 1$ pour tout point x de $\underline{\mathbb{R}}^p$ satisfaisant à $\|x\| \leq r$; par hypothèse , A contient l'ensemble des nombres réels positifs limités , donc il contient un nombre positif infiniment grand ω .

On a des résultats analogues pour les suites internes $(u_n)_{n \in \underline{\mathbb{N}}}$ de nombres ou de vecteurs . Si u_n est limité (resp. infiniment petit) pour tout n , il existe une constante positive C limitée (resp. infiniment petite) telle que l'on ait $\|u_n\| \leq C$ pour tout $n \in \underline{\mathbb{N}}$. Si l'on suppose que u_n est infiniment petit pour tout n stan-

dard , alors il existe un entier positif infiniment grand ω tel que u_n soit infiniment petit pour tout entier $n \leq \omega$.

12. Soient p et q deux entiers positifs standard , A une partie interne de $\underline{\mathbb{R}}^p$ et f une application interne de A dans $\underline{\mathbb{R}}^q$. La continuité de f se définit par transfert à partir du cas standard ; autrement dit , f est continue en un point a de A si , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que la relation $\|x - a\| < \delta$ entraîne $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ pour tout $x \in A$. Lorsque f et A sont standard, f est continue dans A si et seulement si l'on a $f(x) \sim f(y)$ dès que les points x et y de A satisfont à $x \sim y$ et que l'un d'eux est standard.

Un apport original de l'Analyse non-standard est la notion de S-continuité , qui est un substitut très avantageux de la convergence uniforme . On dira que l'application interne f de A dans $\underline{\mathbb{R}}^q$ est S-continue si l'on a $f(x) \sim f(y)$ dès que les points x et y de A satisfont à $x \sim y$. Lorsque f et A sont standard , cela signifie que f est uniformément continue . Il existe des fonctions S-continues mais non continues (par exemple , l'application $x \mapsto \varepsilon \cdot \text{sgn}(x)$ de $\underline{\mathbb{R}}$ dans $\underline{\mathbb{R}}$, où ε est infiniment petit et non nul) ; il existe des fonctions continues , mais non S-continues (par exemple , la fonction $f : \underline{\mathbb{R}} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ telle que $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = 1$ si $x \geq \varepsilon$ et qui est linéaire entre 0 et ε) .

Introduisons l'ombre d'une fonction . Supposons que A soit une partie standard de $\underline{\mathbb{R}}^p$ et que $f(x)$ soit limité pour tout point standard x de A . D'après le principe de standardisation , il existe une application standard f° de A dans $\underline{\mathbb{R}}^q$ telle que l'on ait $f(x) \sim f^\circ(x)$ pour tout point standard x de A ; on dira que f° est l'ombre de f . Lorsque f est S-continue, la fonction standard f° est uniformément continue et l'on a $f(x) \sim f^\circ(x)$ pour tout x limité dans A . Réciproquement, s'il existe une application uniformément continue standard g de A dans $\underline{\mathbb{R}}^q$ telle que l'on ait $f(x) \sim g(x)$ pour tout point x de A , alors f est S-continue et g est son ombre.

Voici un exemple courant d'application S-continue . Soient I un intervalle de $\underline{\mathbb{R}}$ et g une application continue standard de $A \times I$ dans $\underline{\mathbb{R}}^q$; soit t un élément limité de I dont l'ombre t° appartienne aussi à I . Alors l'application $x \mapsto f(x,t)$ de A dans $\underline{\mathbb{R}}^q$ est S-continue , et son ombre est l'application $x \mapsto f(x,t^\circ)$. Par exemple , l'application $x \mapsto \sin(\varepsilon x)$, où ε est infiniment petit , est S-continue , et son ombre est la fonction constante nulle . Par contre , l'application $x \mapsto \sin(\omega x)$, où ω est infiniment grand , n'est pas S-continue .

13. Essayons de décrire l'originalité de l'apport de Robinson . Il y a eu de nombreux essais d'élaborer une théorie des fonctions définies dans des extensions du corps $\underline{\mathbb{R}}$. Il est facile de créer un élément infiniment petit $\varepsilon > 0$; il suffit de munir le corps des fractions $\underline{\mathbb{R}}(\varepsilon)$ de l'anneau $\mathbb{R}[[\varepsilon]]$ de séries formelles de la relation d'ordre dont les éléments strictement positifs sont les séries $a_n \varepsilon^n + a_{n+1} \varepsilon^{n+1} + \dots$

PERTURBATIONS SINGULIÈRES

avec $a_n > 0$. On peut aussi construire le corps R réunion des corps $R(\epsilon^{1/n})$; il suffit d'adjoindre à R une racine carrée de -1 pour obtenir un corps algébriquement clos C , dont la théorie algébrique ressemble beaucoup à celle du corps \underline{C} des nombres complexes. De tels corps ont été considérés par Veronese et Hilbert, vers 1900, dans l'étude des fondements de la géométrie euclidienne.

Parmi tous les corps ordonnés, le corps \underline{R} des nombres réels est le seul dans lequel toute partie majorée ait une borne supérieure. D'ailleurs, cette propriété est à la base des démonstrations des théorèmes fondamentaux sur les fonctions d'une variable réelle: théorème de Rolle, des accroissements finis, de la valeur intermédiaire, ... En fait, ces théorèmes sont en défaut dans les extensions de \underline{R} considérées ci-dessus.

La découverte fondamentale de Robinson est qu'une extension du corps des nombres réels "standard" ne peut réussir qu'à une double condition:

a) Il faut remettre en cause la notion d'entier, en adjoignant des entiers infiniment grands aux entiers usuels; à ce prix, on pourra conserver l'axiome d'Archimède: tout nombre réel est majoré par un nombre entier.

b) Il faut restreindre la notion de fonction; on ne considérera donc que les fonctions internes, assez régulières pour que tous les théorèmes fondamentaux de l'Analyse puissent leur être appliqués, et cependant infiniment plus nombreuses que les fonctions standard.

