PIERRE CARTIER

Détermination des caractères des groupes finis simples : travaux de Lusztig

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki, exp. nº 658, p. 137-161
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__137_0>

Séminaire BOURBAKI Février 1986
38ème année, 1985-86, n° 658

DÉTERMINATION DES CARACTÈRES DES GROUPES FINIS SIMPLES : TRAVAUX DE LUSZTIG

par Pierre CARTIER

Introduction

On connaît maintenant tous les groupes finis simples. A l'exception des 26 groupes sporadiques, des groupes cycliques d'ordre premier et des groupes alternés $\mathfrak{A}_n$ $(n \geq 5)$, tous ces groupes sont liés aux groupes de Lie simples. La table des caractères des groupes sporadiques a été souvent connue avant même la construction explicite de ces groupes, il n'y a aucun problème pour les groupes cycliques et la théorie des caractères des groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$ et alternés $\mathfrak{A}_n$ s'est développée depuis 1895 (Frobenius, Schur, Young). La table des caractères des groupes $GL(n,q)$ a été complètement déterminée par Green [23] en 1955 ; la généralisation aux autres groupes classiques a été lente. Le premier résultat général est celui de Deligne et Lusztig [22], qui ont construit en 1976 des caractères (virtuels), notés R_T^ϑ ou R_W^ϑ ; on peut montrer que les caractères irréductibles s'obtiennent tous par la décomposition des R_T^ϑ , qui vient d'être achevée par Lusztig [20].

Deligne et Lusztig utilisaient la *cohomologie étale* des variétés algébriques sur un corps fini. Pour une variété X propre et lisse sur le corps $\mathbb{F}_q$, on dispose du théorème de Deligne [37] : toute valeur propre α de l'endomorphisme de Frobenius agissant sur $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ est un entier algébrique tel que $|\alpha| = q^{i/2}$. Chaque variété X_w de Deligne-Lusztig est lisse, mais non propre, et son adhérence $\bar{X}_w$ dans la variété de drapeaux X est propre, mais non lisse ; le théorème de Deligne est en défaut pour ces variétés, et ceci impose de remplacer la cohomologie étale $H_c^*(X_w,\mathbb{Q}_\ell)$ par la *cohomologie d'intersection* $IH^*(\bar{X}_w,\mathbb{Q}_\ell)$. Celle-ci est aussi utilisée pour la construction des caractères du groupe de Weyl définis par Springer, qui sont un intermédiaire important de la classification.

Divers rapports au Séminaire Bourbaki ont marqué l'état d'avancement des recherches : Springer [10] en 1973, Serre [9] en 1976, Brylinski [8] et Springer [11] en 1982. Le présent rapport sera-t-il le dernier ?

1. L'EXEMPLE DU GROUPE LINÉAIRE

1.1. Fixons les notations. On note k (ou $\mathbb{F}_q$) un corps fini à q éléments, $\mathbb{F}$ une clôture algébrique de k, et φ l'automorphisme de Frobenius de $\mathbb{F}$, donné par $\varphi(x) = x^q$. Pour tout entier $m \geq 1$, les points fixes de φ^m dans $\mathbb{F}$ forment un sous-corps k_m, à q^m éléments ; c'est l'unique extension de degré m de k. On note N_m l'application de norme de k_m à k.

1.2. Rappelons la table des caractères du groupe $G_2 = GL_2(k)$, due essentiellement à Frobenius (1896) (voir ses Oeuvres, tome III, p. 37). Tout élément de $GL_2(k)$ est conjugué à un élément de l'une des formes $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ (avec $x \neq y$ dans k), ou $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, ou bien n'admet pas de valeur propre dans k ; dans ce dernier cas, il est conjugué dans $GL_2(k_2)$ à $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^q \end{pmatrix}$, où z appartient à k_2 et $z^q \neq z$.

Si α, β sont deux caractères de $k^\times$, on note χ le caractère $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \alpha(a)\beta(d)$ du groupe triangulaire B_2 et $\pi(\alpha,\beta)$ le caractère induit par χ de B_2 à G_2. En voici les valeurs :

$$(1)\quad \begin{cases} \pi(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \alpha(x)\beta(y) + \alpha(y)\beta(x) & (x \neq y)\,, \\ \pi(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = (q+1)\alpha(x)\beta(x) & \\ \pi(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \alpha(x)\beta(x) & \\ \pi(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^q \end{pmatrix} = 0 & (z^q \neq z)\,. \end{cases}$$

Ce caractère est de degré $q+1$; il est irréductible si $\alpha \neq \beta$.

Pour tout caractère Λ de $k_2^\times$, il existe un caractère $\pi(\Lambda)$ de G_2 donné par la table suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} \pi(\Lambda)\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = 0 & (x \neq y)\,, \\ \pi(\Lambda)\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = (q-1)\Lambda(x) & \\ \pi(\Lambda)\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = -\Lambda(x) & \\ \pi(\Lambda)\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^q \end{pmatrix} = -(\Lambda(z) + \Lambda(z^q)) & (z^q \neq z)\,. \end{cases}$$

Ce caractère est de degré $q-1$; il est irréductible si $\Lambda^q \neq \Lambda$.

Soit α un caractère de $k^\times$. Les caractères $\pi(\alpha,\alpha)$ et $\pi(\alpha \circ N_2)$ (1) de G_2 sont réductibles et l'on a la *règle de dégénérescence* :

$$(3)\qquad \pi(\alpha,\alpha) = \pi^+(\alpha) + \pi^-(\alpha) \qquad -\pi(\alpha \circ N_2) = \pi^+(\alpha) - \pi^-(\alpha) \;;$$

(1) Un caractère Λ de $k_2^\times$ est de la forme $\alpha \circ N_2$ si et seulement si l'on a $\Lambda^q = \Lambda$.

les caractères $\pi^+(\alpha)$ de degré 1 et $\pi^-(\alpha)$ de degré q sont *irréductibles*.

1.3. Pour étendre ce qui précède au cas du groupe $G_n = GL_n(k)$ (noté aussi $GL(n,q)$), on procède selon les étapes suivantes :

A) Induction : décomposons n en n_1+n_2 avec $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$. Notons P le sous-groupe de G_n formé des matrices triangulaires par blocs $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec $a \in GL_{n_1}(k)$, $d \in GL_{n_2}(k)$. Choisissons un caractère α_1 de G_{n_1} et un caractère α_2 de G_{n_2} et considérons le caractère $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \alpha_1(a)\alpha_2(d)$ de P . Par induction de P à G_n , on obtient un caractère $\alpha_1 \circ \alpha_2$ de G_n .

Notons C_n le groupe des caractères de G_n ; l'application $(\alpha_1,\alpha_2) \mapsto \alpha_1 \circ \alpha_2$ de $C_{n_1} \times C_{n_2}$ dans $C_{n_1+n_2}$ est $\mathbb{Z}$-bilinéaire et s'étend par linéarité en une multiplication sur le groupe $C = \bigoplus_{n\geq 0} C_n$, qui en fait un anneau commutatif (on fait la convention que G_0 est réduit à l'élément neutre).

B) Caractères cuspidaux : un caractère irréductible de G_n est dit *cuspidal* s'il n'est un composant d'aucun caractère de la forme $\alpha_1 \circ \alpha_2$. Par récurrence sur n , on montre aussitôt que tout caractère irréductible est composant d'un caractère de la forme $\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_r$ où α_i est un caractère cuspidal de G_{n_i} pour $1 \leq i \leq r$, et $n = n_1 + \dots + n_r$. Il y a donc deux problèmes à résoudre : la *construction* de caractères cuspidaux et la *décomposition* des caractères $\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_r$ comme ci-dessus.

Green [23] a montré que les caractères cuspidaux de G_n sont paramétrés par les caractères Λ de $k_n^\times$ tels que $\Lambda, \Lambda^q, \dots, \Lambda^{q^{n-1}}$ soient distincts. Pour construire un tel caractère $\pi(\Lambda)$ de G_n , il donne la table de ses valeurs, en généralisant la formule (2), puis utilise les théorèmes de Brauer pour vérifier qu'on a bien un caractère.

Une autre méthode a été introduite pour $n = 2$ par Drinfeld, qui a ouvert la voie à Deligne et Lusztig pour leurs R_T^ϑ . Tout d'abord, on a l'identité polynomiale

(4) $$\prod_c (c_1X_1 + \dots + c_nX_n) = \Delta_n^{q-1} \ ;$$

dans le membre de gauche, c parcourt l'ensemble des vecteurs non nuls $(c_1,\dots,c_n)$ dans k^n et dans le membre de droite Δ_n est le déterminant de la matrice d'éléments $X_i^{q^{j-1}}$ (pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$). Par exemple, on a $\Delta_2 = X_1X_2^q - X_1^qX_2$. Soit V la variété algébrique définie par l'équation $\Delta_n^{q-1} = 1$, avec les composantes irréductibles $V_a = \{\Delta_n = a\}$, où a parcourt $k^\times$. On considère la transformation de Frobenius F dans $\mathbb{F}^n$ qui transforme $(x_1,\dots,x_n)$ en $(x_1^q,\dots,x_n^q)$ et l'on fait agir linéairement le groupe $G_n \times k_n^\times$ par

(5) $$(g,t)x = (t\sum_i g_{1i}x_i,\dots,t\sum_i g_{ni}x_i) \ .$$

Il est immédiat que V est stable par les opérations F et (g,t) ; de plus pour tout entier $m \geq 1$, l'équation $(g,t)F^m x = x$ a un nombre fini $N_m(g,t)$ de solutions dans V . On peut montrer que la série génératrice $\sum_{m\geq 1} N_m(g,t)U^m$ représente une fraction rationnelle de U , régulière à l'infini, dont on note $\Theta(g,t)$ la valeur pour $U = \infty$.

