

Astérisque

PIERRE CARTIER

**Développements récents sur les groupes de tresses.
Applications à la topologie et à l'algèbre**

Astérisque, tome 189-190 (1990), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 716, p. 17-67

http://www.numdam.org/item?id=SB_1989-1990__32__17_0

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS
SUR LES GROUPES DE TRESSSES
APPLICATIONS À LA TOPOLOGIE ET À L'ALGÈBRE**

par **Pierre CARTIER**

*A mes amis soviétiques
retrouvés grâce à la
"perestroïka"*

0. INTRODUCTION

Les nœuds, ouverts ou fermés, les rubans, les tresses, les câbles, ... se prêtent à des jeux sans fin. Les applications sérieuses ne manquent pas non plus : cablages électriques, modèles de mécanique des fluides faisant revivre la vieille théorie des tourbillons de Descartes ... Dès le siècle dernier, Tait et Thompson, après Cayley, se sont intéressés à ces structures combinatoires. Mais il a fallu attendre le début de ce siècle, avec les travaux de Dehn sur la Topologie, pour obtenir les premiers résultats généraux et rigoureux.

C'est en 1925 qu'Émile Artin [A1] fonde la théorie des tresses. Conformément aux tendances de l'Algèbre allemande contemporaine, il cherche — et réussit avec éclat — comment introduire des groupes adéquats dans le sujet. Aujourd'hui, la définition la plus simple du groupe B_n des tresses à n brins est la suivante : considérons une variété connexe M de dimension d ; l'espace de configuration est l'espace des parties finies d'ordre n dans M ; on le note $\Phi_n(M)$. On peut le considérer comme l'espace-quotient M_*^n / S_n , où M_*^n est l'ensemble des suites (numérotées) de n points distincts x_1, \dots, x_n de M , et où le groupe symétrique S_n agit par permutation des n points. Le groupe de tresses généralisées est le groupe fondamental $B_n(M)$ de l'espace $\Phi_n(M)$. Lorsque l'on a $d \geq 3$, ce groupe est le produit semi-direct de S_n et de $\pi_1(M)^n$; cela provient de ce que

M_*^n diffère de M^n par des sous-variétés de codimension ≥ 3 , donc a même groupe fondamental que M^n . Lorsque $d = 1$, considérons seulement le cas $M = \mathbf{R}$; alors $\Phi_n(M)$ est l'ouvert de \mathbf{R}^n formé des points (x_1, \dots, x_n) tels que $x_1 < \dots < x_n$, et l'on a $B_n(M) = 0$. Le seul cas intéressant est celui de la dimension d égale à 2. *Le groupe d'Artin est $B_n = B_n(\mathbf{R}^2)$.*

La définition précédente a été introduite par Neuwirth et Fox [A6] en 1962 ! En 1925, Artin avait donné les propriétés de base des groupes B_n au moyen d'arguments de nature combinatoire, en partie heuristiques. Il reviendra de manière plus rigoureuse sur le sujet dans ses articles [A1] de 1947. Rétrospectivement, les arguments d'Artin deuxième manière sont des manipulations sur la suite exacte d'homotopie des fibrés. Encore aujourd'hui, ces sujets de Topologie se divisent *grosso modo* en deux catégories :

— des arguments combinatoires ;

— des théorèmes difficiles (lemme de Dehn, théorème de Markov, théorèmes de Cerf et Kirby) qui permettent en général de montrer qu'une équivalence d'un certain type entre objets géométriques se ramène à une chaîne finie d'équivalences élémentaires.

La difficulté de ces derniers théorèmes est l'un des nombreux avertissements que notre description mathématique du continu n'est peut-être pas adéquate.

L'étude des espaces de configuration est un sujet actif en Topologie ; elle est menée en particulier au Japon et au Viet-Nam (autour de Huynh Mui). Mais les groupes de tresses B_n restaient une curiosité isolée avant 1970. Le réveil a eu plusieurs causes :

a) Arnold s'est intéressé à l'étude des *singularités* et de leur déploiement. Un exemple typique est l'étude des polynômes de degré n à racines simples, soient $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$; l'hypothèse de simplicité se traduit par la non-nullité du discriminant de P , vu comme polynôme $D(a_1, \dots, a_n)$ en ses coefficients. Arnold a calculé la cohomologie du complémentaire dans \mathbf{C}^n de l'hypersurface d'équation $D = 0$, espace dont le groupe fondamental est B_n . Un peu plus tard, Brieskorn a généralisé cette étude à certains cas de complémentaires d'une famille finie d'hyperplans (le cas d'Arnold correspond à la famille des hyperplans d'équation $z_i = z_j$ dans \mathbf{C}^n muni des coordonnées z_1, \dots, z_n). Dans ces

exemples, les groupes de tresses (et certaines de leurs généralisations) *apparaissent comme groupes de monodromie* ; il appartenait à Zamolodchikov [F9] et Kohno [F3] d'étudier les équations différentielles admettant des singularités polaires liées à ces configurations. Celles-ci fournissent des exemples assez simples où tester les théories générales de l'homotopie rationnelle et de la monodromie (voir mes deux exposés précédents [E5] et [F1]). Par ailleurs, l'étude des théories des champs quantiques conformes a récemment conduit Tsuchiya et Kanie [F11] à l'étude systématique de fonctions de plusieurs variables complexes ayant ce type de ramification.

b) Vers 1968, Iwahori a introduit sous le nom d'*algèbres de Hecke* des déformations $\mathcal{H}_n(q)$ de l'algèbre $\mathbf{C} S_n$ du groupe symétrique (et d'autres groupes similaires). De telles algèbres jouent un rôle important dans l'étude des représentations linéaires des groupes finis simples et des groupes algébriques réductifs sur un corps p -adique (Iwahori, Matsumoto, Tits). Les représentations irréductibles des algèbres $\mathcal{H}_n(q)$ ont été déterminées explicitement par Hoefsmit en 1974 dans [C17] ; les résultats s'insèrent dans le courant actuel de la Combinatoire où l'on étudie les *q -analogues des nombres classiques* (par exemple le polynôme de Gauss $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q$ qui pour $q = 1$ redonne le coefficient binomial $\binom{n}{i}$). On n'avait guère prêté attention au fait que les représentations de $\mathcal{H}_n(q)$ fournissent de nouvelles représentations du groupe de tresses B_n , jusqu'à la découverte fracassante, en 1984, du *polynôme de Jones associé à un nœud*. Ce polynôme a été aussitôt interprété comme une trace associée aux représentations de B_n fournies par l'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$ par Jones lui-même [C3, C5] et par Ocneanu [C8].

c) *En Mécanique Statistique*, l'étude de certains modèles, comme le modèle de Potts, conduit à des algèbres apparentées aux algèbres $\mathcal{H}_n(q)$ et appelées *algèbres de Temperley-Lieb* ; elles peuvent servir de point de départ à la construction du polynôme de Jones. Mais, plus important, on a peu à peu découvert l'importance de la *relation de Yang-Baxter*, dont l'une des formes

$$(YB) \quad \hat{R}_{12} \hat{R}_{23} \hat{R}_{12} = \hat{R}_{23} \hat{R}_{12} \hat{R}_{23}$$

est très proche de l'une des relations qui servent de définition au groupe B_n . Toute solution de cette équation fournit automatiquement une représenta-

tion du groupe B_n , et de plus les modèles de Mécanique Statistique fournissent des solutions explicites de l'équation (YB). Turaev [D13] a montré comment retrouver tous les invariants polynomiaux des nœuds par cette méthode. V. Jones [G10] et L. Kauffman [G3] ont clairement montré que *la combinatoire des tresses et des nœuds est intimement liée à celle de modèles de Mécanique Statistique*. On pourra consulter le travail de Turaev [D13] pour voir comment tous ces invariants sont obtenus comme cas particulier de la méthode des solutions de Yang-Baxter.

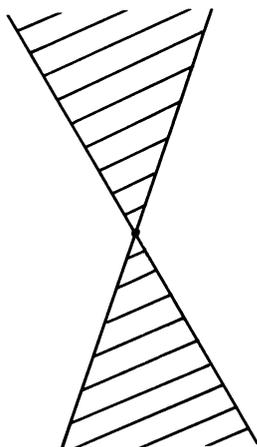
d) Drinfeld [D2] a introduit en 1986 sous le nom de “groupes quantiques” une nouvelle classe d’algèbres de Hopf. À chaque groupe de Lie semi-simple complexe G est attaché un groupe quantique G_q , et chaque représentation linéaire de G se “déforme” en une représentation de G_q , qui fournit *ipso facto* une solution de l'équation de Yang-Baxter [Rosso D7]. Il est remarquable qu'en fait *un groupe quantique soit entièrement déterminé par la catégorie de ses représentations* ; il s'agit là d'une généralisation de la dualité de Tannaka-Krein pour les groupes compacts. Mais on doit à Drinfeld, Reshetikhin et Turaev (et indépendamment à Freyd, Yetter et leurs collaborateurs) la profonde remarque que *la combinatoire des tresses et celle des nœuds se traduit dans le langage des catégories* en exploitant les relations de cohérence introduites par Mac Lane [B1]. Il s'agit là de l'idée, souvent défendue par Grothendieck en particulier, que les catégories sont des objets géométriques bien adaptés à l'étude de l'homotopie.

Tous les thèmes précédents semblent étroitement liés les uns aux autres, comme nous essaierons de le montrer dans cet exposé. La théorie est cependant encore très mouvante, et une synthèse définitive semble prématurée.

Pour terminer cette introduction, nous dirons quelques mots de deux autres thèmes dont chacun mériterait un exposé en propre.

La théorie quantique des champs a fait d'énormes progrès récents dans l'étude des *modèles à 2 ou 3 dimensions* d'espace-temps : théorie des champs conformes, théorie des cordes. Il se peut que la clé des phénomènes de supra-conductivité à “haute température” soit à trouver là. Comme J. Fröhlich l'a remarqué dans [H2] et [H3], les arguments classiques qui permettent de lier le spin à la statistique (principe d'exclusion de Pauli) perdent leur

validité en dimension 2. La raison en est que le double cône d'influence



d'un point cesse d'avoir *un complémentaire connexe* et qu'on peut alors intrinsèquement distinguer "gauche" et "droite". Au lieu de faire intervenir seulement les deux représentations ρ de degré 1 du groupe S_n , distinguant le cas des *bosons* ($\rho(s) = 1$) de celui des *formions* ($\rho(s) = \text{signature de } s$), on doit considérer les représentations du groupe B_n agissant dans l'espace de Hilbert correspondant à n particules. On rejoint là l'étude faite par Tsuchiya et Kanie [F11] de la monodromie des "fonctions à n points" de la théorie, qui jouent le rôle de moments d'une mesure sur un espace fonctionnel.