§4. Perturbation des équations différentielles

14. On s'intéresse aux équations différentielles dépendant d'un paramètre ϵ , par exemple l'équation de van der Pol, et au comportement des solutions lorsque ϵ tend vers 0. Nous allons introduire trois notions-clé: halo, galaxie, ombre, qui nous fourniront un langage commode pour exprimer les propriétés qualitatives des solutions.

Soit p un entier positif standard. On dit qu'une partie A de \underline{R}^p est une galaxie (resp. un halo) s'il existe une application interne f de \underline{R}^p dans \underline{R} telle que A se compose des points x tels que $f(x)$ soit limité (resp. infiniment petit). En général, un tel ensemble n'est pas interne. On doit à M. Diener et I. van den Berg le résultat suivant [31]:

PRINCIPE DE SÉPARATION: Soient A et B deux galaxies (resp. deux halos) disjointes. Il existe une partition de \underline{R}^p en deux parties internes A' et B' telles que A soit contenu dans A' et B dans B' .

Pour la démonstration, introduire deux fonctions internes f et g telles que A se compose des x tels que $f(x)$ soit limité (resp. infiniment petit) et B des y tels que $g(y)$ soit limité (resp. infiniment petit). Puis définir A' par l'inégalité $f(x) \leq g(x)$ et B' par l'inégalité $f(x) > g(x)$. Si x appartient à

A , alors $f(x)$ est limité et $g(x)$ est infiniment grand (resp. $f(x)$ est infiniment petit , mais $g(x)$ ne l'est pas) , d'où $A \subset A'$. On démontre de manière analogue l'inclusion $B \subset B'$.

Soit $c > 0$. La c -galaxie¹ (resp. le c -halo) d'une partie A de $\underline{\mathbb{R}}^D$ se compose des points x tels que $d(x,A)/c$ soit limité (resp. infiniment petit) , où $d(x,A)$ désigne la distance de x à l'ensemble A . L'ensemble des points limités est la galaxie de tout point limité ; on l'appelle la galaxie principale . Les c -galaxies des points de $\underline{\mathbb{R}}^D$ forment une partition de $\underline{\mathbb{R}}^D$, et la c -galaxie d'une partie A est la réunion des c -galaxies de ses points ; résultat analogue pour les c -halos .

Lorsque l'ensemble A est standard et borné, le halo de A est l'intersection des voisinages standard de A , et toute partie interne de $\underline{\mathbb{R}}^D$ qui contient le halo de A contient un voisinage standard de A ("principe de Cauchy").

15. L'ombre d'une partie A de $\underline{\mathbb{R}}^D$ est la partie standard A° ayant mêmes points standard que le halo de A . Lorsque A est standard , l'ombre de A est son adhérence . Si f est une application S -continue de $\underline{\mathbb{R}}^D$ dans $\underline{\mathbb{R}}$, de graphe G , l'ombre de G dans $\underline{\mathbb{R}}^D \times \underline{\mathbb{R}}$ est le graphe de l'ombre f° de f ; si la fonction f est continue , mais non S -continue , l'ombre de son graphe n'est pas nécessairement un graphe de fonction (considérer pour un exemple la fonction $x \mapsto \sin(\omega x)$ où ω est infiniment grand) .

L'ombre d'une partie non vide peut être vide . Cependant , si A est contenue dans une partie bornée standard , elle est contenue dans le halo de son ombre . Plus particulièrement , supposons qu'il existe un nombre infiniment petit ε et une famille standard $(A_t)_{t \in \underline{\mathbb{R}}}$ de parties de $\underline{\mathbb{R}}^D$ tels que $A = A_\varepsilon$. Une variante du principe de Cauchy affirme que pour tout voisinage standard U de l'ombre de A , il existe un nombre $c > 0$ tel que U contienne A_t pour tout nombre réel t tel que $|t| < c$.

16. Les méthodes infinitésimales permettent d'aborder le problème des perturbations régulières des équations différentielles , même dans des cas où l'on n'impose pas l'unicité des solutions de l'équation perturbée .

Le principe général est que l'ombre d'une trajectoire d'un champ de vecteurs est une trajectoire de l'ombre du champ de vecteurs . De manière plus précise , on a la résultat suivant :

Soient X un champ de vecteurs S -continu sur $\underline{\mathbb{R}}^D$, I un intervalle standard de $\underline{\mathbb{R}}$ et u une application interne de I dans $\underline{\mathbb{R}}^D$ qui satisfait à l'équation différentielle $\dot{u} = X(u)$; on suppose que $u(t)$ est limité pour tout $t \in I$ limité . Alors l'ombre X° de X est un champ de vecteurs continu standard sur $\underline{\mathbb{R}}^D$, et l'om-

¹ On dira simplement "galaxie" pour "1-galaxie" et "halo" pour "1-halo" .

PERTURBATIONS SINGULIÈRES

bre u^0 de u satisfait à l'équation $\dot{u}^0 = X^0(u^0)$.

La dépendance par rapport aux conditions initiales peut se formuler de manière analogue :

Soient X et X_0 deux champs de vecteurs sur $\underline{\mathbb{R}^p}$; on suppose que X est interne et que X_0 est standard et localement lipschitzien ; on note H le halo formé des points x de $\underline{\mathbb{R}^p}$ tels que l'on ait $X(x) \sim X_0(x)$. Soient I un intervalle compact standard de $\underline{\mathbb{R}}$, t_0 un point standard de I et u_0 une trajectoire de X_0 , définie sur l'intervalle I . Soit u une trajectoire de X , satisfaisant aux conditions suivantes :

- a) $u(t_0)$ est équivalent à $u_0(t_0)$;
- b) u est définie sur I ;
- c) l'ensemble $u(I)$ se compose de points limités, et est contenu dans H .