Il résulte de la *formule des points fixes* de Lefschetz que Θ est un caractère du groupe $G_n \times k_n^\times$. Décomposons-le suivant les caractères de $k_n^\times$ sous la forme

(6) $$\Theta(g,t) = \sum_{\Lambda} \pi(\Lambda)(g)\Lambda(t) \ ,$$

de sorte que chaque $\pi(\Lambda)$ est un caractère de G_n . On a $\Theta(g,t^q) = \Theta(g,t)$ d'où $\pi(\Lambda^q) = \pi(\Lambda)$. Lorsque les caractères $\Lambda, \Lambda^q, \ldots, \Lambda^{q^{n-1}}$ sont distincts, le caractère $\pi(\Lambda)$ de G_n est, au signe près, irréductible.

C) Paramétrisation des caractères : pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n le groupe des caractères de $k_n^\times$. Lorsque m divise n , on a $k_m^\times \subset k_n^\times$ et l'application de norme $N_{m,n} : k_n^\times \longrightarrow k_m^\times$ est surjective ; l'application $\alpha \longmapsto \alpha \circ N_{m,n}$ de X_m dans X_n est donc injective. Si l'on note X la limite inductive des groupes X_n par rapport à ces homomorphismes, X_n s'identifie au sous-groupe de X défini par l'équation $\xi^{q^n} = \xi$. On peut introduire l'automorphisme de Frobenius $F : \xi \longmapsto \xi^q$ de X , et X_n est l'ensemble des points fixes de F^n dans X .

Pour tout entier $n \geq 1$, on note Θ_n la partie de $\mathfrak{S}_n \times X^n$ formée des suites $(w,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ telles que $\xi_{w(i)} = F(\xi_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. On fait opérer (à droite) le groupe $\mathfrak{S}_n$ sur Θ_n par la règle

(6) $$(w,\xi_1,\ldots,\xi_n)^{w'} = (w'^{-1}ww',\xi_{w'(1)},\ldots,\xi_{w'(n)}) \ .$$

On peut alors associer à tout élément $\vartheta = (w,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ de Θ_n un caractère $\Pi(\vartheta) = \Pi(w,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ de G_n de manière à satisfaire aux règles suivantes :

a) pour ϑ,ϑ' dans Θ_n , on a $\Pi(\vartheta) = \Pi(\vartheta')$ si et seulement si ϑ et ϑ' appartiennent à la même orbite de $\mathfrak{S}_n$ dans Θ_n ;

b) on a

(7) $$\Pi(w,\xi_1,\ldots,\xi_n) \circ \Pi(w',\eta_1,\ldots,\eta_m) = \Pi(w'',\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta_1,\ldots,\eta_m)$$

où la permutation w'' est définie par

(8) $$w''(1) = w(1),\ldots,w''(n) = w(n), w''(n+1) = n+w'(1),\ldots,w''(n+m) = n+w'(m) \ ;$$

c) pour tout caractère Λ de $k_n^\times$, on a

(9) $$\pi(\Lambda) = \Pi(c_n,\Lambda,F\Lambda,\ldots,F^{n-1}\Lambda) \ ,$$

où c_n est la permutation circulaire $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n \longrightarrow 1$.

D) Décomposition des caractères : fixons un entier $m \geq 1$ divisant n, et un caractère Λ de $k_m^\times$; posons $r = n/m$. Soient s une permutation des entiers $1,2,\ldots,r$ et $r_1,\ldots,r_k$ les longueurs des cycles de s. On note N_i la norme de k_{mr_i} à k_m et l'on pose

(10) $$\sigma_0(s,\Lambda) = \pi(\Lambda \circ N_1) \circ \cdots \circ \pi(\Lambda \circ N_k) .$$

Introduisons les caractères irréductibles φ de $\mathfrak{S}_r$; en posant

(11) $$\sigma(\varphi,\Lambda) = \frac{1}{r!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_r} \varphi(s)\sigma_0(s,\Lambda) ,$$

on définit des caractères irréductibles de G_n, et l'on a la formule de décomposition

(12) $$\sigma_0(s,\Lambda) = \sum_{\varphi} \varphi(s^{-1})\sigma(\varphi,\Lambda)$$

(les coefficients $\varphi(s^{-1})$ sont entiers). Les caractères de G_n de la forme $\sigma_0(s,\Lambda)$ sont aussi les caractères de la forme $\Pi(w,F^{i(1)}(\Lambda),\ldots,F^{i(n)}(\Lambda))$.

Avec les définitions précédentes, on obtient tous les caractères irréductibles de G_n sous la forme

(13) $$\sigma(\varphi_1,\Lambda_1) \circ \cdots \circ \sigma(\varphi_s,\Lambda_s)$$

où aucun Λ_i n'est égal à $F^t(\Lambda_j)$ pour $j \neq i$.

1.4. On sait que les caractères du groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$ sont paramétrés par les partitions de l'entier r ; de plus, la classe de conjugaison d'un élément g de G_n se décrit en donnant les valeurs propres distinctes $x_1,\ldots,x_s$ de g dans $\mathbb{F}$, et, pour chacune de ces valeurs propres, les diviseurs élémentaires $(t-x_i)^{r(i,1)},\ldots,(t-x_i)^{r(i,k_i)}$, où $r(i,1),\ldots,r(i,k_i)$ est une partition de la multiplicité r_i de x_i. De plus, si x est une valeur propre, il en est de même de x^q, avec conservation de la multiplicité r et de la partition donnée par les diviseurs élémentaires. D'après les résultats de Green rappelés en 1.3, on peut donc mettre en correspondance bijective classes de conjugaison et caractères de G_n au moyen d'un isomorphisme de $\mathbb{F}^\times$ sur le groupe de caractères X (noter que ces deux groupes sont isomorphes à $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}_{(p)}$ se compose des nombres rationnels a/b avec b premier à la caractéristique p de $\mathbb{F}$).

Il est tentant d'appeler *unipotents* les caractères irréductibles de G_n qui correspondent aux classes d'éléments unipotents. Posant $R_w = \Pi(w,1,\ldots,1)$ pour w dans $\mathfrak{S}_n$, on voit que les caractères unipotents de G_n sont les caractères irréductibles intervenant dans un des R_w. Posons aussi

(14) $$R_\varphi^* = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \varphi(w) R_w$$

pour tout caractère irréductible φ de $\mathfrak{S}_n$. On a les résultats suivants :

a) *les caractères unipotents de* G_n *sont les* R_φ^* ;

b) *si* B_n *désigne le groupe des matrices triangulaires supérieures dans* G_n, *alors* R_1 *est le caractère induit de* B_n *à* G_n *par* 1 *(noté* $1_{B_n}^{G_n}$ *)* ;

c) *les caractères irréductibles de* G_n *intervenant dans* R_1 *(la "série principale") sont indexés sous la forme* S_φ *par les caractères irréductibles de* $\mathfrak{S}_n$;

d) *on a* $R_\varphi^* = S_\varphi$ *pour tout* φ .

Nous allons généraliser aux autres groupes de Chevalley la définition des R_w . Les propriétés b) et c) restent vraies, mais non a) et d) (contrairement à une affirmation célèbre de Gelfand : "Pour les autres groupes, le résultat est le même, mais la démonstration est différente").

2. RAPPELS SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES

2.1. On considère dans la suite un *groupe algébrique affine* G *sur le corps algébriquement clos* $\mathbb{F}$, et un endomorphisme F de G . On suppose que F est un *endomorphisme de Frobenius* : il existe des entiers strictement positifs a,b,n et un isomorphisme i de G sur un sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{F})$ avec la propriété $i(F^a g) = F_0^b i(g)$, où g parcourt G et où F_0 est l'endomorphisme $(g_{jk}) \mapsto (g_{jk}^q)$ de $GL_n(\mathbb{F})$.

Rappelons quelques propriétés de base :

a) *l'application* F *est un automorphisme du groupe "abstrait"* G , *mais son inverse n'est pas un homomorphisme de groupes algébriques* ;

b) *pour tout entier* $m \geq 1$, *le groupe* G^{F^m} *des points fixes de* F^m *est fini* (en particulier G^F est fini) ;

c) *on a* $G = \bigcup_{m\geq 1} G^{F^m}$;

d) *l'application* $g \mapsto g^{-1}.F(g)$ *de* G *dans* G *est surjective* ("théorème de Lang").

2.2. On suppose désormais que G est *réductif et connexe*. Il existe alors un tore maximal T de G , et un sous-groupe de Borel B contenant T , *tous deux stables par* F . On note X(T) le groupe des homomorphismes de groupes algébriques de T dans $\mathbb{F}^\times$; c'est un $\mathbb{Z}$-module libre, dont le dual sera noté Y(T) . Soit aussi W (ou W(T)) le groupe N/T , où $N = N_G(T)$ est le normalisateur de T dans G . Il opère dans X(T) et Y(T) . On note Φ l'ensemble des racines ; c'est une partie de X(T) . On définit aussi une bijection $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ de Φ sur une partie $\Phi^\vee$ de Y(T) ; on a $\langle\alpha^\vee,\alpha\rangle = 2$ pour tout α , et les réflexions contenues dans W sont de la forme $s_\alpha : x \mapsto x - \langle\alpha^\vee,x\rangle . \alpha$. De plus, B détermine une *base* Δ de Φ (au sens de Bourbaki [2]), donc un système générateur $S = (s_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ de W pour lequel (W,S) est un *groupe de Coxeter*. On note Φ^+ (resp. Φ^-) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) par rapport à Δ .

Comme T et B sont stables par F , on définit une action naturelle de F sur les groupes $X(T)$, $Y(T)$ et W . Si α est une racine, $F(s_\alpha)$ est une réflexion dans W , donc $F(\alpha)$ est multiple (entier) d'une racine $\bar{F}(\alpha)$ qui est simple, ou positive, ou négative, en même temps que α . On peut considérer $X(T)$ comme un réseau dans un espace vectoriel réel $X_{\mathbb{R}}(T)$ de dimension finie. Supposons d'abord que G soit *quasi-simple*, donc que le groupe de Coxeter (W,S) possède un graphe de Dynkin connexe. Il existe un nombre réel $q_0 > 0$ et un automorphisme F_0 de $X_{\mathbb{R}}(T)$ d'ordre fini c , tels que $F = q_0F_0$; en général, q_0 est une puissance de la caractéristique p de $\mathbb{F}$, les cas exceptionnels étant fournis par les groupes de Suzuki et Ree (où $p = 2$ ou 3 , et $q_0 = p^{m+1/2}$ avec $m \geq 0$ entier). Soient V l'espace des points fixes de F_0 et ϑ le projecteur $(1+F_0+\ldots+F_0^{c-1})/c$ de $X_{\mathbb{R}}(T)$ sur V ; on note Ψ l'ensemble des éléments de $\vartheta(\Phi)$ qui ne sont pas de la forme $u\,.\,\vartheta(\alpha)$ avec $u > 1$ et $\alpha \in \Phi$. Alors Ψ est un système de racines dans V , dont le groupe de Weyl associé est l'ensemble W^F des points fixes de F dans W . Lorsque G est *semi-simple*, on définit encore Ψ en décomposant au préalable Φ en systèmes de racines irréductibles.