En théorie des nombres, une question ouverte — et fondamentale — est de prouver que *tout groupe fini G est le groupe de Galois d'une extension finie L du corps \mathbf{Q} des nombres rationnels*. Cela revient à étudier la structure du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Fixons un entier $n \geq 1$; le groupe de tresses B_n se réalise comme un groupe d'automorphismes du groupe libre F_n ; géométriquement, cela revient à considérer F_n comme le groupe fondamental de $\mathbf{C} \setminus S$, où S est une partie finie à n éléments de \mathbf{C} . Si l'on suppose que S se compose de nombres rationnels, le groupe de Galois de la plus grande extension du corps de fractions rationnelles $\bar{\mathbf{Q}}(t)$ non ramifiée en dehors de S est le complété profini \hat{F}_n de F_n . On peut plonger B_n dans le groupe des automorphismes de \hat{F}_n ; soit \hat{B}_n son adhérence dans

$Aut(\hat{F}_n)$. Le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ agit aussi dans \hat{F}_n , et l'on peut montrer qu'on définit ainsi un *homomorphisme injectif* ψ_S de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ dans le groupe de tresses complété \hat{B}_n . C'est là l'esquisse du programme de Grothendieck [I1] pour l'étude du groupe de Galois. Nous renvoyons à la bibliographie pour les travaux de Ihara, Oda, Deligne... sur ce sujet.

Remerciements : Ils vont aux organisateurs et aux participants du Colloque d'Ascona (octobre 1989) sur "Géométrie et Théorie quantique des champs". En particulier, je remercie Semenov-Tian-Shansky, Reshetikhin, Wasserman pour des entretiens approfondis et aussi Maillet qui m'a grandement aidé dans la collecte des documents. Je remercie aussi Jones et Freyd pour leurs commentaires vigilants sur cette introduction, et M. Gallois pour une relecture attentive.

1. RAPPELS SUR LES NŒUDS ET LES TRESSES

1.1. On appelle *nœud* dans l'espace euclidien \mathbf{R}^3 toute partie fermée de \mathbf{R}^3 homéomorphe au cercle \mathbf{S}^1 ; un *entrelac* est la réunion d'un nombre fini de nœuds deux à deux disjoints. Il est commode de rajouter un point à l'infini à \mathbf{R}^3 , et de raisonner dans l'espace \mathbf{S}^3 obtenu, homéomorphe à une sphère à 3 dimensions. Nous orienterons l'espace \mathbf{S}^3 , ainsi que les nœuds et entrelacs considérés.

On dira que deux entrelacs L et L' (en particulier deux nœuds) sont *équivalents* s'il existe un homéomorphisme de \mathbf{S}^3 transformant L en L' et respectant les orientations de L , L' et \mathbf{S}^3 . Le groupe des homéomorphismes orientés de \mathbf{S}^3 sera muni de la convergence uniforme ; il est connexe par arcs. Par suite, si deux entrelacs L et L' sont équivalents, il existe une *isotopie* transformant L en L' , c'est-à-dire une application continue⁽¹⁾ $h : I \times \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^3$ avec les propriétés suivantes :

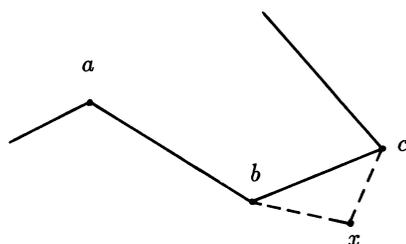
- a) on a $h(0, x) = x$ pour x dans \mathbf{S}^3 ;
- b) pour tout t dans I , l'application $h_t : x \mapsto h(t, x)$ est un homéomorphisme de \mathbf{S}^3 ;

⁽¹⁾ On note I l'intervalle $[0, 1]$ de \mathbf{R} .

c) L' est l'image de L par l'application h_1 .

On parle d'*isotopie ambiante* pour les entrelacs, car tout l'espace S^3 se déforme de manière à entraîner L vers L' . Une déformation de L en L' , au moyen d'une famille continue d'entrelacs, donnerait une équivalence trop faible.

Il existe des nœuds sauvages, découverts par Fox et Artin ; pour les éviter, nous ne considérerons que des nœuds qui sont équivalents à des lignes polygonales, formées de segments de droites. Les entrelacs sont restreints de même. On peut montrer que si deux nœuds polygonaux L et L' sont équivalents, on peut passer de L à L' par des opérations élémentaires du type décrit ci-dessous, et leurs inverses (en nombre fini)



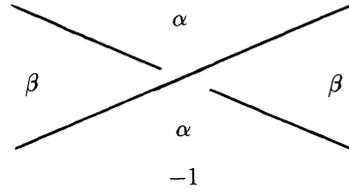
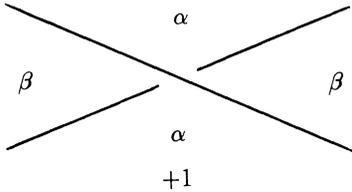
la modification remplace le segment bc par la réunion de bx et xc .

1.2. Pour décrire les entrelacs, on utilise une *projection plane*. Quitte à remplacer un entrelac L par un entrelac équivalent, on peut supposer que la projection orthogonale de L sur un plan P est une réunion de courbes différentiables, avec pour seules singularités des points de croisement doubles avec tangentes distinctes. À chaque croisement, on doit indiquer laquelle des deux branches est au-dessus de l'autre ; compte tenu des orientations, on a les deux dispositions suivantes :

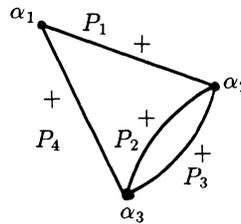
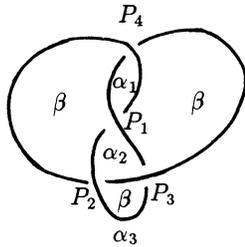


On a indiqué l'indice du croisement égal à $+1$ ou -1 .

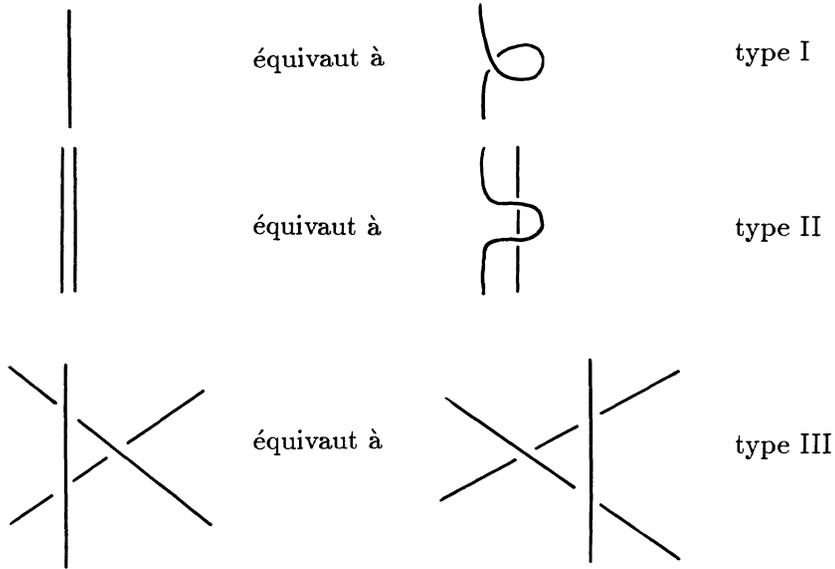
A une telle projection D , on associe un *graphe planaire* T , qui ne prend pas en compte les orientations : le complémentaire de D dans le plan P a un nombre fini de composantes connexes qu'on peut colorier avec deux couleurs α et β de telle manière que deux régions qui bordent un même arc de courbe aient des couleurs distinctes. Chacune de ces régions de couleur α définit un sommet de T , et les points de croisement définissent des arêtes de T joignant les deux régions α adjacentes ; chaque arête est munie d'un signe donné par les règles suivantes :



Voici un exemple de graphe associé à une projection de nœud



En général, le même entrelac a plusieurs projections non équivalentes par une isotopie du plan. On peut prouver que l'on peut passer d'une projection D_1 à une projection D_2 du même nœud, à isotopie près, par une suite finie de *transformations de Reidemeister*, qui se répartissent en trois types



Faire attention aux croisements ; on peut mettre les orientations *ad libitum*.

1.3. Soit L un nœud orienté. Il existe une surface orientée S plongée dans \mathbf{S}^3 , dont le bord soit L (*surface de Seifert*). Si L' est un nœud orienté disjoint de L , on peut par une isotopie ambiante s'arranger pour que S et L' se coupent transversalement en un nombre fini de points p_1, \dots, p_r . Chacun de ces points p_i définit un nombre ε_i égal à ± 1 et déterminé par les orientations. Le nombre $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r$ s'appelle *le nombre d'entrelacements* de L et L' , noté $i(L, L')$.

De manière plus précise, les groupes d'homologie à coefficients entiers de $\mathbf{S}^3 \setminus L$ sont donnés par

$$H_0(\mathbf{S}^3 \setminus L) = \mathbf{Z} \quad , \quad H_1(\mathbf{S}^3 \setminus L) = \mathbf{Z} \quad , \quad H_i(\mathbf{S}^3 \setminus L) = 0 \quad \text{pour } i \geq 2 .$$

Le générateur γ de $H_1(\mathbf{S}^3 \setminus L)$ peut être choisi de sorte que la classe d'homologie définie par L' dans $\mathbf{S}^3 \setminus L$ soit égale à $i(L, L') \cdot \gamma$.

Comme $H_1(\mathbf{S}^3 \setminus L)$ est isomorphe à \mathbf{Z} , il existe une variété M de dimension 3 qui est un revêtement de $\mathbf{S}^3 \setminus L$, galoisien de groupe \mathbf{Z} . Le *module d'Alexander* de L , noté $A(L)$, est le groupe d'homologie $H_1(M)$; comme le groupe \mathbf{Z} agit sur M , donc sur son homologie, on peut considérer $A(L)$

comme un module sur l'anneau $\Lambda = \mathbf{Z}[u, u^{-1}]$ des polynômes de Laurent en u , la multiplication par u sur $A(L)$ correspondant à l'action du générateur de \mathbf{Z} agissant sur M . La structure du Λ -module $A(L)$ s'exprime par une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Lambda^{2h} \xrightarrow{\alpha} \Lambda^{2h} \longrightarrow A(L) \longrightarrow 0 ;$$

l'homomorphisme α est décrit par une matrice de la forme $A(L) = V - u {}^t V$, où V est une matrice carrée de type $2h \times 2h$ à coefficients entiers, telle que

$$(1.1) \quad V - {}^t V = \begin{pmatrix} 0 & I_h \\ -I_h & 0 \end{pmatrix}$$

(I_h : matrice unité d'ordre h). Le déterminant $\Delta_L(u)$ de la matrice $A(L)$ s'appelle le *polynôme d'Alexander* du nœud L . A multiplication près par une puissance de u , il ne dépend que du nœud L . On le normalise sous la forme

$$(1.2) \quad \hat{\Delta}_L(u) = a_0 + a_1 u + \cdots + a_{2m} u^{2m}$$

avec $a_0 \neq 0$; on a alors la relation de symétrie $a_i = a_{2m-i}$.