Dans ces conditions, $u(t)$ est équivalent à $u_0(t)$ pour tout $t \in I$, et $u(I)$ est contenu dans le halo de $u_0(I)$.

Indiquons la démonstration pour donner un exemple de raisonnement par les méthodes infinitésimales. Pour tout $t \in I$, on a $\dot{u}(t) = X(u(t)) \sim X_0(u(t))$ d'après c). Il en résulte que $\dot{u}(t)$ est limité pour tout $t \in I$, et le théorème des accroissements finis montre que u est une application S-continue de I dans $\underline{\mathbb{R}^p}$. Soit U l'ombre de u . Alors U est une application continue standard de I dans $\underline{\mathbb{R}^p}$, et l'on a

$$X(u(s)) \sim X_0(u(s)) \sim X_0(U(s))$$

pour tout $s \in I$ car X_0 est une application continue standard. Par intégration (noter que l'intégrale d'une fonction infiniment petite sur un intervalle standard fini est infiniment petite), on en déduit

$$U(t) - U(t_0) \sim u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t X(u(s)) ds \sim \int_{t_0}^t X_0(U(s)) ds.$$

Pour tout nombre standard t , on a donc $U(t) - U(t_0) = \int_{t_0}^t X_0(U(s)) ds$ puisque deux nombres standard équivalents sont égaux. On a de plus $U(t_0) = u_0(t_0)$, et par l'unicité des trajectoires de X_0 , on conclut de là à l'égalité de U et u_0 .

C.Q.F.D.

Dans les applications du résultat précédent (dû à Troesch [27]), la difficulté provient de ce que, dans b) et c), on a fait des hypothèses sur la trajectoire u du champ de vecteurs X . Or X apparaît comme une perturbation du champ de vecteurs standard X_0 et l'on connaît souvent mieux les trajectoires du champ non perturbé X_0 . Francine Diener [24] a énoncé, sous le nom de "lemme de l'ombre courte", une variante du résultat précédent, où l'on remplace les hypothèses b) et c) par les suivantes :

- b') u est définie sur un intervalle contenant t_0 ;

c') il existe une galaxie limitée G, contenant $u_0(I)$ et contenue dans H, contenant le halo de chacun de ses points.

Sous ces conditions, u se prolonge en une trajectoire de X définie sur I , et l'on a $u(t) \sim u_0(t)$ pour tout $t \in I$.

17. Dans l'étude des perturbations singulières, la notion centrale est celle de "champ lent-rapide". On dira qu'un champ de vecteurs interne X défini sur une partie ouverte standard U de $\underline{\mathbb{R}}^p$ est lent-rapide, si après avoir au besoin représenté U comme réunion d'une famille standard d'ouverts standard et avoir effectué un changement de coordonnées différentiable standard dans chacun de ces ouverts, on peut écrire X sous la forme

$$(7) \quad X(x,y) = (X'(x,y)/\varepsilon, X''(x,y)) \quad ;$$

on a décomposé $\underline{\mathbb{R}}^p$ en un produit $\underline{\mathbb{R}}^m \times \underline{\mathbb{R}}^n$, ε est infiniment petit, X' et X'' sont des fonctions continues et S -continues. L'ensemble C des points de U où s'annule X' est appelé la variété lente de X ; le champ de vecteurs rapide est le champ de vecteurs continu standard R défini par $R(x,y) = (X''(x,y), 0)$.

Les trajectoires du champ X sont les solutions de l'équation différentielle

$$(8) \quad \varepsilon \dot{x} = X'(x,y) \quad , \quad \dot{y} = X''(x,y) \quad .$$

Si l'on fait le changement de temps $t = T\varepsilon$, on peut écrire ce système sous la forme équivalente

$$(9) \quad dx/dT = X'(x,y) \quad , \quad dy/dT = \varepsilon X''(x,y) \quad .$$

Appliquons le premier résultat mentionné au n°16. Si a et b sont deux nombres standard, toute solution de l'équation différentielle (9) définie sur l'intervalle $[a,b]$ a pour ombre une trajectoire du champ rapide $R = (X'', 0)$. En changeant de paramètre, on a une trajectoire du champ X , définie sur l'intervalle infiniment petit $[\varepsilon a, \varepsilon b]$. L'ensemble G des points limités de U n'appartenant ni au halo de la variété lente, ni au halo de la frontière de U, est une galaxie. D'après ce qui précède, si I est un intervalle limité de $\underline{\mathbb{R}}$ et u une trajectoire du champ X telle que $u(I) \subset G$, alors l'intervalle I est infiniment petit. Soient z un point de G et $(u(t))_{0 \leq t < t_1}$ une trajectoire de X telle que $u(0) = z$; l'ensemble des nombres $t > 0$ tels que $u([0,t])$ soit contenu dans G est une galaxie de $\underline{\mathbb{R}}$ et se compose de nombres infiniment petits. Comme le halo des nombres infiniment petits n'est pas un ensemble interne, on déduit du principe de séparation du n°14 l'existence d'un nombre infiniment petit t_0 tel que $u([0,t_0])$ ne soit pas contenu dans G . De manière plus imagée, toute trajectoire du champ lent-rapide X issue d'un point de G quitte G au bout d'un temps infiniment petit. Cette application du principe de séparation est tout à fait typique.