2.3. Les sous-groupes B et N de G forment un *système de Tits* (ou BN-paire), et satisfont donc aux axiomes donnés par Bourbaki [2, page 22] ou Carter [5, page 22]. De même, les sous-groupes $B^F = B \cap G^F$ et $N^F = N \cap G^F$ de G^F forment un système de Tits dans le groupe fini G^F .

2.4. Pour certains résultats, on doit exclure (au moins provisoirement) quelques cas exceptionnels. On dit que p est mauvais dans les cas suivants[1] :

- $p = 2$ et G n'est pas de type A_ℓ ,
- $p = 3$ et G est de l'un des types G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8 ,
- $p = 5$ et G est de type E_8 .

Dans les autres cas, on dit que p est *bon*. Si l'on exclut en plus le cas où G est de type A_ℓ et où p divise $\ell+1$, on dit que p est *très bon*.

3. LES CARACTÈRES DE DELIGNE - LUSZTIG

3.1. A chaque racine α est associé un sous-groupe U_α de G , de dimension 1 . Soit J une partie de Δ ; on lui associe les sous-groupes suivants de G :

- L_J est engendré par T et $U_\alpha \cup U_{-\alpha}$ pour α dans J ,
- U_J est engendré par les U_α où α est positive et *n'est pas* combinaison linéaire des éléments de J ,

---

[1] On utilise la nomenclature traditionnelle des groupes de Lie simples en A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ, E_ℓ, F_4, G_2 .

- P_J est le produit semi-direct $L_J . U_J$.

Dans la suite de ce n°, on écrit simplement L , U et P .

Choisissons (s'il existe) un élément ω de N tel que $\omega F(L)\omega^{-1} = L$, et notons w l'image de ω dans $W = N/T$; alors wF applique tout élément de J sur un multiple d'un élément de J . La variété de Lusztig $S_{L,\omega}$ se compose des x dans G tels que $x^{-1}F(x)$ appartienne à $U\omega F(U)$. L'endomorphisme $g \longmapsto \omega F(g)\omega^{-1}$ de L est un endomorphisme de Frobenius qu'on note ωF , et dont l'ensemble des points fixes est un sous-groupe fini $L^{\omega F}$ de L . On fait opérer sur la variété $S_{L,\omega}$ le groupe G^F par translations à gauche et $L^{\omega F}$ par translations à droite. Par suite, pour tout entier $i \geq 0$, le groupe de cohomologie étale à supports propres[(1)] $H^i_c(S_{L,\omega},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ est un *bimodule* sur $G^F \times L^{\omega F}$. Si A et B sont deux anneaux, on associe à tout (A,B)-bimodule P un foncteur $N \Longrightarrow P \otimes_B N$ de la catégorie des B-modules à gauche vers celle des A-modules. On définit donc des foncteurs $R^{G,i}_{L,\omega}$ qui à toute représentation V de $L^{\omega F}$ associent des représentations de G^F . On pose, dans le groupe de Grothendieck $R(G^F)$,

(15) $$R^G_{L,\omega}V = \sum_{i\geq 0} (-1)^i R^{G,i}_{L,\omega}V .$$

L'opération $R^G_{L,\omega}$ s'appelle l'*induction de Deligne - Lusztig* ; elle ne dépend que de w et peut se noter $R^G_{L,w}$.

3.2. Voici quelques cas particuliers :

a) Supposons que L soit stable par F et prenons $\omega = 1$. On a $S_{L,1} = G^F U$ et $R^G_{L,1}$ est l'*induction de Harish-Chandra* ; autrement dit, si V est l'espace d'une représentation de L^F , on étend cette représentation à $P^F = L^F U^F$ en faisant agir U^F par l'identité sur V , puis on induit de P^F à G^F au sens usuel de Frobenius.

b) Supposons que J soit vide, d'où $L = T$ et $P = B$. Si ϑ est un caractère du groupe commutatif T^{wF} , on obtient un caractère de G^F , noté R^ϑ_w .

c) Plus particulièrement, si l'on a à la fois $J = \emptyset$ et $w = 1$, on obtient les caractères R^ϑ_1 de la *série principale*, obtenus en induisant de P^F à G^F les caractères[(2)] $tu \longmapsto \vartheta(t)$ (pour $t \in T^F$, $u \in U^F$).

3.3. Il est commode d'exprimer les définitions précédentes au moyen des *nombres de Lefschetz*. Soient S une variété algébrique sur le corps $\mathbb{F}$ et Γ un groupe fini agissant sur S ; on définit un caractère (virtuel) $\mathcal{L}_S$ de Γ par la formule

(1) On note $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques ; on suppose $\ell \neq p$.

(2) Ici, nous interprétons un caractère de T^F comme un homomorphisme de T^F dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et non dans $\mathbb{C}^\times$!

(16) $$\mathcal{L}_S(\gamma) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \operatorname{Tr}(\gamma | H^i_c(S, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)) .$$

Soit F une transformation de Frobenius dans S, qui commute à l'action de Γ. Si F' est une transformation de Frobenius de S, la *formule des points fixes de Lefschetz-Grothendieck* s'écrit

(17) $$|S^{F'}| = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \operatorname{Tr}(F' | H^i_c(S, \bar{\mathbb{Q}}_\ell))$$

(on note $S^{F'}$ l'ensemble des points fixes de F' dans S, et $|A|$ le cardinal d'un ensemble fini A).

Soit γ dans Γ ; on définit la série génératrice

(18) $$\mathcal{L}_S(\gamma; t) = \sum_{m\geq 1} N_m(\gamma) t^m ,$$

où $N_m(\gamma)$ est le nombre des points fixes de γF^m dans S. Comme γF^m est, pour tout entier $m \geq 1$, une transformation de Frobenius, on déduit de la formule (17) la relation

(19) $$\mathcal{L}_S(\gamma; t^{-1}) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \operatorname{Tr}(\gamma F(t-F)^{-1} | H^i_c(S, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)) .$$

De là, il résulte que $-\mathcal{L}_S(\gamma ; t^{-1})$ *est une fraction rationnelle de* t, *dont la valeur en* $t = 0$ *est le nombre de Lefschetz* $\mathcal{L}_S(\gamma)$; en particulier, ce nombre ne dépend pas de ℓ.

La formule suivante exprime la relation avec les fonctions L d'Artin, notées $L(t,\chi)$, correspondant aux caractères irréductibles χ de Γ :

(20) $$\mathcal{L}_S(\gamma; t) = \sum_{\chi} \chi(\gamma) t \frac{d}{dt} \log L(t,\chi) .$$

Appliquons ce qui précède aux caractères R^ϑ_w de G^F. On considère la variété $Y_\omega = S_{T,\omega}$ formée des éléments x de G tels que $x^{-1}F(x)$ appartienne à $U\omega U$ (où U désigne le radical unipotent de B). On fait agir $\Gamma = G^F \times T^{wF}$ sur $S = Y_\omega$ par

(21) $$(g,s)y = gys^{-1} ;$$

le nombre de Lefschetz correspondant est donné par

(22) $$\mathcal{L}_{Y_\omega}(g,s) = \sum_{\vartheta} R^\vartheta_w(g)\vartheta(s) \qquad (g \in G^F , \quad s \in T^{wF}) ,$$

où ϑ parcourt les caractères du groupe fini commutatif T^{wF}.

3.4. En général, les caractères R^ϑ_w sont, au signe près, irréductibles. Pour étudier leur décomposition dans les cas dégénérés, on introduit

- un isomorphisme ι de X avec $\mathbb{F}^\times$,
- un groupe G^* en dualité avec G.

Autrement dit, G^* est un groupe algébrique, réductif, connexe, sur le corps $\mathbb{F}$, muni d'un endomorphisme de Frobenius F^*, d'un tore maximal T^* et d'un sous-groupe de Borel B^* contenant T^*. On suppose que T^* et B^* sont stables par F^*. On introduit $X(T^*)$, $Y(T^*)$, W^*, Φ^*, $\Phi^{*\vee}$, Δ^* en analogie avec le cas de G, et l'on se donne un isomorphisme λ de $X(T)$ sur $Y(T^*)$, qui applique Φ sur $\Phi^{*\vee}$ et satisfait à la règle $\lambda(Fu) = F^*.\lambda(u)$ pour $u \in X(T)$. Alors λ définit des isomorphismes de $Y(T)$ sur $X(T^*)$, de $\Phi^\vee$ sur Φ^*, de W sur W^*. On identifie W à W^* au moyen de λ.

Indiquons comment *identifier le groupe des caractères de* T^F *à l'ensemble des points fixes de* F *dans* $X(T) \otimes X$. Pour cela, on choisit deux entiers $r \geq 1$ et $s \geq 1$ tels que $F^r(t) = t^{q^s}$ pour tout $t \in T$. Soit ϑ un caractère de T^F et soit $T(s)$ le sous-groupe de T formé des éléments t tels que $t^{q^s} = t$; on définit un homomorphisme $N : T(s) \longrightarrow T^F$ par $N(t) = \prod_{i=0}^{r-1} F^i(t)$, d'où un caractère $\vartheta' = \vartheta \circ N$ de $T(s)$. Mais le groupe des caractères de $T(s)$ s'identifie à $X(T) \otimes X_s$: à $u \otimes v$ correspond $v \circ u_s$ où $u_s : T(s) \longrightarrow k_s^\times$ est la restriction à $T(s)$ de l'homomorphisme $u : T \longrightarrow \mathbb{F}^\times$. L'élément de $X(T) \otimes X$ ainsi obtenu à partir de ϑ' ne dépend pas du choix de r et s.