1.4. Compte tenu de l'identification de \mathbf{R}^2 et de \mathbf{C} , la définition générale donnée dans l'introduction se reformule ainsi : on note \mathbf{C}_*^n l'ensemble des vecteurs à n coordonnées complexes toutes distinctes ; alors B_n est le groupe fondamental de $\mathbf{C}_*^n/\mathbf{S}_n$, le groupe \mathbf{S}_n opérant par permutation des coordonnées. Le groupe fondamental de l'espace \mathbf{C}_*^n s'appelle le *groupe de tresses pures* ; il se note P_n . Alors P_n est un sous-groupe invariant du groupe de tresses B_n et le groupe B_n/P_n est canoniquement isomorphe à \mathbf{S}_n .

Représentant les éléments de B_n par des lacets dans l'espace $\mathbf{C}_*^n/\mathbf{S}_n$, on obtient la description géométrique suivante. Considérons deux plans parallèles Π_0 et Π_1 dans \mathbf{R}^3 , et la bande Δ qu'ils limitent. Fixons n points distincts P_1^0, \dots, P_n^0 dans Π_0 et n points distincts P_1^1, \dots, P_n^1 dans Π_1 . Une tresse à n brins est une réunion γ de n arcs simples $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ contenus dans Δ avec les propriétés suivantes :

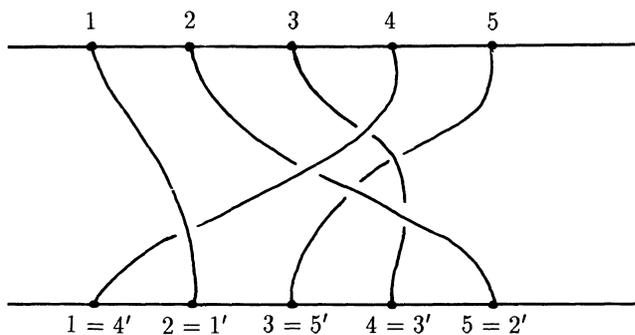
- a) les arcs $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sont deux à deux disjoints ;

b) chacun de ces arcs coupe tout plan Π , parallèle à Π_0 et Π_1 et contenu dans Δ , en un point et un seul ;

c) chaque arc a l'une de ses extrémités en l'un des points P_i^0 ; il se termine alors en $P_{\pi(i)}^1$, où π est la permutation dans \mathbf{S}_n associée à l'élément de B_n défini par γ .

Pour définir l'équivalence, on introduit le groupe Γ des homéomorphismes de Δ qui fixent chacun des points $P_1^0, \dots, P_n^0, P_1^1, \dots, P_n^1$ et transforment en lui-même tout plan Π parallèle à Π_0 et Π_1 ; on note Γ_0 la composante connexe par arcs de l'identité dans Γ . Deux tresses γ et γ' sont équivalentes par Γ si et seulement si elles définissent la même permutation $\pi \in \mathbf{S}_n$. On dira qu'elles sont *isotopes* si elles sont équivalentes par le groupe Γ_0 ; les éléments de B_n sont alors les classes d'isotopie de tresses à n brins.

Choisissons un plan P perpendiculaire à Π_0 et Π_1 , et soit D la bande $P \cap \Delta$ dans P . On projette chaque tresse γ perpendiculairement sur P . Quitte à modifier γ par une isotopie, on peut supposer que la projection de γ se compose de n arcs différentiables qui se coupent transversalement en un nombre fini de points, et qui coupent transversalement chaque droite parallèle à $L_i = \Pi_i \cap P$ en un point unique. On adopte la convention précédente pour indiquer les croisements par-dessus ou par-dessous

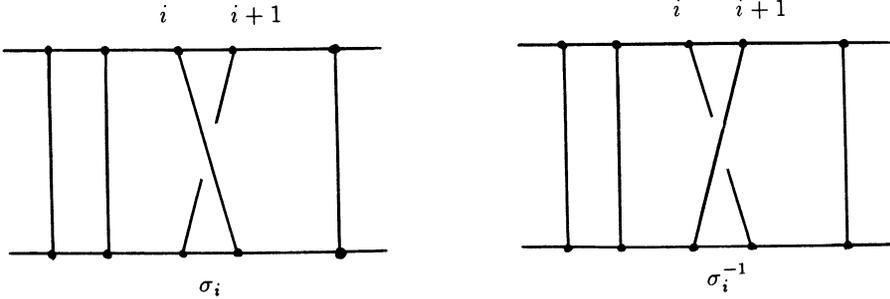


La permutation associée est $i \mapsto i'$, soit ici $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On laisse au lecteur le soin de définir l'isotopie convenable sur les projections planes de tresses.

1.5. Structure du groupe des tresses

Le groupe B_n admet $n - 1$ générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, que l'on définit facilement au moyen des projections planes



Le groupe B_n admet la présentation donnée par les relations suivantes⁽¹⁾ :

$$(1.3) \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n - 2$$

$$(1.4) \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i - j| \geq 2.$$

De manière analogue, le groupe symétrique S_n admet une présentation donnée par les générateurs s_i (transposition de i et $i+1$) pour $1 \leq i \leq n - 1$, et les relations

$$(1.5) \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n - 2$$

$$(1.6) \quad s_i s_j = s_j s_i \quad \text{pour } |i - j| \geq 2$$

$$(1.7) \quad s_i^2 = 1 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n - 1.$$

Dans la projection de B_n sur S_n , le générateur σ_i donne s_i . Le noyau P_n est donc le plus petit sous-groupe invariant de B_n qui contient les σ_i^2 .

On définit un groupe B_∞ ayant une suite infinie de générateurs $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ avec les relations (1.3) et (1.4). Le groupe B_n s'identifie au sous-groupe de B_∞ engendré par $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$. Le plongement de B_n dans B_{n+1} ainsi obtenu se représente géométriquement par l'opération suivante : prendre

⁽¹⁾ Les permutations se composent comme les fonctions ; ainsi on a $(\pi \pi'(i) = \pi(\pi'(i)))$. Pour la composition des tresses, on est donc conduit à les orienter du haut vers le bas, et tt' représente t en dessous de t' .

une tresse à n brins et ajouter un $(n + 1)^e$ brin à droite, assez loin pour ne pas être enlacé avec les autres brins. De manière analogue, on a une chaîne croissante $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \dots$ fournie par les groupes de permutations, avec la réunion S_∞ .

La projection de C_*^{n+1} sur C_*^n qui transforme $(z_1, \dots, z_n, z_{n+1})$ en (z_1, \dots, z_n) est une fibration, dont la fibre F est obtenue en ôtant n points dans C . Le groupe fondamental de F est un groupe libre F_n à n générateurs a_1, \dots, a_n , et dans une fibration, le groupe fondamental de la base opère sur celui de la fibre. On en déduit ceci :

Le groupe de tresses B_n s'identifie au groupe des automorphismes φ de F_n possédant les propriétés suivantes :

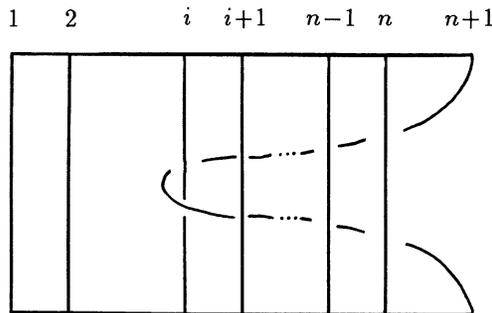
- a) le produit $a_1 \dots a_n$ est invariant par φ ;
- b) il existe une permutation $\pi \in S_n$ telle que $\varphi(a_i)$ soit conjugué dans F_n à $a_{\pi(i)}$.

Dans cette identification, le générateur σ_i est décrit ainsi :

$$(1.8) \quad \sigma_i(a_j) = \begin{cases} a_i a_{i+1} a_i^{-1} & \text{si } j=i \\ a_i & \text{si } j = i + 1 \\ a_j & \text{si } j = i, i + 1 . \end{cases}$$

En particulier, le groupe de tresses pures P_n est le groupe des automorphismes de F_n qui laissent invariants $a_1 \dots a_n$ et la classe de conjugaison de chaque a_i . On peut alors identifier P_{n+1} au produit semi-direct de P_n et de F_n muni de l'action précédente de P_n ; dans cette identification, on a

$$(1.9) \quad a_i = (\sigma_{i+1} \dots \sigma_n)^{-1} \sigma_i^2 (\sigma_{i+1} \dots \sigma_n) .$$



Le même raisonnement de fibration a d'autres applications. Notons \mathcal{A}_n l'algèbre de cohomologie de de Rham de C_*^n ; la projection de C_*^{n+1}

sur \mathbf{C}_*^n identifie \mathcal{A}_n à une sous-algèbre de \mathcal{A}_{n+1} ; si l'on note a_i la classe de cohomologie de la forme différentielle $d \log(z_{n+1} - z_i)$ (pour $1 \leq i \leq n$), alors on a $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{A}_n a_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_n a_n$. Le polynôme de Poincaré de l'espace \mathbf{C}_*^n est donc $\prod_{k=1}^{n-1} (1 + kt)$. Un résultat dû à Fox, et généralisé par Brieskorn [E7] et Deligne [E8] affirme que le revêtement universel de \mathbf{C}_*^n est contractile ; par suite, la cohomologie du groupe B_n est isomorphe à \mathcal{A}_n . Enfin, avec les notations du n° 4.3, l'algèbre de Lie \mathcal{G}_{n+1} associée au groupe P_{n+1} est somme directe de la sous-algèbre de Lie \mathcal{G}_n et d'un idéal \mathcal{I}_n qui est une algèbre de Lie libre à n générateurs.

1.6. Relations entre tresses et nœuds

Soit D une droite dans \mathbf{R}^3 . Un entrelac L qui ne rencontre pas D sera appelé une *tresse fermée* à n brins, d'axe D , si tout demi-plan limité par D rencontre L en n points exactement. Choisissons un demi-plan P_0 limité par D , et notons P_t (pour $0 \leq t \leq 1$) le demi-plan obtenu par la rotation ρ_t d'angle $2\pi t$ autour de D (après choix d'orientations). Posons

$$(1.10) \quad F_t = \rho_t^{-1}(P_t \cap L) .$$

Alors la famille $(F_t)_{0 \leq t \leq 1}$ est un lacet dans l'espace de configuration $\Phi_n(P_0)$ et définit donc un élément du groupe de tresses B_n . On déduit de là une *bijection entre les tresses fermées à n brins (à isotopie près) et les classes de conjugaison dans B_n* .

À isotopie près, tout entrelac est une tresse fermée pour une droite bien choisie. On déduit de là la *classification de Markov des entrelacs*. Notons B l'ensemble somme des ensembles B_1, B_2, \dots et \sim la plus petite relation d'équivalence dans B pour laquelle on ait

$$g \sim hgh^{-1} \quad \text{et} \quad g \sim g\sigma_n \sim g\sigma_n^{-1}$$

pour g, h dans B_n . Alors l'ensemble \mathcal{M} des classes d'équivalence classifie les entrelacs (non sauvages, à isotopie ambiante près) dans \mathbf{R}^3 ou dans \mathbf{S}^3 .