PERTURBATIONS SINGULIÈRES

18. Il importe de distinguer soigneusement dans la variété lente C les parties attractives des parties répulsives. Nous dirons que C est une variété attractive si elle satisfait aux deux propriétés suivantes :

a) C est une sous-variété de classe C^1 de U , transverse aux sous-variétés linéaires $\underline{\mathbb{R}}^m \times \{y\}$ de $\underline{\mathbb{R}}^m \times \underline{\mathbb{R}}^n$ (donc aux trajectoires du champ rapide R).

b) C est l'ensemble des zéros d'une fonction positive standard H de classe C^1 sur U , telle que l'on ait $R \cdot \nabla H(u) \ll 0$ pour tout point limité u de U qui n'appartient ni au halo de C , ni au halo de la frontière de U .

On peut alors, comme le fait Troesch dans [27], appliquer les méthodes de Liapounov et démontrer le résultat suivant :

Il existe un voisinage ouvert standard U_1 de C contenu dans U avec les propriétés suivantes :

1) Pour tout point u de U_1 , la demi-trajectoire positive de u pour le champ de vecteurs R est contenue dans U_1 .

2) Soit u un point limité de U_1 ; la demi-trajectoire positive de u pour le champ lent-rapide X atteint le halo de C en un temps infiniment petit et y reste ensuite.

3) Soit u un point limité de U_1 ; en dehors du halo de C , la demi-trajectoire issue de u pour le champ de vecteurs X reste dans le halo de la trajectoire du champ de vecteurs standard R qui passe par u .

On dira que C est une variété répulsive pour le champ lent-rapide X si c'est une variété attractive pour le champ de vecteurs $-X$. Si $(u(t))_{t \in \mathbb{I}}$ est une trajectoire du champ X , alors $(u(-t))_{t \in \mathbb{I}}$ en est une du champ $-X$; les résultats précédents se transposent donc facilement aux variétés répulsives. Tout l'intérêt se concentre donc sur le raccordement des parties attractives aux parties répulsives de la variété lente.

19. Nous illustrerons ces notions sur un exemple simple. On considère dans $\underline{\mathbb{R}}^2$ le champ de vecteurs interne X donné par $X(x,y) = (1, -y/\varepsilon)$ et correspondant à l'équation différentielle :

$$(10) \quad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = -y/\varepsilon$$

(avec $\varepsilon > 0$ infiniment petit). La trajectoire passant par le point standard (x_0, y_0) est décrite par les relations :

$$(11) \quad x(t) = t + x_0, \quad y(t) = y_0 e^{-t/\varepsilon};$$

on voit que $y(t)$ est infiniment petit dès que l'on a $t > \varepsilon^{1/2}$. La variété lente est la droite C d'équation $y = 0$, et son halo se compose des points (x,y) tels que y soit infiniment petit. On voit donc que la trajectoire γ issue de (x_0, y_0) atteint le halo de C en un temps au plus égal à $\varepsilon^{1/2}$ (donc infiniment petit);

l'ombre Γ de $\gamma(\underline{\mathbb{R}}_+)$ est réunion du segment joignant (x_0, y_0) au point $(x_0, 0)$ et de la demi-droite de C définie par la relation $x \geq x_0$.

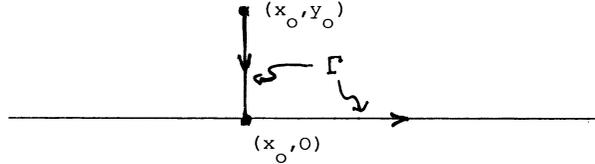


FIG. 2

Le champ de vecteurs εX correspond à l'équation différentielle

$$(12) \quad \dot{x} = \varepsilon \quad , \quad \dot{y} = -y$$

et l'ombre R de εX (qui est le champ rapide associé au champ lent-rapide X) correspond à l'équation différentielle

$$(13) \quad \dot{x} = 0 \quad , \quad \dot{y} = -y \quad .$$

La courbe intégrale du champ εX passant par le point (x_0, y_0) a pour équation $y = y_0 e^{-(x-x_0)/\varepsilon}$; son ombre est égale à Γ et elle est donc distincte de la courbe intégrale du champ R passant par ce même point (x_0, y_0) . Il n'y a pas là une contradiction avec le premier résultat du n°16. En effet, si u (resp. u_0) est la trajectoire du champ de vecteurs εX (resp. de son ombre R) issue de (x_0, y_0) , $u_0(I)$ est l'ombre de $u(I)$ pour tout intervalle limité I ; mais comme on a $u(t) = (x_0 + \varepsilon t, y_0 e^{-t})$ la trajectoire u n'atteint le halo de C qu'en un temps infiniment grand, et l'intersection de C et de l'ombre de $u(\underline{\mathbb{R}}_+)$ ne peut contenir que le point $(x_0, 0)$ de l'ombre de $u_0(\underline{\mathbb{R}}_+)$.

§5. L'équation de van der Pol et ses canards

20. Les équations différentielles que nous allons étudier sont toutes de la forme $\varepsilon \ddot{x} + H(x, \dot{x}) = 0$ avec ε infiniment petit. Nous voulons montrer qu'elles admettent des oscillations de relaxation. Grâce à l'Analyse non-standard, on peut définir une telle oscillation comme une fonction interne $x(t)$ satisfaisant aux conditions suivantes (qui ne sont satisfaites pour aucune fonction standard !):

- a) la fonction x est de classe C^1 sur $\underline{\mathbb{R}}$;
- b) la fonction x est périodique, et sa plus petite période positive T est appréciable;
- c) il existe une partie standard F de $\underline{\mathbb{R}}$, discrète et non vide, et telle que x ne soit S -continue en aucun point de F , et que \dot{x} soit limité en tout point n'appartenant pas au halo de F .

PERTURBATIONS SINGULIÈRES

Soit a un point de F ; par définition de la S -continuité , il existe deux points a' et a'' du halo de a tels que $x(a') - x(a'')$ ne soit pas infiniment petit , et il existe donc (th. des accroissements finis) un point du halo de a où \dot{x} n'est pas limité ; le halo de a est donc une phase rapide . Soit b le point de F immédiatement supérieur à a ; la dérivée \dot{x} prend des valeurs limitées dans l'ensemble des t tels que $a \ll t \ll b$, donc cet ensemble correspond à une phase lente .