Dans ce qui précède, on peut remplacer F par wF ; ayant choisi ι et λ, on obtient un isomorphisme $\lambda \otimes \iota$ de $X(T) \otimes X$ sur $Y(T^*) \otimes \mathbb{F}^\times$ et ce dernier groupe est canoniquement isomorphe à T^*. En conclusion, on a défini *un isomorphisme du groupe des caractères de* T^{wF} *avec le groupe* T^{*wF^*}.

3.5. On peut maintenant décomposer en sous-familles l'ensemble des caractères irréductibles de G^F. Soit s^* un élément *semi-simple* de G^{*F^*}. Il existe des éléments t^* de T^* et w de W tels que t^* soit conjugué à s^* et $wF^*(t^*) = t^*$; comme t^* appartient à T^{*wF^*}, il lui correspond un caractère ϑ de T^{wF}. On note $E(G^F,s^*)$ l'ensemble des caractères irréductibles qui interviennent dans l'un au moins des caractères de Deligne-Lusztig R_w^ϑ pour tous les choix possibles de t^* et w.

On a alors le résultat suivant :

a) *Soient* s^* *et* s'^* *deux éléments semi-simples de* G^{*F^*}. *Si* s^* *et* s'^* *sont conjugués dans* G^{*F^*}, *les ensembles* $E(G^F,s^*)$ *et* $E(G^F,s'^*)$ *sont égaux ; sinon, ils sont disjoints.*

b) *Tout caractère irréductible de* G^F *appartient à l'un des ensembles* $E(G^F,s^*)$.

c) *Supposons* s^* *régulier* (son centralisateur dans G^* est un tore maximal). *Alors* $E(G^F,s^*)$ *contient un seul élément.*

3.6. Spécialisons la théorie au cas $G = GL_n(\mathbb{F})$, avec l'endomorphisme de Frobenius donné par $Fg = (g_{ij}^q)$ pour $g = (g_{ij})$. Pour T (resp. B), on prend le groupe des matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures). Le groupe W s'identifie à $\mathfrak{S}_n$. Le $\mathbb{Z}$-module $X(T)$ possède la base $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_r(t) = t_{rr}$

pour $t = (t_{ij})$; soit $(\varepsilon_1^*,\dots,\varepsilon_n^*)$ la base duale de $Y(T) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T),\mathbb{Z})$. Alors Φ se compose des $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ et l'on a $(\varepsilon_i - \varepsilon_j)^\vee = \varepsilon_i^* - \varepsilon_j^*$; de plus, Δ se compose des racines $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ pour $1 \le i \le n-1$.

On peut mettre G en dualité avec lui-même, de sorte qu'on ait $G^* = G$, $T^* = T$, $B^* = B$ et que l'isomorphisme λ de $X(T)$ sur $Y(T^*) = Y(T)$ applique ε_i sur ε_i^* pour $1 \le i \le n$.

Fixons w dans W et un caractère ϑ de T^{wF} . D'après le n° 3.4, ϑ s'identifie à un élément de $X(T) \otimes X$ invariant par wF . Si l'on pose $\vartheta = \varepsilon_1 \otimes \xi_1 + \dots + \varepsilon_n \otimes \xi_n$, on a $\xi_{w(i)} = F\xi_i$ pour $1 \le i \le n$ et le caractère R_w^ϑ de $G^F = GL_n(k)$ coïncide avec celui qu'on a noté $\Pi(w,\xi_1,\dots,\xi_n)$ au n° 1.3, C).

Choisissons un isomorphisme ι de X sur $\mathbb{F}^\times$. Notons $C \mapsto \chi(C)$ la bijection définie au n° 1.4 entre classes de conjugaison dans G^F et caractères irréductibles de G^F . Soit s^* un élément semi-simple de G^F ; pour tout élément unipotent u^* de G^F commutant à s^* , soit $C(u^*)$ la classe de conjugaison de s^*u^* . Alors $\bigcup_{u^*} C(u^*)$ *se compose des éléments de* G^F *ayant mêmes valeurs propres que* s^* . *De plus,* $E(G^F,s^*)$ *se compose des caractères de la forme* $\chi(C(u^*))$.

4. DÉCOMPOSITION DE JORDAN DES CARACTÈRES

4.1. Par définition, un *caractère de* G^F *est unipotent*(1) *s'il appartient à* $E(G^F,1^*)$ *où* 1^* *est l'élément unité de* G^* .

Comme le groupe de Borel B est égal à son normalisateur dans G , l'espace homogène G/B s'identifie par(2) $gB \mapsto {}^gB$ à l'ensemble $\mathcal{B}$ des sous-groupes de Borel ; on peut donc considérer $\mathcal{B}$ comme variété algébrique munie d'un endomorphisme de Frobenius F provenant de celui de G . On sait que G possède un nombre fini d'orbites dans $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$, indexées sous la forme $(C(w))_{w\in W}$: cette orbite se compose des paires $({}^gB, {}^{g'}B)$ avec $g^{-1}g' \in BwB$. On définit une partition $\mathcal{B} = \coprod_{w\in W} X(w)$, en sous-variétés localement fermées stables par G^F , par la relation

$$B \in X(w) \Longleftrightarrow (B,F(B)) \in C(w) .$$

Soit $w \in W$; on écrit R_w pour R_w^1 , où 1 est le caractère unité de T^{wF} . Avec les notations de 3.3, le caractère R_w de G^F est égal au nombre de Lefschetz

$$R_w(g) = \mathcal{L}_{X(w)}(g) \quad \text{pour } g \in G^F . \tag{23}$$

Alors les caractères unipotents sont les caractères irréductibles qui interviennent dans l'un des R_w . Notons que $X(1) = G^F/B^F$ est fini, donc R_1 est la représentation $1_{B^F}^{G^F}$.

(1) Dans le cas $G^F = GL_n(k)$, cette définition coïncide avec la convention faite au n° 1.4.

(2) On écrit ${}^gH$ pour gHg^{-1} lorsque H est un sous-groupe de G .

4.2. Dans un groupe algébrique G , on a la *décomposition de Jordan* : tout élément g se décompose de manière unique sous la forme su , où s est semi-simple, u est unipotent et $su = us$. Pour déterminer les classes de conjugaison dans G^F , il suffit de déterminer les classes de conjugaison semi-simples, puis pour chaque élément semi-simple s dans G^F , déterminer les classes de conjugaison unipotentes dans C^F , où $C = Z_G^o(s)$ est la composante neutre du centralisateur $Z_G(s)$ de s dans G .

De manière analogue, on a $\mathcal{E}(G^F) = \coprod_{s^*} \mathcal{E}(G^F, s^*)$, où s^* parcourt les classes de conjugaison semi-simples dans G^{*F^*} , et où $\mathcal{E}(G^F)$ est l'ensemble des caractères irréductibles de G^F . On va associer à s^* un groupe auxiliaire dont les caractères unipotents correspondent aux éléments de $\mathcal{E}(G^F, s^*)$.

On suppose désormais que le centre Z *de* G *est un schéma réduit et connexe ;* il revient au même de supposer que le groupe $X(T)/Q(\Phi)$ est sans torsion, où $Q(\Phi)$ est le sous-groupe de $X(T)$ engendré par Φ . Le sous-groupe $Z_G(s^*)$ est alors réductif, connexe et stable par F^* ; il existe un groupe algébrique $G(s^*)$ réductif, connexe, à centre connexe, muni d'un endomorphisme de Frobenius F_1 en dualité avec $Z_G(s^*)$. *En général,* $G(s^*)$ *ne s'identifie pas à un sous-groupe de* G .

Posons pour abréger $G_1 = G(s^*)$, $G_1^* = Z_G(s^*)$. Choisissons T_1, B_1 stables par F_1 dans G_1 , et T_1^*, B_1^* de manière analogue dans G_1^* . Alors T_1^* est un tore maximal dans G_1^* , stable par F^* et contenant s^* . Il existe un élément h de G_1^* tel que $hT_1^*h^{-1} = T^*$. Introduisons le normalisateur N_1^* de T_1^* dans G_1^* et le groupe de Weyl $W_1 = N_1^*/T_1^*$. L'automorphisme intérieur associé à h définit un isomorphisme $w_1 \mapsto \bar{w}_1$ de W_1 sur un sous-groupe de W . Posons $t^* = hs^*h^{-1}$ et $\omega = F(h) \, . \, h^{-1}$; alors ω appartient à N^* et définit un élément w de W . Pour tout w_1 dans W_1 , posons $\bar{R}_{w_1} = R^{\vartheta}_{\bar{w}_1 w}$, où ϑ est le caractère de $T^{\bar{w}_1 wF}$ correspondant à s^* . Alors $\mathcal{E}(G_1^{F_1}, 1^*)$ (resp. $\mathcal{E}(G^F, s^*)$) se compose des caractères irréductibles obtenus par décomposition des R_{w_1} (resp. $\bar{R}_{w_1}$).

Le théorème fondamental de Lusztig [17] affirme que l'*on peut définir une bijection* $\chi \mapsto \bar{\chi}$ *de* $\mathcal{E}(G_1^{F_1}, 1^*)$ *sur* $\mathcal{E}(G^F, s^*)$ *avec la propriété suivante : la multiplicité de* χ *dans* R_{w_1} *est égale à celle de* $\bar{\chi}$ *dans* $\bar{R}_{w_1}$.

La définition de cette bijection se fait cas par cas, au moyen de la connaissance extraordinairement détaillée que Lusztig a acquise des caractères unipotents (voir les 100 pages de tables dans le livre de Carter [5]). Nous en retracerons quelques étapes.

5. CONSTRUCTION DES CARACTÈRES UNIPOTENTS

5.1. On a supposé que le centre Z du groupe G était réduit et connexe. Or on ne change pas les classes de conjugaison unipotentes, ni les caractères unipotents en remplaçant G par G/Z . Le groupe G/Z est produit de groupes simples permutés entre eux par F , et l'on peut se ramener au cas où G est *simple et adjoint* : le $\mathbb{Z}$-module $X(T)$ est engendré par Φ .