2. INVARIANTS POLYNOMIAUX DES NŒUDS

2.1. Décrivons la stratégie générale fondée sur les représentations linéaires des groupes B_n , selon Jones [C5] et Turaev [D13]. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbf{C} , et soit R un opérateur inversible agissant dans $V \otimes V = V^{\otimes 2}$; on note P l'opérateur de symétrie dans $V^{\otimes 2}$, transformant $x \otimes y$ en $y \otimes x$, et l'on pose $\hat{R} = RP$. De plus, on choisit un entier $n \geq 1$, et l'on note $\hat{R}_{i,i+1}$ l'opérateur dans $V^{\otimes n}$ défini par

$$(2.1) \quad \hat{R}_{i,i+1}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes \hat{R}(x_i \otimes x_{i+1}) \otimes x_{i+2} \otimes \cdots \otimes x_n .$$

De manière générale, pour tout opérateur T dans $V^{\otimes 2}$, et des entiers i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, on note T_{ij} l'opérateur dans $V^{\otimes n}$ qui "agit comme T sur les facteurs de rang i et j ".

On cherche une représentation T_R du groupe B_n dans l'espace $V^{\otimes n}$ qui transforme le générateur σ_i en l'opérateur $\hat{R}_{i,i+1}$. Compte tenu de la présentation de B_n donnée par (1.3) et (1.4), la condition nécessaire et suffisante pour que ceci ait lieu est que \hat{R} satisfasse à la relation

$$(2.2) \quad \hat{R}_{12} \hat{R}_{23} \hat{R}_{12} = \hat{R}_{23} \hat{R}_{12} \hat{R}_{23}$$

(égalité d'opérateurs dans $V^{\otimes 3}$). Pour l'opérateur R , cela se transcrit en l'équation, de Yang-Baxter (version quantique)

$$(2.3) \quad R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12} .$$

Par exemple, si l'on a $R = 1$, les opérateurs R_{ij} sont tous égaux à 1, et l'équation de Yang-Baxter est satisfaite. Dans ce cas, l'action d'un élément g de B_n est donnée par

$$(2.4) \quad T_1(g)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\pi^{-1}(n)}$$

où π est l'image de g par l'homomorphisme canonique de B_n sur S_n .

2.2. Voici une classe de solutions de l'équation de Yang-Baxter. Soit V l'espace \mathbf{C}^N avec sa base canonique e_1, \dots, e_N . On note q un nombre complexe non nul. Soit R l'opérateur dans $V^{\otimes 2}$ défini par

$$(2.5) \quad \begin{cases} R(e_i \otimes e_i) &= q e_i \otimes e_i \\ R(e_i \otimes e_j) &= e_i \otimes e_j \\ R(e_j \otimes e_i) &= (q - q^{-1}) e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour } i < j \\ \text{pour } i < j \end{array}$$

Alors (2.3) est satisfaite. Pour $q = 1$, l'opérateur R se réduit à l'identité. L'opérateur \hat{R} a les valeurs propres q (multiplicité $N(N+1)/2$) et $-q^{-1}$ (multiplicité $N(N-1)/2$), et l'on a donc $(\hat{R} - q)(\hat{R} + q^{-1}) = 0$. On peut traduire ainsi le résultat obtenu :

a) L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n(q)$ est une algèbre ayant des générateurs T_1, \dots, T_{n-1} avec les relations

$$(2.6) \quad T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$$

$$(2.7) \quad T_i T_j = T_j T_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2$$

$$(2.8) \quad (T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0.$$

Elle a une base de la forme (T_π) , où π parcourt \mathbf{S}_n , avec $T_1 = 1$, et la règle de multiplication

$$(2.9) \quad T_\pi T_i = T_{\pi s_i} \quad \text{si } \pi(i) < \pi(i+1),$$

$$(2.10) \quad T_\pi T_i = T_{\pi s_i} + (q - q^{-1}) T_\pi \quad \text{si } \pi(i) > \pi(i+1).$$

b) Il existe une représentation linéaire λ_n de l'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$ dans l'espace $V^{\otimes n}$, telle que $\lambda_n(T_i)$ soit égal à $\hat{R}_{i,i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

c) Il existe un homomorphisme ε_n du groupe B_n dans le groupe multiplicatif $\mathcal{H}_n(q)^\times$ qui transforme σ_i en T_i . Dans ces conditions, on a

$$(2.11) \quad T_R(g) = \lambda_n(\varepsilon_n(g)) \quad \text{pour } g \text{ dans } B_n.$$

Lorsque $q = 1$, l'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$ se réduit à l'algèbre \mathbf{CS}_n du groupe symétrique, de sorte qu'on ait $T_\pi = \pi$. Supposons qu'on ait $q^k \neq 1$ pour $k = 1, \dots, n$. Alors l'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$ est semi-simple et ses représentations simples U_μ sont paramétrées par les partitions $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ de n (avec la convention $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$ et $n = \mu_1 + \dots + \mu_n$). La représentation λ_n de l'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$ dans l'espace $(\mathbf{C}^N)^{\otimes n}$ fait intervenir exactement les représentations U_μ correspondant aux partitions $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $\mu_k = 0$ pour $k > N$; la multiplicité de U_μ est la même que celle du cas spécial $q = 1$ (cf. Hoefsmit [C17]).

2.3. On suppose maintenant donnés un espace vectoriel V (de dimension finie sur \mathbf{C}), un opérateur inversible R dans $V \otimes V$ satisfaisant à l'équation

de Yang-Baxter, et un opérateur μ dans V satisfaisant aux conditions suivantes :

- a) les opérateurs R et $\mu \otimes \mu$ commutent ;
- b) pour tout opérateur u dans $\text{End}(V)$, on a les relations

$$(2.12) \quad \text{Tr}((u \otimes \mu) \cdot \hat{R}) = \alpha \text{Tr}(u)$$

$$(2.13) \quad \text{Tr}((u \otimes \mu) \cdot \hat{R}^{-1}) = \alpha^{-1} \text{Tr}(u) ,$$

où α est une constante complexe convenable (avec $\alpha \neq 0$).

Notons w l'homomorphisme de B_n dans \mathbf{Z} qui envoie chaque générateur σ_i sur 1 , puis définissons une fonction $\phi_{R,\mu}^n$ sur le groupe B_n par la relation

$$(2.14) \quad \phi_{R,\mu}^n(g) = \alpha^{-w(g)} \text{Tr}(\mu^{\otimes n} \cdot T_R(g))$$

où la représentation T_R de B_n dans l'espace $V^{\otimes n}$ satisfait à $T_R(\sigma_i) = \hat{R}_{i,i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Il résulte facilement des hypothèses faites qu'on a les relations

$$(2.15) \quad \phi_{R,\mu}^n(hgh^{-1}) = \phi_{R,\mu}^n(g)$$

$$(2.16) \quad \phi_{R,\mu}^{n+1}(g \sigma_n^{\pm 1}) = \phi_{R,\mu}^n(g)$$

pour tout g dans B_n . Compte tenu de la classification de Markov des entrelacs (voir n° 1.6), on peut définir un invariant $T_{R,\mu}(L)$ des classes d'isotopie d'entrelacs, telle que l'on ait

$$(2.17) \quad T_{R,\mu}(L) = \phi_{R,\mu}(g)$$

si l'entrelac L s'obtient en fermant une tresse à n brins correspondant à l'élément g de B_n .

2.4. Pour donner un exemple explicite, revenons au cas $V = \mathbf{C}^N$, l'opérateur R étant décrit par les formules (2.5). On prend pour μ la matrice diagonale d'éléments

$$(-1)^{N+1} q^{N-1} , (-1)^{N+1} q^{N-3} , \dots , (-1)^{N+1} q^{1-N}$$

et l'on pose $\alpha = (-1)^{N+1} q^N$. L'invariant de Turaev de degré N est alors défini par

$$(2.18) \quad T_L^N(q) = (-1)^{N+1} \frac{q - q^{-1}}{q^N - q^{-N}} T_{R,\mu}(L)$$

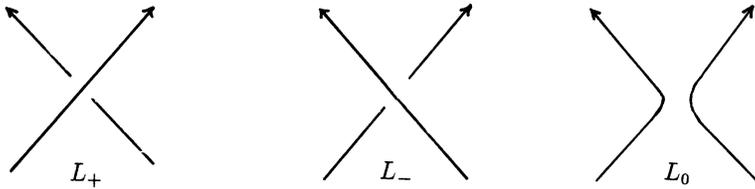
pour tout entrelac L , avec R et μ ainsi précisés ; c'est un polynôme de Laurent en q .

Lorsque $N = 2$, on retrouve le polynôme de Jones

$$(2.19) \quad T_L^2(q) = V_L(q^2)$$

(avec les notations de Jones [C2]).

La suite des polynômes $T_L^N(q)$ pour $N = 2, 3, \dots$ s'exprime au moyen d'un seul polynôme de Laurent en q et q^N . De manière précise, étant donné un entrelac orienté L , choisissons un point de croisement p de L et définissons trois entrelacs L_+ , L_- et L_0 où L_+ est égal à L , et où L_- et L_0 s'obtiennent par les modifications au point p indiquées sur le schéma suivant :



La relation $\hat{R} - \hat{R}^{-1} = q - q^{-1}$ (qui exprime le fait que \hat{R} a les valeurs propres q et $-q^{-1}$) se traduit géométriquement par la relation

$$(2.20) \quad q^N T_{L_+}^N(q) - q^{-N} T_{L_-}^N(q) + (-1)^N (q - q^{-1}) T_{L_0}^N(q) = 0.$$

On montre de manière combinatoire que la projection plane de tout entrelac peut être modifiée en celle d'une réunion de cercles non noués et non enlacés par des transformations de passages supérieurs en passages inférieurs et inversement. Raisonnant par récurrence sur le nombre de points de croisement de la projection de L , on arrive au résultat suivant :

THÉORÈME.— On peut associer, de manière unique, à toute classe d'isotopie d'entrelac orienté L un polynôme $P_L(x, y, z)$ en $x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}$, homogène de degré 0 et satisfaisant aux deux relations

$$(2.21) \quad x P_{L_+} + y P_{L_-} + z P_{L_0} = 0$$

avec les conventions ci-dessus, et

$$(2.22) \quad P_0 = 1$$

où 0 représente un cercle. De plus, l'invariant de Turaev est donné par la formule

$$(2.23) \quad T_L^N(q) = P_L(q^N, -q^N, (-1)^N(q - q^{-1})).$$

Le polynôme $P_L(x, y, z)$ n'est autre que le polynôme HOMFLY défini par les six auteurs [C12]. Il contient comme cas particuliers le polynôme d'Alexander

$$(2.24) \quad \Delta_L(q) = P(1, -1, q - q^{-1})$$

et celui de Jones

$$(2.25) \quad V_L(q^2) = P_L(q^2, -q^{-2}, q - q^{-1}).$$

Remarque : Conservons les mêmes définitions de R et μ . On définit une forme linéaire τ_n sur l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n(q)$ par la formule

$$(2.26) \quad \tau_n(a) = \text{Tr}(\lambda_n(a) \cdot \mu^{\otimes n});$$

la représentation λ_n de l'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$ dans l'espace $(\mathbf{C}^N)^{\otimes n}$ est définie par $\lambda_n(T_i) = \hat{R}_{i, i+1}$. Alors τ_n est une trace, c'est-à-dire qu'on a $\tau_n(ab) = \tau_n(ba)$. D'autre part, en plongeant de manière évidente $\mathcal{H}_n(q)$ dans $\mathcal{H}_{n+1}(q)$, on a les deux relations

$$(2.27) \quad \tau_{n+1}(a T_n) = \alpha \tau_n(a)$$

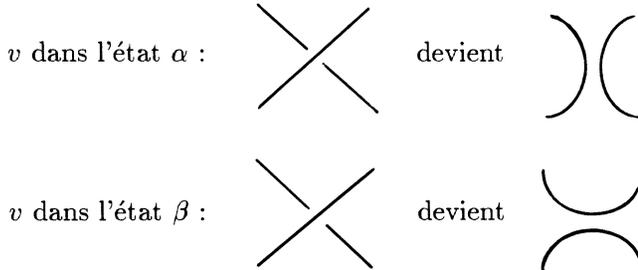
$$(2.28) \quad \tau_{n+1}(a) = \beta \tau_n(a)$$

avec les constantes

$$\alpha = (-1)^{N+1} q^N \quad , \quad \beta = (-1)^{N+1} \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}} .$$

Dans [C16], Vogel a déterminé *a priori* toutes les suites de traces τ_n sur les algèbres $\mathcal{H}_n(q)$ satisfaisant aux relations (2.27) et (2.28) pour des valeurs arbitraires de α et β . Le cas $\beta = 1$ est celui étudié par Jones, qui a donné le branle initial à toute cette théorie.