On ne peut observer ces oscillations qu'en se plaçant à la bonne échelle . De manière générale , on appelle changement d'échelle tout difféomorphisme Φ interne de classe C^1 ; le champ de Φ est l'ensemble des x tels que $\Phi(x)$ soit limité . Supposons par exemple que Φ soit un difféomorphisme de \mathbb{R}^p dont le jacobien soit appréciable en tout point limité de \mathbb{R}^p ; alors le champ de Φ se compose des points limités de \mathbb{R}^p . Un microscope est un changement d'échelle dont le champ est contenu dans le halo d'un point ; l'inverse d'un microscope est un macroscopie (il permet de mettre la tour Eiffel dans une bouteille pour mieux l'observer) . Par exemple , une homothétie de rapport infiniment grand (resp. infiniment petit) est un microscope (resp. un macroscopie) . On peut imaginer des situations mixtes , par exemple la transformation $\Phi(x, \gamma) = (x, \epsilon \gamma)$ dans \mathbb{R}^2 , avec ϵ infiniment petit .

21. Les deux équations que nous considérons dans la suite sont les suivantes :

$$(14) \quad \epsilon \ddot{u} + (\dot{u}^3/3 - \dot{u}) + u = 0 \quad (\text{Rayleigh})$$

$$(15) \quad \epsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (\text{van der Pol}) .$$

On voit aussitôt que si u satisfait à l'équation de Rayleigh , alors $x = \dot{u}$ satisfait à l'équation de van der Pol . Nous poserons :

$$(16) \quad F(y) = y^3/3 - y \quad , \quad f(y) = y^2 - 1 \quad ,$$

de sorte que f soit la dérivée de F . On peut alors écrire les équations précédentes sous la forme :

$$(14') \quad \epsilon \ddot{u} + F(\dot{u}) + u = 0$$

$$(15') \quad \epsilon \ddot{x} + f(x).\dot{x} + x = 0 \quad .$$

Si l'on remplace ϵ par 0 dans l'équation de van der Pol , on obtient l'équation du premier ordre $(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$; elle s'intègre aisément , et l'on obtient l'équation des courbes intégrales :

$$(17) \quad \log |x| - x^2/2 = t - a \quad (a \text{ est une constante}).$$

Pour $t < a$, on a le choix entre quatre branches , mais la solution n'est pas prolongeable pour $t > a$ (Fig. 3) . On voit sur la figure 1 que l'on peut obtenir une solution périodique par raccordement de branches correspondant à des valeurs différentes de a . Il nous faut maintenant dégager un critère rationnel pour procéder à ce raccordement .

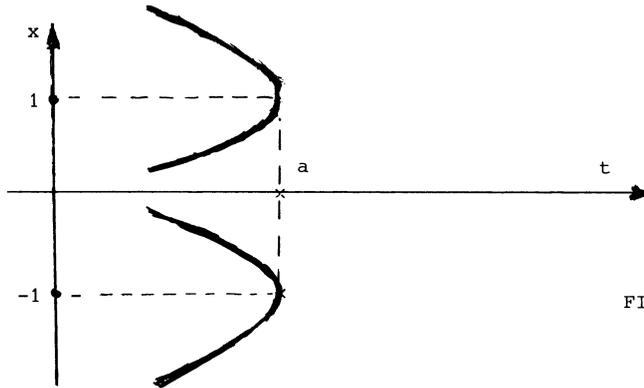


FIG. 3

22. Comme il est d'usage , remplaçons une équation différentielle du second ordre par un système de deux équations du premier ordre . Si u est une solution de l'équation de Rayleigh , nous posons

$$x = -\dot{u} \quad , \quad v = \dot{x} \quad , \quad V = \varepsilon v \quad ;$$

on a alors le choix entre trois systèmes du premier ordre :

PLAN DE LIÉNARD (x,u)	$\varepsilon \dot{x} = \dot{u} - F(x)$, $\dot{u} = -x$
PLAN DE PHASE (x,v)	$\dot{x} = v$, $\varepsilon \dot{v} = -x - f(x)v$
PLAN D'OBSERVABILITÉ (x,V)	$\varepsilon \dot{x} = V$, $\varepsilon \dot{V} = -\varepsilon x - f(x)V$.

On a $V = u - F(x)$, donc le plan de Liénard et le plan d'observabilité sont à la même échelle ; comme on a $V = \varepsilon v$, la galaxie principale du plan des phases correspond dans le plan d'observabilité à une partie du halo de la droite $V = 0$. Le plan de Liénard est spécial à l'équation de van der Pol ; par contre le plan d'observabilité conserve un sens pour des équations très générales du type $\varepsilon \ddot{x} + H(x, \dot{x}) = 0$ (cf. F.Diener [24]) .

Dans le plan de Liénard et dans le plan des phases , on a visiblement affaire à un champ de vecteurs du type lent-rapide . La courbe lente C se décrit ainsi dans les divers systèmes de coordonnées :

$$u = x^3/3 - x \quad , \quad v = x/(1 - x^2) \quad , \quad V = 0 \quad ;$$

elle se compose de deux parties attractives C^+ et C^- définies respectivement par les conditions $x > 1$ et $x < -1$, et d'une partie répulsive C^0 définie par la condition $|x| < 1$; on note respectivement S^+ et S^- les points de la courbe C où l'on a $x = 1$, $x = -1$.