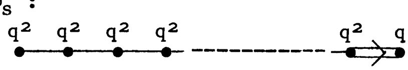
5.2. La série principale comprend les composants irréductibles de la représentation $R_1 = 1_{B^F}^{G^F}$. L'*algèbre de Hecke* $H(G^F, B^F) = H$ est par définition l'algèbre des endomorphismes du G^F-module R_1 . Comme G^F est muni d'un système de Tits (B^F, N^F) (*cf.* n° 2.3), les doubles classes de G^F modulo B^F sont paramétrées par le groupe W^F . Comme l'a montré Iwahori, l'algèbre H a une base $(T_w)_{w \in W^F}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) *on a* $T_w T_{w'} = T_{ww'}$ *si* $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$,

b) *pour toute réflexion* s *associée à une racine simple du système de racines, il existe une constante* $p_s > 0$ *entière telle que l'on ait*

$$(T_s + 1)(T_s - p_s) = 0 . \tag{24}$$

De plus, p_s *ne dépend que de la longueur de la racine associée à* s . Lorsque G est *déployé* pour F (c'est-à-dire qu'on a $F(t) = t^q$ pour t dans T), on a $W = W^F$ et $p_s = q$ pour tout s ; mais p_s n'est pas constant pour le groupe projectif unitaire $PU_{2n}(q^2)$ de type ${}^2A_{2n-1}$ dont le diagramme est décrit ci-dessous avec les poids p_s :



(n sommets) .

5.3. Définissons maintenant l'*algèbre générique* associée au groupe de Weyl W' d'un système de racines Φ' . Le choix d'une base Δ' de Φ' définit une partie génératrice S' de W' . L'algèbre $H(u)$ est définie sur l'anneau de base $A = \mathbb{Q}[u, u^{-1}]$ et possède une base $(T_w)_{w \in W'}$ satisfaisant aux conditions a) et b) ci-dessus avec $p_s = u^2$ pour tout $s \in S'$. Lorsque les racines sont de deux longueurs différentes, on introduit aussi l'algèbre $H(u,v)$ sur l'anneau de base $A = \mathbb{Q}[u, u^{-1}, v, v^{-1}]$ avec $p_s = u^2$ si s correspond à une racine courte et $p_s = v^2$ sinon.

Soient K une algèbre commutative sur $\mathbb{Q}$ et u_0 un élément inversible de K ; on définit de manière évidente la spécialisée $H(u_0)$ de $H(u)$ qui est une algèbre sur K . En particulier, $H(1)$ *est l'algèbre* KW' *du groupe* W' . D'après un théorème de Tits, si K est un corps de caractéristique 0 , toute spécialisée semi-simple $H(u_0)$ de $H(u)$ est isomorphe à l'algèbre de groupe KW' ; en particulier, on peut paramétrer les représentations irréductibles de $H(u_0)$ au moyen des caractères irréductibles de W' . Grâce à dix années d'effort de nombreuses personnes, dont Curtis, Iwahori, Kilmoyer, Hoefsmit et Lusztig, on peut expliciter cette correspondance. Tout d'abord, tout caractère irréductible φ de W' est défini par un $\mathbb{Q}W'$-module irréductible E_φ : d'après un critère classique, il suffit de vérifier que si le nombre premier r ne divise pas l'ordre de W' , tout élément w de W' est conjugué à w^r. On construit explicitement un module $E_{\varphi,u}$ sur l'anneau $H(u)$ qui est libre de rang fini sur $\mathbb{Q}[u,u^{-1}]$. Soit σ un homomorphisme de $A = \mathbb{Q}[u,u^{-1}]$ dans un corps K de caractéristique 0, et soit $u_0 = \sigma(u)$. Alors les *$H(u_0)$-modules irréductibles sont les modules de la forme $E_{\varphi,u_0} = E_{\varphi,u} \otimes_A K$; en particulier, $E_\varphi = E_{\varphi,1}$ est un KW'-module irréductible.*

On a des résultats analogues pour $H(u,v)$ et en particulier $H(u)$ apparaît comme la spécialisée $H(u,u)$ de $H(u,v)$.

5.4. Revenons à la *série principale*. Dans le *cas déployé*, $H(G^F,B^F)$ est la spécialisée $H(q^{1/2})$ de $H(u)$, et c'est une algèbre semi-simple. Soit V l'espace de la représentation R_1 de G^F. Sur V, on a à la fois une action de G^F et une action de $H(G^F,B^F)$ et elles commutent ; on peut alors décomposer canoniquement V sous la forme

$$V = \bigoplus_{\varphi} (V_\varphi \otimes E_{\varphi,q^{1/2}}) , \tag{25}$$

où φ parcourt l'ensemble des caractères irréductibles de W. Le groupe G^F agit uniquement sur les facteurs V_φ et $H(G^F,B^F)$ sur les facteurs $E_{\varphi,q^{1/2}}$. L'espace V_φ est le siège d'une représentation irréductible de G^F, dont on notera S_φ le caractère. Comme la dimension de $E_{\varphi,q^{1/2}}$ est égale à celle de $E_\varphi = E_{\varphi,1}$, on a décomposé le caractère R_1 de G^F sous la forme $\sum_\varphi \deg(\varphi) . S_\varphi$.

La dimension de V_φ, c'est-à-dire le degré de S_φ, se calcule au moyen du "degré générique" : celui-ci est l'élément $d_\varphi(u)$ de $\mathbb{Q}[u,u^{-1}]$ défini ainsi :

$$d_\varphi(u) = \deg(\varphi) \frac{\sum_{w\in W} u^{2\ell(w)}}{\sum_{w\in W} u^{-2\ell(w)} Q_{\varphi,w}(u) Q_{\varphi,w^{-1}}(u)} \tag{26}$$

$$Q_{\varphi,w}(u) = \mathrm{Tr}(T_w | E_{\varphi,u}) . \tag{27}$$

On a alors $\deg(S_\varphi) = d_\varphi(q^{1/2})$. On remarquera que l'on a $Q_{\varphi,w}(1) = \varphi(w)$ et donc $d_\varphi(1) = \deg(\varphi)$ en vertu de la relation $\sum_{w\in W} \varphi(w)\varphi(w^{-1}) = |W|$.

Dans le cas particulier $G = GL_n(\mathbb{F})$, $F(g) = (g_{ij}^q)$ déjà considéré, on a $W = \mathfrak{S}_n$ et les caractères φ de W sont indexés par les partitions de l'entier n. Si, par exemple, φ correspond à la partition $(d_1,\dots,d_m)$ de n avec $1 \le d_1 \le \dots \le d_m$ et $d_1 + \dots + d_m = n$, on a

$$d_\varphi(q^{1/2}) = q^{-\binom{m}{3}} \prod_{j=1}^{n} (q^j - 1) \prod_{i>j} (q^{e(i)} - q^{e(j)}) \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{e(j)} (q^k - 1)^{-1} \tag{28}$$

en posant $e(j) = d_j + j - 1$.

Le cas non déployé requiert peu de changements. On remplace le groupe W par le sous-groupe W^F et l'algèbre $H(G^F,B^F)$ est spécialisée d'une algèbre $H(u)$ ou $H(u,v)$: dans le cas de $H(u,v)$, on remplace $Q_{\varphi,w}(u)$ par un élément analogue $Q_{\varphi,w}(u,v)$ de $\mathbb{Q}[u,u^{-1},v,v^{-1}]$ et $u^{2\ell(w)}$ par $u^{2a}v^{2b}$, où a (resp. b)

est le nombre de racines courtes (resp. longues) intervenant dans une décomposition $w = s_1 \ldots s_r$ de longueur $r = \ell(w)$ minimale.

5.5. Pour la forme déployée de GL_n, tout caractère unipotent appartient à la série principale. Il n'en est pas de même en général : pour le groupe projectif symplectique $PSp_4(k)$, il y a 6 caractères unipotents et la série principale n'en comprend que 5 ; le caractère exceptionnel a été découvert par Srinivasan en 1968 et noté par elle ϑ_{10} (il est de degré $\frac{1}{2}q(q-1)^2$) .

Rappelons qu'un caractère irréductible de G^F est dit *cuspidal* s'il n'intervient dans aucun caractère de la forme $R^G_{L,1}\psi$, où L est de la forme L_J, avec $J \neq \Delta$ et $F(L) = L$, et où ψ est un caractère de L^F (*cf.* n° 3.1). Pour tout groupe L de la forme précédente, on appelle L-*série* l'ensemble $S(L)$ des caractères irréductibles de G^F obtenus par décomposition des caractères induits $R^G_{L,1}\psi$ où ψ est un caractère cuspidal unipotent de L^F. Si L et L' sont deux sous-groupes de ce type, les ensembles $S(L)$ et $S(L')$ sont égaux ou disjoints selon que L et L' sont conjugués par W ou non. Les diverses L-séries forment une partition de l'ensemble des caractères unipotents de G^F ; en particulier, la G-série se compose des caractères unipotents cuspidaux de G^F.

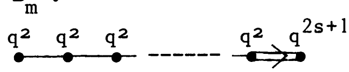
Pour un groupe classique, *il existe au plus un caractère unipotent cuspidal* ; on en trouve dans les groupes suivants

$$PU_{(s^2+s)/2}(q^2)\ ,\ PO_{2s^2+2s+1}(q^2)\ ,\ PSp_{2s^2+2s}(q)\ ,\ PO^+_{2s^2}(q)\ ,\ PO^-_{2s^2}(q)\ .$$

Pour les groupes exceptionnels (y compris ceux de Suzuki et Ree), la situation est plus complexe (voir [5, pages 457 à 465]) ; on trouve jusqu'à 13 caractères unipotents cuspidaux pour $E_8(q)$.