2.5. Un autre type d'invariant a été construit par L. Kauffman. Considérons d'abord une projection plane D d'un entrelac L . Soit V l'ensemble des points de croisement. Nous inspirant de la *Mécanique Statistique*, nous supposons que chaque point v de V peut être dans deux états, notés α et β ; un état de D est une application ω de V dans $\{\alpha, \beta\}$. Étant donné un état ω , nous notons $m(\omega)$ le nombre de points de V dans l'état α , et $n(\omega)$ ceux dans l'état β . D'autre part, nous modifions le diagramme D simultanément en tous ses sommets selon la règle



Le diagramme ainsi modifié n'a plus de points de croisement et se compose d'un nombre $p(\omega)$ de cercles disjoints. Le poids associé à un état ω est

$$\pi(\omega) = A^{m(\omega)} B^{n(\omega)} d^{p(\omega)} .$$

On associe à D le polynôme $K_D(A, B, d)$ égal à la somme des poids $\pi(\omega)$ pour les $2^{|V|}$ états possibles de D . Il s'agit là de l'analogue d'une fonction de partition en Mécanique Statistique.

Jusqu'ici, nous n'avons pas tenu compte de l'orientation de l'entrelac L ou de sa projection D . Mais on déduit de l'existence du polynôme de Kauffman $K_D(A, B, d)$ l'existence d'un nouvel invariant polynomial $Q_L(x, y)$.

C'est un polynôme à coefficients entiers en x, x^{-1}, y et y^{-1} avec les propriétés caractéristiques suivantes :

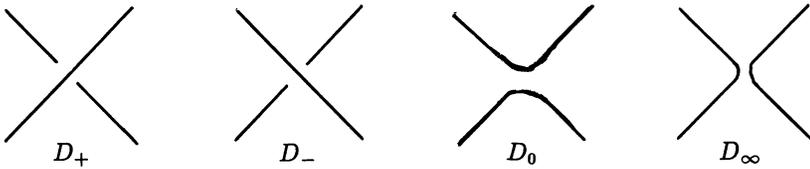
a) si L est un cercle non noué, on a $Q_L = 1$;

b) soit D une projection plane de l'entrelac L et soit $w(D)$ la somme des multiplicités des points de croisement (conformément aux conventions du n° 1.2). Alors $\tilde{Q}_D(x, y) = x^{w(D)} Q_L(x, y)$ ne dépend pas de l'orientation de L (et de D) ;

c) on a la relation

$$\tilde{Q}_{D_+} + \tilde{Q}_{D_-} = y \tilde{Q}_{D_0} + y^{-1} \tilde{Q}_{D_\infty}$$

si les quatre diagrammes D_+, D_-, D_0 et D_∞ diffèrent en un sommet selon le schéma suivant :



On peut retrouver le polynôme de Jones $V_L(q^2)$ comme spécialisation du polynôme de Kauffman $Q_L(x, y)$. De plus, Turaev a donné une interprétation de $Q_L(x, y)$ au moyen du schéma (V, R, μ) .

3. CATÉGORIES ET ALGÈBRES DE HOPF

3.1. Considérons un ensemble E et une application φ de $E \times E$ dans E ; nous voulons formuler en général l'associativité de φ . Pour cela, on définit par récurrence une suite d'ensembles finis $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ par les règles

$$(3.1) \quad \Sigma_1 = \{0\} \quad , \quad \Sigma_n = (\Sigma_1 \times \Sigma_{n-1}) \cup (\Sigma_2 \times \Sigma_{n-2}) \cup \dots \cup (\Sigma_{n-1} \times \Sigma_1) .$$

Par récurrence sur $n \geq 1$, on associe à chaque élément σ de Σ_n une application $\bar{\sigma}$ de E^n dans E :

a) si $n = 1$, on a $\sigma = 0$ et $\bar{\sigma}(x) = x$ pour tout $x \in E$;

b) si $n > 1$, il existe un entier p tel que $1 \leq p \leq n - 1$, et deux éléments $\sigma' \in \Sigma_p$ et $\sigma'' \in \Sigma_{n-p}$ tels que $\sigma = (\sigma', \sigma'')$; on a

$$(3.2) \quad \bar{\sigma}(x_1, \dots, x_n) = \varphi(\bar{\sigma}'(x_1, \dots, x_p), \bar{\sigma}''(x_{p+1}, \dots, x_n)) .$$

On peut représenter les éléments de Σ_n par des arbres binaires à n sommets libres ; donnons deux exemples d'éléments de Σ_4 et leurs représentations graphiques



$$\alpha = (0, (0, (0, 0)))$$



$$\beta = (((0, 0), 0), 0) .$$

Si nous abrégeons $\varphi(a, b)$ en (ab) , les fonctions associées à α et β sont données par

$$(3.3) \quad \begin{cases} \bar{\alpha}(a, b, c, d) &= (a(b(cd))) \\ \bar{\beta}(a, b, c, d) &= (((ab)c)d) . \end{cases}$$

Les ensembles Σ_1 et Σ_2 ont un seul élément, et Σ_3 a deux éléments λ et μ dont les fonctions associées sont

$$(3.4) \quad \bar{\lambda}(a, b, c) = ((ab)c) \quad , \quad \bar{\mu}(a, b, c) = (a(bc)) .$$

On dit que la loi φ est *associative* si l'on a $((ab)c) = (a(bc))$ pour a, b, c dans E , c'est-à-dire $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$. S'il en est ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, toutes les applications de E^n dans E associées aux éléments de Σ_n coïncident. On peut par exemple vérifier de deux manières l'égalité $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$

$$(3.5) \quad (a(b(cd))) = ((ab)(cd)) = (((ab)c)d)$$

$$(3.6) \quad (a(b(cd))) = (a((bc)d)) = ((a(bc))d) = (((ab)c)d) .$$

Ces formules correspondent à deux chaînes de transformations élémentaires sur les arbres binaires.

3.2. Nous appliquons ce qui précède au cas d'une catégorie \mathcal{C} et d'un foncteur Φ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans \mathcal{C} ; ainsi Φ induit une loi de composition sur

l'ensemble $\text{Ob}(\mathcal{C})$ des objets de \mathcal{C} et aussi sur l'ensemble $\text{Fl}(\mathcal{C})$ des flèches de \mathcal{C} . Si ces deux lois sont associatives, on dira que Φ est dit *strictement associatif*. En pratique, c'est rarement le cas ; par exemple, si \mathcal{C} est la catégorie des espaces vectoriels sur \mathbf{C} , et qu'on prenne $\Phi(U, V) = U \otimes V$, on sait que les espaces $(U \otimes V) \otimes W$ et $U \otimes (V \otimes W)$ sont isomorphes, mais non égaux.

Supposons alors qu'on dispose d'un isomorphisme $\alpha(a, b, c)$ de $\Phi(a, \Phi(b, c))$ sur $\Phi(\Phi(a, b), c)$ fonctoriel en les objets a, b et c de \mathcal{C} . Par itération du foncteur Φ , on associe à chaque élément σ de Σ_n un foncteur σ_* de \mathcal{C}^n dans \mathcal{C} . En utilisant α , on montre que les foncteurs σ_* et τ_* associés à deux éléments de Σ_n sont isomorphes. Par exemple, les deux chaînes d'égalités (3.5) et (3.6) s'interprètent en donnant deux isomorphismes ε et η du foncteur α_* sur le foncteur β_* ; on a explicitement⁽¹⁾, en écrivant ab pour $\Phi(a, b)$:

$$(3.7) \quad \varepsilon(a, b, c, d) = \alpha(ab, c, d)\alpha(a, b, cd)$$

$$(3.8) \quad \eta(a, b, c, d) = \Phi(\alpha(a, b, c), d)\alpha(a, bc, d)\Phi(a, \alpha(b, c, d)) .$$

Noter que les flèches dans \mathcal{C} se composent de la droite vers la gauche. On dit que θ est une *contrainte d'associativité pour Φ* si l'on a toujours $\varepsilon(a, b, c, d) = \eta(a, b, c, d)$. S'il en est ainsi, *l'interprétation de toutes les chaînes allant de $\sigma_*(a_1, \dots, a_n)$ à $\tau_*(a_1, \dots, a_n)$ conduit au même isomorphisme du foncteur σ_* sur le foncteur τ_* (pour σ et τ dans Σ_n)*. Ce théorème est dû à Mac Lane [B1].

De manière analogue, une *contrainte de commutativité pour Φ* est un isomorphisme $\rho(a, b)$ de $\Phi(a, b)$ sur $\Phi(b, a)$, fonctoriel en les objets a et b de \mathcal{C} et tel que l'on ait

$$(3.9) \quad \Phi(\rho(a, c), b)\alpha(a, c, b)\Phi(a, \rho(b, c)) = \alpha(c, a, b)\rho(ab, c)\alpha(a, b, c) .$$

Cette relation traduit l'égalité des deux chaînes de transformations

$$a(bc) = a(cb) = (ac)b = (ca)b ,$$

⁽¹⁾ Cette interprétation d'une démonstration algébrique comme une flèche d'une catégorie joue un rôle important dans certaines études récentes sur la compilation et les transformations de programmes.

$$a(bc) = (ab)c = c(ab) = (ca)b .$$

On pourra traduire la contrainte d'associativité en un *diagramme pentagonal* et celle de commutativité en un *diagramme hexagonal*.