Considérons dans le plan de Liénard un point limité (x_0, u_0) n'appartenant pas au halo de C , et soit γ la trajectoire issue de (x_0, u_0) . Pendant un temps infiniment court , la trajectoire γ reste contenue dans le halo de la droite $u = u_0$ du plan de Liénard (correspondant à la courbe d'équation $v = -x^3/3 + x + u_0$ du plan d'ob-

PERTURBATIONS SINGULIÈRES

servabilité) , puis elle atteint un point où la vitesse $v = \dot{x}$ est limitée . On est alors arrivé dans la ϵ -galaxie de C ; procédant à un changement d'échelle , on observe la trajectoire dans le plan des phases . Pendant un temps infiniment court , on reste dans le halo de la droite $x = x_0$ du plan des phases , jusqu'à entrer dans le halo de la courbe d'équation $v = x/(1 - x^2)$, qui n'est autre que le ϵ -halo de C dans le plan de Liénard . On reste alors dans ce ϵ -halo de C tant que $|x| - 1$ n'est pas infiniment petit , c'est-à-dire tant qu'on n'est pas dans le halo de S^+ ou de S^- . Supposons pour fixer les idées que γ atteigne le halo de C en un point de C^+ ; alors γ atteint le halo de S^+ en un temps limité .

Le point S^+ sépare sur la courbe C la partie attractive C^+ de la partie répulsive C^0 ; pour étudier le comportement de γ dans le halo de S^+ , on fait un nouveau changement d'échelle , accompagné d'un changement d'unité de temps :

$$(18) \quad x = 1 + \epsilon^{1/3} x_1 \quad , \quad u = -2/3 + \epsilon^{2/3} u_1 \quad , \quad t = \epsilon^{2/3} t_1 \quad .$$

L'équation du mouvement prend alors la forme suivante :

$$(19) \quad dx_1/dt_1 = u_1 - x_1^2 - \epsilon^{1/3} x_1^3/3 \quad , \quad du_1/dt_1 = -1 - \epsilon^{1/3} x_1 \quad .$$

L'ombre de ce mouvement est décrite par l'équation de Riccati $dx_1 = (x_1^2 - u_1)du_1$, qui s'intègre explicitement au moyen de fonctions de Bessel [10].

Ce dernier renseignement permet de conclure que l'on sort du halo de S^+ , et donc du halo de C , au bout d'un temps limité . On revient alors au mouvement de type rapide ; on parcourt en un temps infiniment petit un segment de courbe défini par $u \sim -2/3$, $-2 \ll x \ll 1$ pour arriver dans le halo du point $(-2, -2/3)$. Comme ce point appartient à C^- , on reste dans le halo de C^- jusqu'au moment où l'on atteint le halo de S^- ; l'analyse du comportement en S^- est analogue à celle qui a été faite pour S^+ .

En conclusion , dans le plan de Liénard , l'ombre de la trajectoire est contenue dans une partie bornée standard , et contient la courbe Γ réunion des quatre arcs suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : & \quad -2 \leq x \leq -1 \quad , \quad u = x^3/3 - x \\ \Gamma_2 : & \quad -1 \leq x \leq 2 \quad , \quad u = 2/3 \\ \Gamma_3 : & \quad 1 \leq x \leq 2 \quad , \quad u = x^3/3 - x \\ \Gamma_4 : & \quad -2 \leq x \leq 1 \quad , \quad u = -2/3 \quad . \end{aligned}$$

23. Dans le plan de Liénard , le champ de vecteurs est donné par ses composantes

$$(20) \quad X = (u - F(x))/\epsilon \quad , \quad U = -x \quad .$$

Il s'annule au point $(0,0)$ et en lui seul ; l'analyse des termes linéaires en x, u dans X, U montre qu'on a affaire à un noeud instable . Par ailleurs , on a vu qu'il existe une trajectoire relativement compacte , dont l'ensemble des points ω -limites

est contenu dans le halo de Γ . D'après le théorème de Poincaré-Bendixon, il existe donc une trajectoire fermée γ_0 contenue dans le halo de Γ . Pour déterminer la stabilité de γ_0 , on doit, d'après un critère classique, calculer l'intégrale

$$E = \int_{\gamma_0} h \, dt, \text{ avec } h = \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial x} = -(x^2 - 1)/\epsilon. \text{ Un calcul facile montre}$$

que ϵE est limité et strictement négatif. Par suite, il existe un unique cycle limite pour l'équation de van der Pol, et toute trajectoire est asymptotique, pour t tendant vers $+\infty$, à ce cycle-limite. Nous n'avons traité que le cas où ϵ est infiniment petit; une modification de la méthode a permis à Troesch [27] de traiter le cas où ϵ est limité.

Revenant du plan de Liénard à l'équation de van der Pol, on a prouvé l'existence d'une solution périodique; c'est en fait une oscillation de relaxation, dont les deux phases lentes correspondent aux arcs Γ_1 et Γ_3 , et les deux phases rapides aux deux arcs Γ_2 et Γ_4 . On a donc résolu le problème de raccordement posé à la fin du n°21.

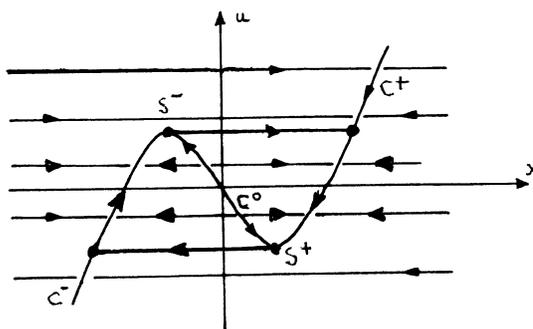


Figure 4. Ombres des trajectoires de l'équation de Van der Pol dans le plan de Liénard.