Il reste à décomposer les caractères induits $R^G_{L,1}\psi$. Notons V_ψ l'espace d'une représentation de G^F ayant ce caractère et A_ψ l'algèbre semi-simple formée des opérateurs dans V_ψ, qui commutent à l'action de G^F. Howlett et Lehrer ont étudié la structure des algèbres A_ψ ; on trouvera la théorie au chapitre 10 du livre de Carter [5], et une table explicite à la page 464. Il se trouve que les algèbres A_ψ considérées sont toutes des algèbres spécialisées d'une algèbre $H(u)$ ou $H(u,v)$ et l'on peut donc reprendre, en l'adaptant, la méthode utilisée pour la série principale au n° 5.4.

5.6. Illustrons ceci sur l'exemple du groupe unitaire $PU_n(q^2)$. Pour chaque entier $s \geq 1$ pour lequel $n - \frac{1}{2}(s^2+s)$ est un entier pair $2m$, il y a une L-série de caractères unipotents. Le groupe $L(s)^F$ correspondant est isomorphe à $PU_{(s^2+s)/2}(q^2)$, il possède un unique caractère unipotent cuspidal ψ_s et l'on a à décomposer $R^G_{L(s),1}\psi_s$. L'algèbre A_{ψ_s} est du type de Hecke $H(q^{2s+1}, q^2)$ pour le système de racines B_m :



.

Tous calculs faits, on trouve que les caractères unipotents de $PU_n(q^2)$ sont paramétrés par les partitions $(d_1,\dots,d_m)$ de l'entier n. Le degré d'un tel caractère s'obtient en changeant q en $-q$ dans le second membre de la formule (28), puis en changeant éventuellement le signe du tout pour avoir un degré positif.

6. CARACTÈRES ET DEGRÉS FANTÔMES [1]

6.1. On généralise ce qui est dit aux n^{os} 1.3 et 1.4 sur la paramétrisation des caractères de $GL_n(k)$ et la construction des caractères R^*_φ.

Les caractères R_w^ϑ de Deligne-Lusztig dépendent d'un élément w de W et d'un caractère ϑ de T^{wF}. Compte tenu de l'identification faite au n° 3.4, introduisons la partie Θ de $W \times (X(T) \otimes X)$ formée des couples (w,ϑ) tels que $wF\vartheta = \vartheta$; on fait opérer le groupe W sur Θ par la règle

$$w' \,.\, (w,\vartheta) = (w'wF(w')^{-1}, w'\vartheta) \,. \tag{29}$$

Les résultats fondamentaux de l'article de Deligne-Lusztig [22] se reformulent ainsi :

a) *Si* (w,ϑ) *et* (w',ϑ') *appartiennent à la même orbite de* W *dans* Θ, *les caractères* R_w^ϑ *et* $R_{w'}^{\vartheta'}$ *sont égaux.*

b) *Supposons que* ϑ *et* ϑ' *n'appartiennent pas à la même orbite de* W *dans* $X(T) \otimes X$. *Alors les caractères* R_w^ϑ *et* $R_{w'}^{\vartheta'}$ *sont disjoints ; autrement dit, ils n'ont aucun composant irréductible commun.*

c) *On a la relation*

$$\langle R_w^\vartheta, R_w^\vartheta \rangle_{G^F} = |W(w,\vartheta)| \tag{30}$$

où $W(w,\vartheta)$ *est le stabilisateur dans* W *du point* (w,ϑ) *de* Θ. Autrement dit, si l'on décompose R_w^ϑ en caractères irréductibles sous la forme $R_w^\vartheta = d_1\chi_1 + \dots + d_m\chi_m$, on a $d_1^2 + \dots + d_m^2 = |W(w,\vartheta)|$. En particulier, R_w^ϑ est irréductible au signe près si $W(w,\vartheta)$ est réduit à l'élément neutre.

6.2. Considérons W comme un groupe d'automorphismes de l'espace vectoriel réel $X_{\mathbb{R}}(T)$; de même, F agit sur $X_{\mathbb{R}}(T)$. On note $\tilde W$ le groupe engendré par W et F ; il se compose des automorphismes wF^i de $X_{\mathbb{R}}(T)$ et l'on a

$$wF^i \,.\, w'F^j = wF^i(w') \,.\, F^{i+j} \,. \tag{31}$$

On considérera des représentations linéaires de $\tilde W$ dont la restriction à W est irréductible. Une telle représentation $\tilde\pi$ est définie par une représentation irréductible π de W, équivalente à π^F (où $\pi^F(w) = \pi(F(w))$), et un opérateur $\tilde F$ dans l'espace de la représentation π tel que $\pi^F(w) = \tilde F\pi(w)\tilde F^{-1}$ pour tout $w \in W$. On a alors $\tilde\pi(wF^i) = \pi(w)\tilde F^i$. On se limitera au cas où l'on a $\tilde F^m = 1$ pour m assez grand ; lorsque π est donnée, $\tilde F$ est alors défini à la multipli-

[1] Dans cette partie, on suppose que G est à centre connexe.

cation près par une racine de l'unité.

6.3. Soit φ un caractère irréductible de W tel que $\varphi(w) = \varphi(F(w))$ pour tout $w \in W$. Alors φ est le caractère d'une représentation π de W que l'on peut prolonger en une représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{W}$, de caractère $\tilde{\varphi}$. On posera

(32) $$R^*_{\tilde{\varphi}} = |W|^{-1} \sum_{w\in W} \tilde{\varphi}(wF) R_w \, .$$

En général, la fonction $R^*_{\tilde{\varphi}}$ sur G^F n'est pas un caractère, à cause en particulier du dénominateur $|W|^{-1}$. Cependant, c'est un caractère dans deux cas particuliers :

a) Si φ est le caractère unité de W, prenons pour $\tilde{\varphi}$ le caractère unité de $\tilde{W}$. Alors $R^*_1 = |W|^{-1} \sum_{w\in W} R_w$ est le *caractère unité* de G^F.

b) Définissons le caractère ε de W par

(33) $$\varepsilon(w) = \det(w) = (-1)^{\ell(w)}$$

(où w est considéré comme transformation linéaire dans $X_{\mathbb{R}}(T)$).
Posons $\tilde{\varepsilon}(wF^i) = \varepsilon(w)$. Alors le caractère $R^*_{\varepsilon} = |W|^{-1} \sum_{w\in W} \varepsilon(w) R_w$ n'est autre que le *caractère de Steinberg de* G^F.

De la formule (30), on déduit les relations d'orthogonalité[1]

(34) $$|G^F|^{-1} \cdot \sum_{g\in G^F} \overline{R^*_{\tilde{\varphi}}(g)} R^*_{\tilde{\varphi}'}(g) = \delta_{\varphi\varphi'} \, .$$

6.4. Chaque élément de $X(T) \otimes X$ est fixé par une puissance assez grande de F et l'on peut donc étendre à $\tilde{W}$ l'action de W sur $X(T) \otimes X$. Soit s^* une classe de conjugaison semi-simple dans G^{*F^*} (*cf.* n° 3.5). Il lui correspond une orbite de W dans $X(T) \otimes X$ stable par F ; choisissons un élément ϑ de cette orbite. En remplaçant dans ce qui précède $\tilde{W}$ par le stabilisateur $\tilde{W}(\vartheta)$ de ϑ, on définit des fonctions centrales $R^*_{\tilde{\varphi},\vartheta}$ sur G^F. Mentionnons seulement les deux *caractères irréductibles*

(35) $$R^*_1(s^*) = |W(\vartheta)|^{-1} \sum_w R^{\vartheta}_w \, , \quad R^*_{\varepsilon}(s^*) = |W(\vartheta)|^{-1} \sum_w \varepsilon(w) R^{\vartheta}_w \, ;$$

on a noté $W(\vartheta)$ le stabilisateur de ϑ dans W, et la sommation porte sur les éléments w de W tels que $wF\vartheta = \vartheta$.

Le nombre des classes de conjugaison semi-simples dans G^{*F^*} est égal à $|Z^F|q^{\ell}$, où Z est le centre de G, et ℓ est la dimension de T/Z. Dans chaque famille $\mathcal{E}(G^F, s^*)$, on dispose des deux caractères $R^*_1(s^*)$ et $R^*_{\varepsilon}(s^*)$. La somme des $|Z^F|q^{\ell}$ caractères $R^*_{\varepsilon}(s^*)$ est le caractère de Gelfand-Graev Γ, in-

[1] Les valeurs des caractères étant des sommes de racines de l'unité, on peut les considérer, au choix, comme éléments de $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ ou de $\mathbb{C}$. Pour un tel nombre c, le complexe conjugué $\bar{c}$ est défini sans ambigüité.

duit de U^F à G^F par un caractère ψ de degré 1 , en "position générale". De manière analogue, on a une relation

$$\sum_{s^*} a(s^*)R_1(s^*) = |Z^F|q^{\ell}C \;, \tag{36}$$

où chaque $a(s^*)$ est égal à ± 1 , et où C est la fonction caractéristique de l'ensemble des éléments unipotents "réguliers".