Si les contraintes d'associativité et de commutativité sont remplies et si $\rho(a, b)$ est inverse de $\rho(b, a)$ pour tous les objets a, b , alors pour tout σ dans Σ_n , le foncteur $\sigma_*(a_1, \dots, a_n)$ dépend "symétriquement" des objets a_1, \dots, a_n de \mathcal{C} .

3.3. *La dualité de Tannaka pour les groupes algébriques* repose sur les deux théorèmes suivants de Chevalley [B15], où V désigne un espace vectoriel de dimension finie (sur \mathbf{C}) et G un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(V)$.

THÉORÈME A.— *Toute représentation linéaire (π, W) de G correspondant à une application polynomiale de G dans $\mathrm{GL}(W)$ peut se réaliser, à l'équivalence près, dans un sous-quotient d'un espace de la forme $\bigoplus_{i=1}^s V^{\otimes n_i} \otimes (V^\vee)^{\otimes m_i}$, où V^\vee est le dual de V .*

THÉORÈME B.— *Il existe un nombre fini d'entiers r_1, \dots, r_k et des droites D_i dans $V^{\otimes r_i}$ (pour $1 \leq i \leq k$) tels que G se compose des éléments de $\mathrm{GL}(V)$ qui stabilisent chacune des droites D_1, \dots, D_k .*

Supposons alors que \mathcal{C} soit une famille de représentations $(\pi_i, W_i)_{i \in I}$ du groupe G , polynomiales au sens du théorème A. On suppose de plus que \mathcal{C} est stable par somme directe, produit tensoriel, passage au dual et aux sous-espaces et espaces quotients. Si \mathcal{C} contient une représentation fidèle, alors toute représentation polynomiale de G est isomorphe à l'une des représentations (π_i, W_i) . Cela résulte du théorème A.

Mais, d'après le théorème B, le groupe lui-même peut être reconstruit à partir de la famille de ses représentations. Par hypothèse, la famille \mathcal{C} est stable par produit tensoriel ; notons $i \times j$ l'élément de I tel que $\pi_{i \times j} = \pi_i \otimes \pi_j$ et $W_{i \times j} = W_i \otimes W_j$. Supposons donnée une famille d'automorphismes $g_i \in \mathrm{GL}(W_i)$ satisfaisant aux deux conditions :

a) on a $f g_i = g_j f$ pour toute application G -équivariante f de W_i dans W_j ;

b) on a $g_{i \times j} = g_i \otimes g_j$.

Dans ces conditions, il existe un unique élément g de G tel que $\pi_i(g) = g_i$ pour tout $i \in I$.

Lorsque le groupe G est réductif, toutes ses représentations linéaires sont semi-simples (= complètement réductibles). La reconstruction précédente du groupe G peut être modifiée : on part de la classe \mathcal{S} des représentations simples (= irréductibles), notées (π_λ, W_λ) pour λ dans Λ . Notons $H_{\lambda \times \mu, \nu}$ l'ensemble des applications linéaires u de $W_\lambda \otimes W_\mu$ dans W_ν telles que l'on ait

$$(3.10) \quad u \cdot (\pi_\lambda(g) \otimes \pi_\mu(g)) = \pi_\nu(g) \cdot u$$

pour tout g dans G . Alors toute collection d'automorphismes $g_\lambda \in \text{GL}(W_\lambda)$ qui satisfait à la relation

$$(3.11) \quad u \cdot (g_\lambda \otimes g_\mu) = g_\nu \cdot u,$$

quels que soient λ, μ, ν dans Λ et u dans $H_{\lambda \times \mu, \nu}$, provient d'un unique élément g de G par la règle $g_\lambda = \pi_\lambda(g)$.

Le cas classique des groupes compacts s'obtient par les modifications suivantes: on considère seulement les représentations unitaires continues dans des espaces de Hilbert de dimension finie ; ainsi $\pi_i(g)$ est un opérateur unitaire dans W_i . Dans la reconstruction du groupe G , on impose aux g_i (ou aux g_λ) d'être des opérateurs unitaires. Les deux versions ci-dessus sont valables, et le groupe G est un groupe de Lie si et seulement si G possède une représentation fidèle, ou — ce qui revient au même — si la classe \mathcal{C} est engendrée par un nombre fini de représentations au moyen des opérations permises : somme directe, produit tensoriel, dual, sous-espace et espace-quotient. Nous ajouterons deux remarques :

a) les représentations linéaires continues d'un groupe compact sont semi-simples ;

b) tout sous-groupe fermé du groupe unitaire $U(n)$ est l'intersection $G \cap U(n)$ avec $U(n)$ d'un unique sous-groupe algébrique de $\text{GL}(n, \mathbf{C})$.

3.4. Il y a de nombreuses situations où le groupe n'est pas donné à l'avance, mais où on dispose de ce qui sera la classe de ses représentations. La question se pose en Géométrie algébrique où Grothendieck a inventé la

“philosophie des motifs” à ce sujet, et en Physique mathématique où l’on aimerait traduire les règles de supersélection (certaines règles de conservation généralisant par exemple celle de la charge électrique) par l’existence d’un groupe de jauge. Il y a deux chaînes de recherches indépendantes : l’une commencée par Grothendieck a bénéficié des contributions de Saavedra, Milne et Deligne ; l’autre, dans le cadre des espaces de Hilbert, doit presque tout à Doplicher, Roberts et Woronowicz.

Le problème est donc de reconstruire un groupe algébrique à partir d’une catégorie de “représentations”. Si G est un sous-groupe algébrique de $GL(n, \mathbf{C})$, on lui associe l’algèbre $A = A(G)$ des fonctions “polynomiales” sur G , de la forme $P(g_{11}, \dots, g_{nn})/(\det g)^s$, pour $g = (g_{ij})$, avec un polynôme P à n^2 variables et un entier $s \geq 0$. Les points de G correspondent aux homomorphismes d’algèbres de A dans \mathbf{C} , et la multiplication dans G se dualise en un homomorphisme Δ de A dans $A \otimes A$ tel que $\Delta(P) = \sum_i P'_i \otimes P''_i$ signifie $P(g'g'') = \sum_i P'_i(g')P''_i(g'')$. De même, l’unité de G correspond à un homomorphisme $\varepsilon : A \rightarrow \mathbf{C}$ et l’inversion $g \mapsto g^{-1}$ dans G à un homomorphisme $S : A \rightarrow A$. Les objets

$$A, \Delta : A \rightarrow A \otimes A, \varepsilon : A \rightarrow \mathbf{C}, S : A \rightarrow A$$

satisfont à des conditions qui caractérisent axiomatiquement les *algèbres de Hopf*. Les représentations linéaires polynomiales de G correspondent aux comodules V sur A (application structurale $V \rightarrow A \otimes V$) de dimension finie sur \mathbf{C} . Parmi les algèbres de Hopf, celles qui correspondent aux groupes algébriques sont celles qui satisfont à la condition (fondamentale) que l’algèbre A est commutative et la condition (secondaire) que l’algèbre A a un nombre fini de générateurs.

3.5. Le passage des groupes algébriques aux groupes “quantiques” se fait en affaiblissant l’hypothèse de commutativité de la multiplication.

Nous partons d’une catégorie abélienne \mathcal{C} munie d’un foncteur exact et fidèle dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbf{C} . De manière concrète, on dispose d’une famille $(V_i)_{i \in I}$ de tels espaces vectoriels, et pour chaque paire i, j d’un sous-espace $\mathcal{H}_{i,j}$ de l’ensemble $\text{Hom}(V_i, V_j)$ des applications linéaires de V_i dans V_j . On suppose que la famille des

V_i est stable par somme directe finie, et que le noyau et le conoyau d'un élément de \mathcal{H}_{ij} sont encore dans la famille $(V_i)_{i \in I}$ (avec des conditions convenables sur la composition).

Sous ces hypothèses, la catégorie \mathcal{C} se compose des comodules sur une coalgèbre A qu'on reconstruit comme suit : on note V la somme directe des V_i ; on identifie $\prod_i \text{End}(V_i)$ à une sous-algèbre E de $\text{End}(V)$ et la somme directe des \mathcal{H}_{ij} à une autre sous-algèbre H (sans unité) de $\text{End}(V)$. Soit F l'ensemble des éléments de E qui commutent à tous ceux de H ; c'est une sous-algèbre fermée de $\prod_i \text{End}(V_i)$ munie de la topologie produit ; le dual topologique de F est la coalgèbre cherchée.

Le produit $m : A \otimes A \rightarrow A$ s'obtiendra en munissant la catégorie \mathcal{C} d'un foncteur $\Phi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ avec une contrainte d'associativité ; on écrira $i \times j$ pour $\Phi(i, j)$. On suppose qu'on a $V_{i \times j} = V_i \otimes V_j$ et que la contrainte d'associativité de $i \times (j \times k)$ sur $(i \times j) \times k$ correspond à l'isomorphisme canonique de $V_i \otimes (V_j \otimes V_k)$ sur $(V_i \otimes V_j) \otimes V_k$. Grâce à cela, la multiplication dans A sera définie et associative. De manière analogue, l'unité dans A correspond à un objet particulier 1 dans \mathcal{C} tel que $1 \times i$ et $i \times 1$ soient isomorphes à i . L'antipodisme $S : A \rightarrow A$ correspond à un foncteur de dualité $i \mapsto i^\vee$ dans \mathcal{C} avec un isomorphisme fonctoriel de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(i \times j, k)$ sur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(i, j^\vee \times k)$; on impose de plus que V_{i^\vee} soit le dual de l'espace V_i .

La commutativité de l'algèbre A correspond dans ce cadre à une contrainte de commutativité $\rho : i \times j \rightarrow j \times i$ dans la catégorie \mathcal{C} compatible avec celle des espaces vectoriels, en ce sens que ρ induit l'isomorphisme $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ de $V_{i \times j} = V_i \otimes V_j$ sur $V_{j \times i} = V_j \otimes V_i$.

Drinfeld vient d'examiner, sous le nom de *quasi-algèbres de Hopf*, ce qui se passe lorsque l'on donne dans la catégorie \mathcal{C} un foncteur $\Phi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tel que $V_{i \times j} = V_i \otimes V_j$, muni de contraintes d'associativité et de commutativité qui n'ont plus rien à voir avec celles du produit tensoriel. Pour chaque entier $n \geq 1$, notons $A^{\otimes n}$ la coalgèbre produit tensoriel de n facteurs égaux à A , et \mathcal{A}_n l'algèbre duale de $A^{\otimes n}$. La multiplication $a \otimes b \mapsto ab$ dans A se dualise en un coproduit $\Delta : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$, de même Δ' est duale de la multiplication opposée $a \otimes b \mapsto ba$ dans A .