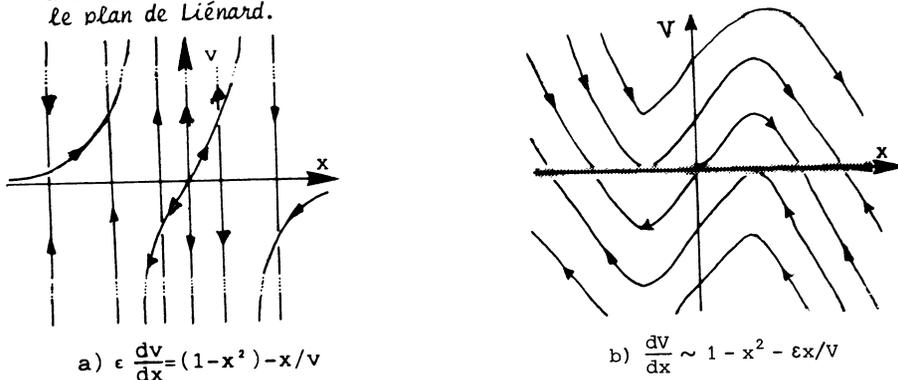


Figure 5. Ombres des trajectoires de l'équation de Van der Pol

- a) dans le plan de phase
- b) dans le plan d'observabilité.

PERTURBATIONS SINGULIÈRES

24. Considérons maintenant l'équation de van der Pol avec second membre :

$$(21) \quad \epsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = a$$

où $\epsilon > 0$ est infiniment petit comme précédemment ; on suppose a positif . Dans le plan de Liénard , l'équation s'écrit sous la forme :

$$(22) \quad \epsilon \dot{x} = u - F(x) \quad , \quad \dot{u} = a - x \quad ;$$

le point $(a, F(a))$ est l'unique point fixe . C'est un noeud instable lorsqu'on a $a \ll 1$, et il n'y a rien de bien nouveau : on établit comme plus haut l'existence d'un cycle limite situé dans le halo de Γ , correspondant à une période

$$T \sim 3 + (a^2 - 1) \log \left[\frac{4-a^2}{1-a^2} \right] .$$

Lorsque l'on a $a > 1$, le point fixe $(a, F(a))$ est un noeud stable , et la trajectoire de tout point converge vers ce point .

Lorsque a traverse la valeur 1 , on observe donc une bifurcation de Hopf classique , dans laquelle un cycle-limite entourant un noeud instable se contracte en un point qui devient un noeud stable . Il s'agit là d'une transformation topologique de la configuration des trajectoires , que l'on observe pour toute valeur limitée de ϵ . Mais lorsque l'on suppose ϵ infiniment petit , on observe un phénomène nouveau qui n'est pas une discontinuité topologique , mais une transformation extrêmement rapide de la taille du cycle-limite et de sa période ; elle se produit dans le voisinage immédiat de la valeur $a_0 = 1 - \epsilon/8 - 3\epsilon^2/32$. La figure suivante illustre ce phénomène dans le cas où ϵ est égal à 0,01 .

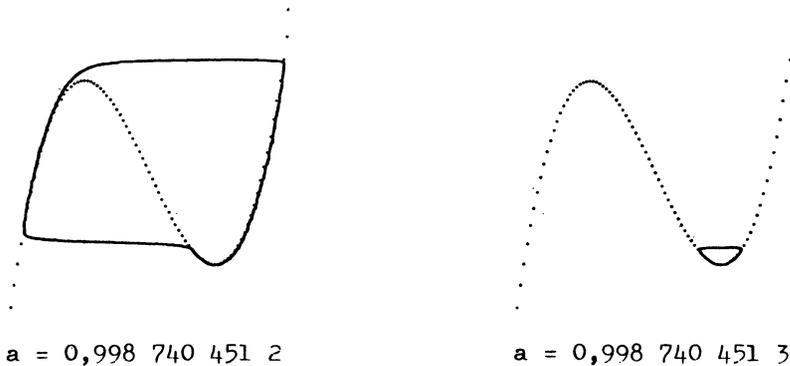


FIG. 6

On trouvera dans [29] une étude approfondie de ce type nouveau de résonance ; la forme des trajectoires les a fait baptiser "canards". Comme il est apparent sur la figure précédente, les trajectoires "canards" ont la particularité de suivre en partie la portion répulsive C^0 de la courbe lente C . Il s'agit donc là d'un phénomène

hautement instable . On peut d'ailleurs montrer , au moyen d'un changement d'échelle convenable que les valeurs de a pour lesquelles il y a un canard sont de la forme $a = a_c + e^{-1/M\epsilon}$, avec a_c ne dépendant que de ϵ , M parcourant l'ensemble des nombres limités strictement positifs : "les canards ont la vie brève" .

On a observé des canards dans de nombreuses autres situations , par exemple l'équation différentielle de Hermite [23] .