6.5. Pour tous les caractères ϑ de T^{wF} , les caractères R_w^{ϑ} de G^F ont le même degré

$$\deg(R_w^{\vartheta}) = \det(w)\,|G^F|\,.\,|U^F|^{-1}\,.\,|T^{wF}|^{-1}\;. \tag{37}$$

Des propriétés de la décomposition de Bruhat, on déduit la relation

$$|G^F| = |U^F|\,.\,|T^F| \sum_{w\in W^F} q^{\ell(w)}\;. \tag{38}$$

De plus, on a

$$|T^F| = |\det(F-1|X_{\mathbb{R}}(T))|\;,\quad |T^{wF}| = |\det(wF-1|X_{\mathbb{R}}(T))|\;; \tag{39}$$

enfin, par définition des caractères $R^*_{\tilde\varphi}$, on a

$$\deg(R^*_{\tilde\varphi}) = |W|^{-1}\sum_{w\in W}\tilde\varphi(wF)\deg(R_w)\;. \tag{40}$$

Explicitons ces formules dans le *cas déployé*. On a alors $W^F = W$ et F agit par multiplication par q dans $X_{\mathbb{R}}(T)$; de plus, on a $\tilde W = W \times \langle F\rangle$, où $\langle F\rangle$ est le groupe cyclique infini engendré par F , et l'on étend tout caractère φ de W à $\tilde W$ par $\varphi(wF^i) = \varphi(w)$. Il existe deux polynômes $\tilde P_\varphi$ et P_φ tels que l'on ait

$$\deg(S_\varphi) = \tilde P_\varphi(q)\;,\quad \deg(R^*_\varphi) = P_\varphi(q)\;; \tag{41}$$

d'après les résultats du n° 5.4, on a

$$\tilde P_\varphi(u) = \deg(\varphi)\,\frac{\sum_{w\in W} u^{\ell(w)}}{\sum_{w\in W} u^{-\ell(w)}Q_{\varphi,w}(u^{1/2})Q_{\varphi,w^{-1}}(u^{1/2})}\;. \tag{42}$$

On a aussi

$$P_\varphi(u) = |W|^{-1}(1-u)^{\ell}\sum_{w\in W}u^{\ell(w)}\sum_{w\in W}\varphi(w)\det(1-uw)^{-1}\;. \tag{43}$$

Lorsque $G = GL_n(\mathbb{F})$, on a $S_\varphi = R^*_\varphi$ et l'on a obtenu tous les caractères unipotents. Dans le cas général, on dit que R^*_φ est le *fantôme* de S_φ . Le *degré fantôme* d'un caractère unipotent est défini ainsi

$$\deg^*(\chi) = \begin{cases} \deg(R^*_\varphi) & \text{si } \chi = S_\varphi \\ 0 & \text{sinon}\;. \end{cases} \tag{44}$$

Une des grandes réussites de Lusztig est l'élucidation des rapports entre le degré et le degré fantôme d'un caractère. Il faut pour cela étudier les représentations du groupe de Weyl en détail.

7. CARACTÈRES DU GROUPE DE WEYL ET "FAMILLES"

7.1. On suppose désormais que G est un groupe adjoint déployé par F. Soit U l'espace vectoriel réel $X_{\mathbb{R}}(T)$, de dimension ℓ. Le groupe W est un groupe de transformations linéaires dans U, engendré par des réflexions. On étend l'action de W à l'algèbre symétrique S construite sur U, graduée de la manière usuelle. On note aussi S^W la sous-algèbre des invariants de W dans S ; on sait [2] que S^W est une algèbre de polynômes engendrée par des éléments homogènes de degrés $d_1,\dots,d_\ell$. On sait aussi que S est un S^W-module libre engendré par des éléments homogènes. Soit J l'idéal de S engendré par les éléments de degré > 0 dans S^W. L'espace vectoriel gradué S/J s'identifie à $H^*(\mathcal{B};\mathbb{R})$, et cette algèbre de cohomologie se trouve ainsi munie d'une action de W. De là résultent les relations

(45) $$\sum_{w\in W} u^{\ell(w)} = \sum_{i\geq 0} \dim(S/J)^i\, u^i = \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1-u^{d_j}}{1-u} .$$

De la définition (43) du polynôme $P_\varphi(u)$ et d'une identité classique de Molien, on conclut que *le coefficient de* u^i *dans* $P_\varphi(u)$ *est égal à la multiplicité* $m_i(\varphi)$ *avec laquelle le caractère irréductible* φ *de* W *intervient dans le caractère de la représentation de* W *dans* $(S/J)^i$. On sait aussi que la représentation de W dans S/J est isomorphe à la représentation régulière de W, d'où la relation

(46) $$\deg(\varphi) = \sum_{i\geq 0} m_i(\varphi) = P_\varphi(1) .$$

7.2. Pour chaque caractère irréductible φ de W, on note $a(\varphi)$ le plus petit entier $i \geq 0$ tel que $m_i(\varphi) \neq 0$, et l'on pose $\gamma(\varphi) = m_{a(\varphi)}(\varphi)$. Alors $\gamma(\varphi)u^{a(\varphi)}$ est le monôme de plus bas degré dans $P_\varphi(u)$. De manière analogue, on note $\tilde{\gamma}(\varphi)u^{\tilde{a}(\varphi)}$ le monôme de plus bas degré dans $\tilde{P}_\varphi(u)$.

Par inspection, on peut constater que l'*on a toujours* $\tilde{a}(\varphi) \leq a(\varphi)$. On dit que le caractère φ est *spécial* si l'on a $\tilde{a}(\varphi) = a(\varphi)$. Dans ces conditions, on a $\gamma(\varphi) = 1$ et $\tilde{\gamma}(\varphi)^{-1}$ est un entier de la forme 2^m, $3!$, $4!$ ou $5!$. Donnons quelques exemples de caractères spéciaux.

a) Le caractère unité 1 est spécial avec $a(1) = 0$.

b) Le caractère ε défini par $\varepsilon(w) = \det(w)$ est spécial, et $a(\varepsilon)$ est égal au nombre $|\Phi^+|$ de racines positives.

c) On définit dans l'ensemble des caractères irréductibles de W une involution i de telle sorte qu'on ait $i(\varphi) = \varphi$ dans presque tous les cas. Pour les groupes simples, on a $i(\varphi) \neq \varphi$ lorsque W est de type E_7 et φ de degré 512 (2 caractères), ou lorsque W est de type E_8 et φ de degré 4096 (4 caractères).

Posons

(47) $$c(\varphi) = |\Phi^+| - \sum_s \varphi(s)/\varphi(1)$$

(somme étendue aux réflexions s de W) ; on *vérifie cas par cas* la formule

(48) $$P_{i(\varphi)}(u) = u^{c(\varphi)} P_\varphi(u^{-1}) \ .$$

De plus, si φ est spécial, le caractère $i(\varphi\varepsilon)$ (presque toujours égal à $\varphi\varepsilon$) est spécial.

d) Induction tronquée : soient I une partie de Δ , et W' le sous-groupe de W engendré par les réflexions correspondant aux éléments de I . Soit ψ un caractère irréductible de W' , avec $\gamma(\psi) = 1$, et soit ψ^W le caractère induit par ψ de W' à W . Pour tout caractère irréductible φ de W intervenant dans ψ^W , on a $a(\varphi) \geq a(\psi)$; il existe un caractère φ de W et un seul, noté $j_{W'}^W(\psi)$, tel que $a(\varphi) = a(\psi)$; de plus, $j_{W'}^W(\psi)$ intervient avec multiplicité 1 dans ψ^W . *Si* ψ *est spécial, alors* $j_{W'}^W(\psi)$ *est spécial*. En particulier, si l'on pose $\varepsilon'(w') = (-1)^{\ell(w')}$, le caractère ε' de W' est spécial, donc aussi le caractère $j_{W'}^W(\varepsilon')$ de W . Lorsque $W = \mathfrak{S}_n$, on obtient ainsi tous les caractères irréductibles de W , qui sont donc spéciaux.

7.3. Nous pouvons maintenant décrire la *décomposition des caractères* R_w *de* G^F . Tout d'abord, en notant $\hat{W}$ l'ensemble des caractères irréductibles de W , on a

(49) $$R_w = \sum_{\varphi\in\hat{W}} \varphi(w) R_\varphi^*$$

pour tout $w \in W$; les coefficients $\varphi(w)$ sont entiers.

Soit Σ l'ensemble des caractères spéciaux de W . On montre que Σ se compose des caractères $c \in \hat{W}$ tels que le caractère $|W| . R_c^* = \sum_{w\in W} c(w) R_w$ de G soit effectif (c'est-à-dire le caractère d'une représentation de G^F). Pour tout $c \in \Sigma$, soit $F(c)$ l'ensemble des caractères irréductibles de G^F qui interviennent dans $|W| . R_c^*$. On a le résultat suivant :

a) *La famille* $(F(c))_{c\in\Sigma}$ *est une partition de l'ensemble des caractères unipotents de* G^F .

b) *Pour tout* $\varphi \in \hat{W}$ *, la décomposition de* $|W| . R_\varphi^*$ *fait intervenir les caractères d'une seule famille* $F(c)$.

A tout $c \in \Sigma$, Lusztig associe un groupe fini $\Gamma(c)$ d'ordre $\tilde{\gamma}(c)^{-1}$, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^m$, à $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ ou $\mathfrak{S}_5$. Soit $M(\Gamma(c))$ l'ensemble des couples (x,σ) formés d'un élément x de $\Gamma(c)$ (à conjugaison près) et d'un caractère irréductible σ du centralisateur $Z_{\Gamma(c)}(x)$ de x dans $\Gamma(c)$. On définit ensuite [1] un "noyau de Fourier" sur $M(\Gamma(c))$ par la règle

[1] Lorsque $\Gamma(c)$ est commutatif, $M(\Gamma(c)) = \Gamma(c) \times \hat{\Gamma}(c)$ est un groupe commutatif, et la formule (50) définit une autodualité de ce groupe.

(50) $$\{(x,\sigma),(y,\tau)\} = |Z_{\Gamma(c)}(x)|^{-1}|Z_{\Gamma(c)}(y)|^{-1} \sum_g \sigma(gyg^{-1})\overline{\tau(g^{-1}xg)} \ ;$$

la sommation porte sur tous les éléments g de $\Gamma(c)$ tels que gyg^{-1} commute à x, et donc $g^{-1}xg$ à y.

On peut alors définir *une bijection* $(x,\sigma) \mapsto \chi_c(x,\sigma)$ *de* $M(\Gamma(c))$ *sur* $F(c)$ telle que $S_c = \chi_c(1,1)$. Soit $\varphi \in \hat{W}$ et soit $F(c)$ la famille contenant S_φ ; on a(1)

(51) $$R^*_\varphi = \sum_{(x,\sigma)} \{(x,\sigma),(y,\tau)\}\chi_c(x,\sigma) \ ,$$

où (y,τ) est choisi dans $M(\Gamma(c))$ de sorte que l'on ait $S_\varphi = \chi_c(y,\tau)$. En particulier, on a

(52) $$R^*_c = \sum_{(x,\sigma)} |Z_{\Gamma(c)}(x)|^{-1}\chi_c(x,\sigma) \ .$$

7.4. Pour tout $c \in \Sigma$, soit $\hat{W}(c)$ l'ensemble des $\varphi \in \hat{W}$ tels que S_φ appartienne à la famille $F(c)$. Alors $(\hat{W}(c))_{c\in\Sigma}$ est une partition de $\hat{W}$ et l'on a $c \in \hat{W}(c)$. On peut aussi définir $\hat{W}(c)$ comme l'ensemble des φ dans $\hat{W}$ tels que R^*_φ se décompose en caractères de la famille $F(c)$.