Supposons d'abord que la contrainte d'associativité soit compatible au produit tensoriel. Il existe alors un élément inversible R de \mathcal{A}_2 tel que l'on

ait

$$(3.12) \quad \Delta'(a) = R \Delta(a) R^{-1} \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}_1 .$$

Pour i dans I , le comodule V_i sur A est aussi un module sur le dual \mathcal{A}_1 de A ; de même $V_i \times_j = V_i \otimes V_j$ est un comodule sur $A^{\otimes 2}$, donc un module sur \mathcal{A}_2 , et R définit un opérateur R_{ij} dans $V_i \otimes V_j$. La contrainte de commutativité dans la catégorie \mathcal{C} est alors l'isomorphisme $P_{ij} R_{ij}$ de $V_i \otimes V_j$ sur $V_j \otimes V_i$, où $P_{ij}(x_i \otimes x_j) = x_j \otimes x_i$. La relation (3.12) exprime le défaut de commutativité de l'algèbre A , puisque $R = 1$ correspond au cas où A est commutative. Le diagramme hexagonal se traduit alors par les formules

$$(3.13) \quad \Delta_{12}(R) = R_{13} R_{23}$$

$$(3.14) \quad \Delta_{23}(R) = R_{13} R_{12}$$

qui entraînent la relation de Yang-Baxter

$$(3.15) \quad R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12} .$$

Noter que R_{12} par exemple est égal à R agissant sur les facteurs 1 et 2 de $A^{\otimes 3}$ par $\langle R_{12}, a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \rangle = \langle R, a_1 \otimes a_2 \rangle \cdot \langle \varepsilon, a_3 \rangle$. De même, Δ_{12} est dual de l'application $a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \mapsto a_1 a_2 \otimes a_3$ de $A^{\otimes 3}$ dans $A^{\otimes 2}$.

La déviation éventuelle entre les contraintes d'associativité pour la catégorie \mathcal{C} et pour le produit tensoriel se traduira par l'existence d'un élément inversible ϕ de \mathcal{A}_3 . Le diagramme hexagonal et l'équation de Yang-Baxter prendront alors les formes modifiées

$$(3.13 \text{ bis}) \quad \Delta_{12}(R) = \phi_{312} R_{13} \phi_{132}^{-1} R_{23} \phi_{123}$$

$$(3.14 \text{ bis}) \quad \Delta_{23}(R) = \phi_{231}^{-1} R_{13} \phi_{213} R_{12} \phi_{123}^{-1}$$

$$(3.15 \text{ bis}) \quad R_{12} \phi_{312} R_{13} \phi_{132}^{-1} R_{23} \phi_{123} = \phi_{321} R_{23} \phi_{231}^{-1} R_{13} \phi_{213} R_{12} .$$

Le diagramme pentagonal se traduit par l'identité suivante dans \mathcal{A}_4

$$(3.16) \quad \Delta_{34}(\phi) \Delta_{12}(\phi) = \phi_{234} \cdot \Delta_{23}(\phi) \cdot \phi_{123} .$$

3.6. Donnons un exemple simple pour conclure. Considérons l'espace $V = \mathbf{C}^N$ avec sa base naturelle e_1, \dots, e_N ; soit q un nombre complexe qui n'est pas une racine de l'unité. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n(q)$ est semi-simple et agit sur l'espace $V^{\otimes n}$ comme il a été expliqué au n° 2.2. Considérons la catégorie \mathcal{C} dont les objets sont les espaces $V^{\otimes n}$, où les seuls morphismes sont les endomorphismes des $V^{\otimes n}$ fournis par les éléments de $\mathcal{H}_n(q)$. On considère le foncteur Φ qui associe à $V^{\otimes m}$ et $V^{\otimes n}$ leur produit tensoriel $V^{\otimes(m+n)}$. La contrainte d'associativité est celle des produits tensoriels; par contre, la contrainte de commutativité de $V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n}$ sur $V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m}$ est $P^{(m,n)} R^{(m,n)}$ où $P^{(m,n)}$ est la contrainte usuelle et

$$(3.17) \quad R^{(m,n)} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n R_{i,m+j}$$

(avec les notations du n° 2.2).

L'algèbre de Hopf A_N obtenue admet les générateurs t_{ij} (pour $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$) satisfaisant aux relations

$$(3.18) \quad T^{(1)} T^{(2)} R = R T^{(2)} T^{(1)}$$

où T est la matrice des t_{ij} , où $T^{(1)} = T \otimes I_N, T^{(2)} = I_N \otimes T$. Lorsque $q = 1$, ceci exprime la commutativité des t_{ij} . Le coproduit est donné dans A_N par

$$(3.19) \quad \Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^N t_{ik} \otimes t_{kj}.$$

Il s'agit là de la déformation de l'algèbre⁽¹⁾ des fonctions polynômes sur $GL(N, \mathbf{C})$ que Faddeev et Woronowicz considèrent comme le groupe quantique associé au groupe $GL(N, \mathbf{C})$. Le point de vue dual (Drinfeld, Jimbo) est celui de la déformation $U_q(\mathfrak{gl}(N, \mathbf{C}))$ de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(N, \mathbf{C})$.

⁽¹⁾ Il faudra en fait adjoindre à A_N l'inverse du déterminant quantique $\det_q T$, un polynôme qui pour $q = 1$ se réduit au déterminant de la matrice T .

4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET MONODROMIE

4.1. Nous considérons le sous-espace ouvert \mathbf{C}_*^n de \mathbf{C}^n formé des vecteurs à composantes distinctes. On pose

$$(4.1) \quad \omega_{ij} = d \log(z_i - z_j) = \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}$$

pour $i \neq j$, en notant z_1, \dots, z_n les coordonnées sur \mathbf{C}^n ; les ω_{ij} sont des formes différentielles holomorphes sur \mathbf{C}_*^n et elles satisfont aux relations quadratiques

$$(4.2) \quad \omega_{ij} \wedge \omega_{jk} + \omega_{jk} \wedge \omega_{ki} + \omega_{ki} \wedge \omega_{ij} = 0$$

(i, j, k distincts). De plus, on a $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. Soit \mathcal{A}_n l'algèbre de formes différentielles holomorphes engendrée (sur \mathbf{C}) par les ω_{ij} . Les relations (4.2) forment une présentation de cette algèbre anticommutative. De plus, les formes appartenant à \mathcal{A}_n constituent des représentants de la cohomologie de de Rham de \mathbf{C}_*^n , d'où un isomorphisme $H^*(\mathbf{C}_*^n; \mathbf{C}) \simeq \mathcal{A}_n$ (théorème d'Arnold).

4.2. Donnons-nous un espace vectoriel W de dimension finie sur \mathbf{C} , et des endomorphismes A_{ij} de W . On considère la forme différentielle $\Omega = \sum_{i < j} A_{ij} \omega_{ij}$ sur \mathbf{C}_*^n , à valeurs dans $\text{End}(W)$, et le système différentiel $dF = \Omega F$; les solutions sont des fonctions holomorphes $F(z) = F(z_1, \dots, z_n)$ définies sur des ouverts de \mathbf{C}_*^n à valeurs dans $\text{End}(W)$. Soit γ un lacet de classe C^∞ dans \mathbf{C}_*^n , donné paramétriquement sous la forme $(\gamma(t))_{0 \leq t \leq 1}$. Si $F_a(z)$ est une solution de $dF = \Omega F$ au voisinage de $\gamma(0)$, on peut prolonger analytiquement $F_a(z)$ le long de γ . La fonction $F_b(z)$ obtenue est une solution de l'équation $dF = \Omega F$ au voisinage de $\gamma(1) = \gamma(0)$; elle est donnée par la formule de Lappo-Danilewski

$$(4.3) \quad F_b(z) = F_a(z) T(\gamma)$$

avec l'expression suivante pour le transport parallèle

$$(4.4) \quad T(\gamma) = \sum_{k \geq 0} \int_{\Delta_k} A(t_1) \cdots A(t_k) dt_1 \cdots dt_k .$$

Dans cette formule intégrale, le domaine d'intégration Δ_k est défini par les inégalités $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq 1$ et la forme différentielle opératorielle $A(t) dt$ s'obtient par la substitution $z = \gamma(t)$ dans Ω .

4.3. Le système différentiel $dF = \Omega F$ est *complètement intégrable* si $T(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet γ (d'origine fixée). Le critère classique est le suivant

$$(4.5) \quad d\Omega - \Omega \wedge \Omega = 0 ;$$

les deux membres appartiennent à $\mathcal{A}_n \otimes \text{End } W$, et vu le théorème d'Arnold cité en 4.1, cette relation équivaut aux suivantes :

$$(4.6) \quad [A_{ij}, A_{ik} + A_{jk}] = 0 \quad \text{pour } i, j, k \text{ distincts}$$

$$(4.7) \quad [A_{ij}, A_{k\ell}] = 0 \quad \text{pour } i, j, k, \ell \text{ distincts .}$$

S'il en est ainsi, choisissons un point-base a dans \mathbf{C}_*^n et réalisons le groupe de tresses pures P_n comme le groupe $\pi_1(\mathbf{C}_*^n; a)$. La formule de transport parallèle (4.4) appliquée aux lacets en a fournit une représentation linéaire du groupe P_n dans l'espace W ; elle transforme la classe d'homotopie du lacet γ en l'automorphisme $T(\gamma)^{-1}$ de W .

Introduisons l'algèbre de Lie \mathcal{G}_n quotient de l'algèbre de Lie libre de générateurs $X_{ij} = X_{ji}$ (pour $i < j$) par l'idéal engendré par les éléments :

$$[X_{ij}, X_{ik} + X_{jk}] \quad \text{et} \quad [X_{ij}, X_{k\ell}]$$

sous les mêmes conditions que (4.6) et (4.7). On note ξ_{ij} l'image de X_{ij} dans \mathcal{G}_n et l'on introduit la forme différentielle "générique"

$$(4.8) \quad \omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} \otimes \xi_{ij}$$

dans $\mathcal{A}_n \otimes \mathcal{G}_n$.

Le résultat précédent peut se traduire en disant que toute représentation linéaire ρ de \mathcal{G}_n dans l'espace W (envoyant ξ_{ij} sur A_{ij} , donc ω sur Ω) définit une représentation linéaire T du groupe P_n dans W . Réciproquement, toute représentation du groupe P_n par des automorphismes unipotents de

W provient d'une représentation ρ de \mathcal{G}_n par des endomorphismes nilpotents de W ⁽¹⁾. Il est donc raisonnable de considérer l'algèbre de Lie \mathcal{G}_n comme l'algèbre de Lie du groupe P_n (ou aussi du groupe B_n dans lequel il est d'indice fini) et les relations

$$(4.9) \quad [\xi_{ij}, \xi_{ik} + \xi_{jk}] = 0 \quad , \quad [\xi_{ij}, \xi_{k\ell}] = 0$$

comme l'analogie infinitésimal des relations (1.3) et (1.4) de définition de B_n . Cette interprétation est renforcée par le théorème suivant (cas particulier des théorèmes sur la monodromie que j'ai exposés dans [F1]) :

Soit $(\mathbf{C}P_n)^\wedge$ le complété de l'algèbre du groupe $\mathbf{C}P_n$ pour la topologie I -adique, où I est l'idéal d'augmentation (engendré par les $g - 1$ pour g dans P_n). De manière analogue, complétons l'algèbre enveloppante $U\mathcal{G}_n$ en $(U\mathcal{G}_n)^\wedge$ pour la topologie J -adique, où J est l'idéal bilatère engendré par \mathcal{G}_n dans $U\mathcal{G}_n$. Les algèbres $(\mathbf{C}P_n)^\wedge$ et $(U\mathcal{G}_n)^\wedge$ sont isomorphes, et le groupe P_n se plonge dans $(\mathbf{C}P_n)^\wedge$.