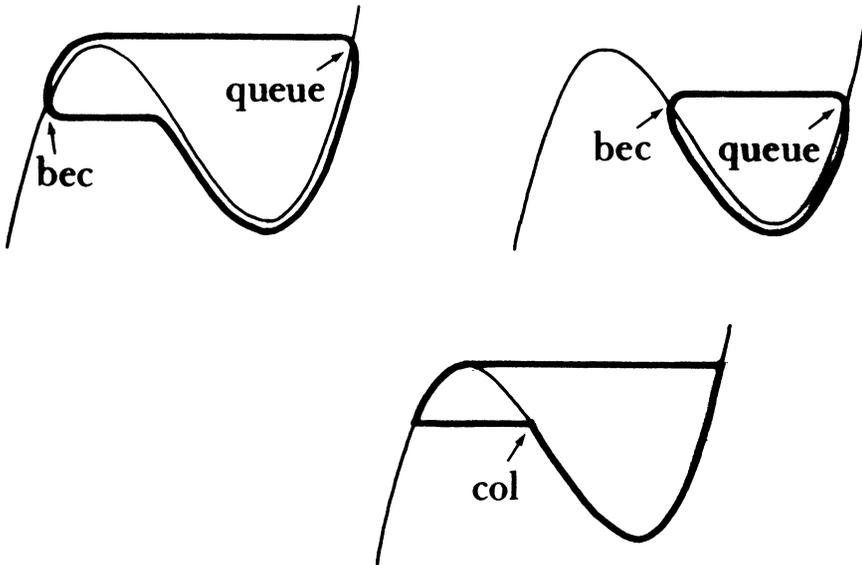


FIG. 7 Morphologie des canards

PERTURBATIONS SINGULIÈRES

BIBLIOGRAPHIE

A. Théorie générale des équations différentielles :

- [1] ANDRONOV A.A., VITT A.A., KHAIKIN S.E., *Theory of oscillators* , Pergamon Press , London , 1966 .
- [2] HARTMAN Ph., *Ordinary differential equations* , Wiley , New York , 1964 .
- [3] LEFSCHETZ S., *Differential equations : Geometric Theory* , Interscience , New York , 1957 .
- [4] MINORSKY M., *Théorie des oscillations* , Gauthier-Villars , Paris , 1967 .
- [5] O'MALLEY R.E., *Introduction to singular perturbations* , Acad.Press , N.Y., 1974 .
- [6] PONTRYAGIN L.S., *Ordinary differential equations* , Addison-Wesley , New York , 1962 .
- [7] WASOW W., *Asymptotic expansions for ordinary differential equations* , Interscience , New York , 1965 .

B. Oscillations de relaxation :

- [8] FLANDERS D.A., STOCKER J.J., *The limit case of relaxation oscillations* , in *Studies in Non-Linear Vibration Theory* , Inst. for Math. and Mech. , New York University , 1946 .
- [9] HAAG J., *Etude asymptotique des oscillations de relaxation* , *Ann.Sci. E.N.S.* , vol.60 , 1943 , p. 35-111 .
- [10] HAAG J., *Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillations de relaxation* , *Ann.Sci.E.N.S.* , vol.61 , 1944 , p. 73-117.
- [11] LEVINSON N., *An ordinary differential equation with an interval of stability , a separation point , and an interval of instability* , *Journ. of Math. and Physics* , vol.28 , 1949 , p. 215-222.
- [12] LIÉNARD A., *Etude des oscillations entretenues* , *Rev. Gén. Electr.* , vol.23 , 1928 , p. 901-946 .
- [13] VAN DER POL B., *Forced oscillations in a system with nonlinear resistance* , *Phil. Mag.* , vol. 3 , 1927 , p. 65-80.
- [14] VOGEL Th., *Théorie des systèmes évolutifs* , Gauthier-Villars , Paris , 1965 .
- [15] ZEEMAN E.C., *Differential equations for heart beat and nerve impulse* , in *Dynamical systems* , Peixoto édit. , Academic Press , New York , 1973 (p.683-748).

C. Analyse non standard :

- [16] HRBACEK K., *Non standard set theory* , *Amer. Math. Monthly* , vol.86 , 1979 , p. 659-677 .
- [17] KEISLER H.J., *Elementary calculus : an approach using infinitesimals*, Prindle,

P. CARTIER

Weber et Schmidt, Boston, 1976.

- [18] LAUGWITZ D. et SCHMIEDEN C., Kontinuum und Zahlen - Neue mathematische Überlegungen zum Endlichen , Darmstadt , 1980 .
- [19] LUTZ R. et GOZE M., Nonstandard Analysis , a practical guide with applications , Lect. Notes in Math. , vol. 881 , Springer , 1981 .
- [20] NELSON E., Internal set theory , Bull. A.M.S. , vol. 83 , 1977 , p.1165-1198.
- [21] ROBINSON A., Nonstandard Analysis , North Holland , Amsterdam , 1966 .
- [22] STROYAN K.D. et LUXEMBURG W.A.J., Introduction to the theory of infinitesimals, Academic Press , New York , 1976 .

D.Thèses strasbourgeoises :

- [23] CALLOT J.-L., Bifurcations du portrait de phase pour des équations différentielles du second ordre ayant pour type l'équation d'Hermite (24 juin 1981) .
- [24] DIENER F., Méthode du plan d'observabilité ; développements en ϵ -ombres (25 novembre 1981) .
- [25] DIENER M., Etude générique des canards (25 novembre 1981) .
- [26] HARTHONG J., Vision macroscopique de phénomènes périodiques (27 novembre 1981).
- [27] TROESCH A., Etude qualitative de systèmes différentiels : une approche basée sur l'analyse non-standard (27 mars 1981) .
- [28] URLACHER E., Oscillations de relaxation et analyse non-standard (23 octobre 1981) .

E.Notes strasbourgeoises sur les équations différentielles :

- [29] BENOIT E., CALLOT J.-L., DIENER F. et DIENER M., Chasse au canard , Collectanea Mathematica , vol. 32, 1981 , p. 3-74.
- [30] DIENER F., Les équations $\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x}^{[s]} + x = a$, Collectanea Mathematica, vol. 29 , 1978 , p. 217-247.
- [31] DIENER M. et VANDENBERG I.P., Halos et galaxies : une extension du lemme de Robinson , C.R. Acad. Sci. Paris , série A , vol.293, 1981 , p. 385-388.
- [32] TROESCH A., Etude macroscopique de systèmes différentiels , Publications IRMA , Strasbourg , 1980 .
- [33] TROESCH A. et URLACHER E., Analyse non standard et équation de van der Pol , Publications IRMA , Strasbourg , 1977 .
- [34] TROESCH A. et URLACHER E., Perturbations singulières et analyse non-standard : C^k -convergence et crépitement des solutions , Publications IRMA , Strasbourg , 1977 .

Pierre CARTIER
I.H.E.S.
35 route de Chartres
F-91440 BURES/YVETTE