On peut définir certaines représentations (non nécessairement irréductibles) de W, appelées cellules, en utilisant l'induction tronquée décrite au n° 7.2. On montre que chaque cellule γ fait intervenir exactement un caractère spécial c, et avec multiplicité 1 ; disons que γ est une c-cellule dans ce cas. Alors $\hat{W}(c)$ se compose des caractères irréductibles de W qui interviennent dans l'une des c-cellules au moins.

Kazhdan et Lusztig ont défini des parties de W appelées cellules à gauche, à droite, ou bilatères. A chaque cellule à gauche, ils associent une représentation de W. Ils conjecturent que les représentations ainsi obtenues sont les cellules γ ci-dessus.

7.5. L'apparition des groupes finis $\Gamma(c)$ associés aux familles $F(c)$ s'explique partiellement comme suit (Lusztig [17], [20]). Soit H un groupe de Lie complexe, réductif du même type que G^* : il existe un tore maximal S de H et un isomorphisme de $X(T^*)$ sur $X(S)$ qui envoie racines de G^* sur racines de H, et coracines sur coracines. Le groupe de Weyl de H est isomorphe (canoniquement) à W.

Soit u un élément unipotent de H, et soit $\mathcal{B}_u$ la variété des sous-groupes de Borel de H contenant u. La dimension topologique $d(u)$ de $\mathcal{B}_u$ est égale à $\frac{1}{2}\dim Z_H(u) - \ell$, où ℓ est le rang de H. Le groupe $Z_H(u)$ agit de manière naturelle sur $\mathcal{B}_u$, d'où une action du groupe $A_H(u) = Z_H(u)/Z_H^o(u)$ sur $H^{d(u)}(\mathcal{B}_u;\mathbb{Q})$. Springer [25] a défini une action de W sur cet espace, commutant à celle de

(1) Les formules (49) et (51) fournissent la décomposition des R_w.

$A_H(u)$. De la manière habituelle, cette double action permet d'associer à chaque caractère irréductible σ de $A_H(u)$ un caractère $E_{u,\sigma}$ de W , qui est irréductible ou nul. On paramètre ainsi $\hat{W}$ au moyen de certaines paires (u,σ) .

Soit $c \in \Sigma$. Il existe une classe de conjugaison unipotente $u(c)$ et une seule dans H telle que $c\varepsilon$ soit de la forme $E_{u,\sigma}$. Le groupe $\Gamma(c)$ est alors le quotient de $A_H(u(c))$ par l'intersection des noyaux des représentations $\varphi = E_{u(c),\sigma}$ pour lesquelles on ait $d(u(c)) = 2\tilde{a}(\varphi)$.

8. REMARQUES FINALES

8.1. On dispose maintenant d'une classification complète des caractères irréductibles des groupes finis G^F . Mais on ne sait pas encore déterminer complètement les valeurs de ces caractères. La première urgence est de calculer les valeurs des caractères unipotents sur les éléments unipotents ; on connait déjà le degré, c'est-à-dire la valeur en l'élément 1.

8.2. La classification des caractères irréductibles peut se faire sans mentionner -ou très peu- la cohomologie étale (ou d'intersection). Mais pour les démonstrations, elle joue un rôle important, en particulier dans les trois premiers chapitres du livre [17] de Lusztig. Un point important est la comparaison des caractères de deux groupes G^F et $G^{F'}$, où les opérateurs de Frobenius F et F' commutent ; le cas $F' = F^m$ correspond à la "descente de Shintani", étudiée en détail par Asai, Digne, Michel et Shoji.

8.3. Je remercie les participants du Séminaire C. Chevalley sur les groupes finis, et en particulier F. Digne, qui ont servi de cobayes pour la mise au point de cet exposé.

BIBLIOGRAPHIE RAISONNÉE[1]

A. Ouvrages de référence

[1] A. BOREL (éditeur) - *Seminar on algebraic groups and related finite groups*, Lect. Notes in Math., 131(1970), Springer, Berlin.

[2] N. BOURBAKI - *Groupes et Algèbres de Lie*, chap. 4 à 6, Masson, Paris, 1981.

[3] N. BOURBAKI - *Groupes et Algèbres de Lie*, chap. 7 et 8, Hermann, Paris, 1975.

[4] R.W. CARTER - *Simple groups of Lie type*, Wiley, New York, 1972.

[5] R.W. CARTER - *Finite groups of Lie type : conjugacy classes and complex characters*, Wiley-Interscience, New York, 1985.

[6] D. GORENSTEIN - *Finite simple groups, an introduction to their classification*, Plenum Press, New York, 1982.

[1] Le livre de Carter [5] contient une bibliographie très complète et à jour (en 1985).

[7] R. STEINBERG - *Lectures on Chevalley groups*, Yale University, 1967.

B. Comptes rendus du Séminaire Bourbaki

[8] J.-L. BRYLINSKI - *(Co)-homologie d'intersection et faisceaux pervers*, exposé n° 585, Astérisque 92-93 (1982).

[9] J.-P. SERRE - *Représentations linéaires des groupes finis "algébriques" [d'après Deligne-Lusztig]*, exposé n° 487, Lect. Notes in Math., 567 (1977), Springer.

[10] T.A. SPRINGER - *Caractères de groupes de Chevalley finis*, exposé n° 429, Lect. Notes in Math., 383 (1974), Springer.

[11] T.A. SPRINGER - *Quelques applications de la cohomologie d'intersection*, exposé n° 589, Astérisque 105-106 (1983).

C. Principaux travaux de Lusztig

[12] G. LUSZTIG - *The discrete series of* GL_n *over a finite field*, Annals of Mathematics Studies, 81 (1974), Princeton University Press.

[13] G. LUSZTIG - *On the Green polynomials of classical groups*, Proc. London Math. Soc., 33 (1976), p. 443-475.

[14] G. LUSZTIG - *Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius*, Invent. Math., 38 (1976/77), p. 101-159.

[15] G. LUSZTIG - *Representations of finite Chevalley groups*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics (A.M.S.), 39 (1977).

[16] G. LUSZTIG - *On the finiteness of the number of unipotent classes*, Invent. Math., 34 (1976), p. 201-213.

[17] G. LUSZTIG - *Characters of reductive groups over a finite field*, Annals of Math. Studies, 107 (1984), Princeton University Press.

[18] G. LUSZTIG - *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Invent. Math., 75 (1984), p. 205-272.

[19] G. LUSZTIG - *Left cells in Weyl groups*, Lect. Notes in Math., 1024 (1983), Springer.

[20] G. LUSZTIG - *Characters of reductive groups over finite fields*, Proceedings of the Int. Congress of Math., Warszawa, 1983, p. 877-880.

[21] G. LUSZTIG et D. VOGAN - *Singularities of closures of K-orbits on a flag manifold*, Invent. Math., 71 (1983), p. 365-379.

D. Construction de caractères

[22] P. DELIGNE et G. LUSZTIG - *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math., 103 (1976), p. 103-161.

[23] J.A. GREEN - *The characters of the finite linear groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 80 (1955), p. 402-447.

[24] T. SHOJI - *On the Springer representations of the Weyl groups of classical algebraic groups*, Comm. Algebra, 7(1979), p. 1713-1745 (et corrections p. 2027-2033).

[25] T.A. SPRINGER - *Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups*, Invent. Math., 36(1976), p. 173-207.

[26] T.A. SPRINGER - *A construction of representations of Weyl groups*, Invent. Math., 44(1978), p. 279-293.

E. Lien avec les algèbres de Hecke

[27] T. ASAI - *On the zeta functions of the varieties* X(w) *of the split classical groups and the unitary groups*, Osaka J. Math., 20(1983), p. 21-32.

[28] C.T. BENSON et C.W. CURTIS - *On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 165(1972), p. 251-273 et 202(1975), p. 405-406.

[29] C.W. CURTIS, N. IWAHORI, R. KILMOYER - *Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with* (BN) *pairs*, Publ. Math. IHES, 40(1972), p. 81-116.

[30] F. DIGNE et J. MICHEL - *Descente de Shintani des caractères d'un groupe de Chevalley fini*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 287 (1978), Série A, p. 811-814.

[31] P.N. HOEFSMIT - *Representations of Hecke algebras of finite groups with* BN-*pairs of classical type*, Ph.D. thesis, Univ. of British Columbia, Vancouver, 1974.

[32] R.B. HOWLETT et G.I. LEHRER - *Induced cuspidal representations and generalized Hecke rings*, Invent. Math., 58(1980), p. 37-64.

[33] N. IWAHORI - *On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 10(1964), p. 215-236.

F. Introduction aux nouvelles théories homologiques

[34] A.A. BEILINSON, J. BERNSTEIN et P. DELIGNE - *Faisceaux pervers*, Astérisque 100(1982).

[35] A. BOREL et al. - *Intersection cohomology*, Progress in Math., vol. 50(1984), Birkhaüser, Boston.

[36] P. DELIGNE - SGA $4\frac{1}{2}$, *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Math., 569(1977), Springer.

[37] P. DELIGNE - *La conjecture de Weil*, I et II, Publ. Math. IHES, 43(1974), p. 273-307 et 52(1980), p. 137-252.

[38] J.S. MILNE - *Etale cohomology*, Princeton University Press, 1980.

Note ajoutée en Octobre 1986 :

Pour la détermination de la structure des algèbres A_ψ (cf. n° 5.5), voir l'article [15] de Lusztig, antérieur aux travaux de Howlett et Lehrer ; la table donnée par Carter à la page 464 de [5] est empruntée à Lusztig.

La conjecture de Kazhdan et Lusztig, mentionnée au n° 7.4, a été prouvée par Lusztig dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (vol. 302), 1986, p. 5-8) intitulée : "Sur les cellules gauches des groupes de Weyl".

Pierre CARTIER

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 PALAISEAU CEDEX