4.4. Voici une manière de construire des solutions des équations (4.6) et (4.7). L'équation de Yang-Baxter classique s'écrit sous la forme

$$(4.10) \quad [r_{12}(u_{12}), r_{13}(u_{13})] + [r_{12}(u_{12}), r_{23}(u_{23})] + [r_{13}(u_{13}), r_{23}(u_{23})] = 0 .$$

La signification est la suivante : V est un espace vectoriel de dimension finie, $r(u)$ est un opérateur dans $V \otimes V$ dépendant du paramètre complexe u de manière holomorphe ou méromorphe, on pose $u_{ij} = u_i - u_j$ et $r_{ij}(u)$ désigne $r(u)$ agissant sur les facteurs d'indices i et j (avec $i < j$) du produit tensoriel triple $V^{\otimes 3}$. D'après Belavin et Drinfeld [F2], on obtient comme suit une solution de (4.10) : choisissons une algèbre de Lie semi-simple

⁽¹⁾ Dans [F5], Kohno démontre la réciproque sous l'hypothèse que la représentation de P_n est "assez voisine de l'identité". Il se réfère pour cela à un résultat de Golubeva (Math. USSR Izvest. 17 (1981), p. 227-241) qui ne s'applique malheureusement pas au cas utilisé. On peut cependant réparer la démonstration en utilisant le théorème d'approximation de M. Artin.

complexe \mathcal{G} , de forme de Killing B , une base (I_μ) de \mathcal{G} orthonormale pour B et une représentation linéaire ρ de \mathcal{G} dans V . On pose alors

$$(4.11) \quad r(u) = t/u \quad \text{avec} \quad t = \sum_{\mu} \rho(I_\mu) \otimes \rho(I_\mu).$$

En utilisant le fait que l'élément $\sum_{\mu} I_\mu \otimes I_\mu$ de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ est invariant par la représentation adjointe de \mathcal{G} , on établit les relations

$$(4.12) \quad [t_{12}, t_{13} + t_{23}] = [t_{23}, t_{12} + t_{13}] = 0$$

et (4.10) s'ensuit immédiatement. Par ailleurs, si l'on note W l'espace $V^{\otimes n}$, les opérateurs t_{ij} , agissant dans W selon nos conventions habituelles, satisfont aux relations

$$(4.13) \quad [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0 \quad , \quad [t_{ij}, t_{k\ell}] = 0$$

analogues à (4.6) et (4.7). Si l'on fait agir simultanément le groupe symétrique S_n sur C_*^n (par permutation des coordonnées) et sur $W = V^{\otimes n}$ de la manière habituelle, la forme différentielle $\Omega = \lambda \sum_{i < j} t_{ij} \omega_{ij}$ est invariante par S_n pour toute valeur complexe de λ ; on obtient alors un système complètement intégrable sur l'espace de configuration $\Phi_n(C) = C_*^n / S_n$. Par intégration, on en déduit une représentation de monodromie T_λ de $B_n = \pi_1(\Phi_n(C))$ dans W . Il résulte des raisonnements classiques de Fuchs sur les singularités des équations différentielles que l'opérateur $T_\lambda(\sigma_j)$ dans W correspondant au générateur σ_j de B_n est conjugué dans $GL(V^{\otimes n})$ à $P_j \exp \pi i \lambda t_{j,j+1}$, où P_j est l'échange des facteurs de rang j et $j+1$ dans le produit tensoriel $V^{\otimes n}$.

4.5. Drinfeld a réussi dans [D9] à identifier la représentation T_λ de B_n . Écrivons l'équation $dF = \Omega F$ sous la forme de Zamolodchikov

$$(4.14) \quad \frac{\partial F}{\partial z_j} = \lambda \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{t_{jk}}{z_j - z_k} \cdot F ;$$

elle est invariante si l'on soumet chaque variable z_j à la même transformation affine $z_j \mapsto a z_j + b$. Par suite, pour $n = 3$, on obtient des solutions

sous la forme

$$(4.15) \quad F(z_1, z_2, z_3) = G \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \right) (z_1 - z_3)^{\lambda(t_{12} + t_{13} + t_{23})} ;$$

sur le revêtement universel de \mathbf{C}_*^3 , le logarithme de $z_1 - z_3$ a un sens et l'on a posé $(z_1 - z_3)^\alpha = \exp \alpha \log(z_1 - z_3)$ (comme il se doit). La fonction G est définie sur le revêtement universel de $\mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$, à valeurs dans $\text{End}(V^{\otimes 3})$, et satisfait à l'équation différentielle

$$(4.16) \quad \frac{dG}{dx} = \lambda \left(\frac{t_{12}}{x} + \frac{t_{23}}{x-1} \right) G(x) .$$

Conformément à la théorie de Fuchs, il y a une solution $G_1(x)$ se comportant comme $x^{\lambda t_{12}}$ pour x tendant vers 0, et une solution $G_2(x)$ se comportant comme $(1-x)^{\lambda t_{23}}$ pour x tendant vers 1. Ces deux solutions diffèrent par une constante, d'où un automorphisme $\phi_V(\lambda)$ de $V^{\otimes 3}$ tel que $G_1(x) = G_2(x) \phi_V(\lambda)$ pour tout x . On montre facilement qu'il existe une série formelle $\phi(\lambda)$ en la variable λ , à coefficients dans $(U\mathcal{G})^{\otimes 3}$, indépendante de la représentation linéaire (ρ, V) de \mathcal{G} , dont l'image par $\rho^{\otimes 3}$ donne le développement en série de $\phi_V(\lambda)$.

En étudiant le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Zamolodchikov pour $n = 4$, lorsque certaines des différences $z_j - z_k$ tendent vers 0, on établit l'analogie suivant de la relation (3.16)

$$(4.17) \quad \Delta_{34}(\phi) \Delta_{12}(\phi) = \phi_{234} \cdot \Delta_{23}(\phi) \cdot \phi_{123} ,$$

à interpréter comme égalité de séries formelles en λ à coefficients dans $(U\mathcal{G})^{\otimes 4}$. Dans cette formule, le coproduit $\Delta : U\mathcal{G} \rightarrow (U\mathcal{G})^{\otimes 2}$ est le classique, tel que $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour x dans \mathcal{G} . Drinfeld démontre ensuite, par une procédure récursive, l'existence d'une série formelle $F(\lambda)$ à coefficients dans $(U\mathcal{G})^{\otimes 2}$, telle que $F(0) = 1$ et

$$(4.18) \quad \phi(\lambda) = F_{23}(\lambda) (\Delta_{23} F)(\lambda) (\Delta_{12} F)(\lambda)^{-1} F_{12}(\lambda)^{-1} .$$

On modifie le coproduit dans $(U\mathcal{G})[[\lambda]]$ en posant

$$(4.19) \quad \Delta_\lambda(a) = F(\lambda) \Delta(a) F(\lambda)^{-1}$$

pour a dans UG . D'après les équations (4.17) et (4.18), le *nouveau coproduit* Δ_λ est *coassociatif*. Grâce à un théorème d'unicité convenable, Drinfeld montre que l'algèbre $(UG)[[\lambda]]$ munie du coproduit Δ_λ est isomorphe à la quantification de Drinfeld-Jimbo de UG . Notons $F_{21}(\lambda)$ l'image de $F(\lambda) = F_{12}(\lambda)$ par la symétrie de $(UG)^{\otimes 2}$. Alors, on définit une série formelle $R(\lambda)$ à coefficients dans $(UG)^{\otimes 2}$ par la formule

$$(4.20) \quad R(\lambda) = F_{21}(\lambda) \cdot \left(\exp \lambda \sum_{\mu} (I_{\mu} \otimes I_{\mu}) / 2 \right) \cdot F_{12}(\lambda)^{-1} .$$

Elle satisfait à l'équation de Yang-Baxter

$$(4.21) \quad R_{12}(\lambda) R_{13}(\lambda) R_{23}(\lambda) = R_{23}(\lambda) R_{13}(\lambda) R_{12}(\lambda)$$

(égalité de séries formelles à coefficients dans $(UG)^{\otimes 3}$).

En conclusion, la représentation T_λ de B_n par des opérateurs dans $W = V^{\otimes n}$ est équivalente⁽¹⁾ à la représentation de B_n qui applique le générateur σ_i sur l'opérateur

$$\rho^{\otimes n} \left(\underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{i-1} \otimes R(\lambda) \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n-i-1} \right) .$$

Par exemple, si $\mathcal{G} = \mathfrak{sl}(N, \mathbf{C})$ avec la représentation naturelle ρ dans \mathbf{C}^N , on a

$$(4.22) \quad t(x \otimes y) = \frac{1}{2N} (y \otimes x) - \frac{1}{2N^2} (x \otimes y) .$$

Si l'on pose $q = e^{\pi i \lambda / N}$, la représentation obtenue est celle liée à $\mathcal{H}_n(q)$, à torsion près par une représentation de degré 1 de B_n (voir le n° 2.2).

(1) Au sens des séries formelles en λ ; il faudrait établir la convergence !

5. CATÉGORIES ASSOCIÉES AUX TRESSES ET AUX CABLAGES

5.1. Turaev et Reshetikhin, après Freyd et Yetter, ont introduit un calcul graphique, lié aux tresses, et aux cablages qui les généralisent. Cela leur a permis de donner dans [C19] une construction rigoureuse des invariants associés par Witten aux variétés de dimension 3 ; pour ces invariants, je renvoie à la brillante description donnée dans ce même Séminaire par M. Atiyah. La méthode de Turaev et Reshetikhin fournit aussi un traitement graphique du calcul tensoriel classique, très proche de celui de Penrose dans [G8].

5.2. Le point de départ est que *les tresses colorées forment une catégorie*. Introduisons un ensemble \mathcal{X} de “couleurs”. Les objets de la catégorie $Tr(\mathcal{X})$ sont les suites (x_1, \dots, x_n) d’éléments de \mathcal{X} ; les morphismes sont les tresses “colorées”, chaque brin étant associé à un élément de \mathcal{X} . Une telle coloration des n brins détermine évidemment une coloration des extrémités supérieures, donnant une suite (x_1, \dots, x_n) qui est l’objet de $Tr(\mathcal{X})$ dont part la tresse colorée ; définition analogue du but par les extrémités inférieures. Avec ces conventions, la composition des tresses est telle qu’un brin garde la même couleur tout au long. De plus, on définit un foncteur strictement associatif Φ dans $Tr(\mathcal{X})$: sur les objets, on a $\Phi(x, x') = (x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_{n'})$ si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $x' = (x'_1, \dots, x'_{n'})$; sur les flèches, on juxtapose une tresse à n brins t à gauche et une tresse à n' brins t' à droite. Notation $x \times x'$ pour $\Phi(x, x')$ et $t \times t'$ pour $\Phi(t, t')$. Il y a une contrainte de commutativité qu’on laisse au lecteur le soin de décrire graphiquement.

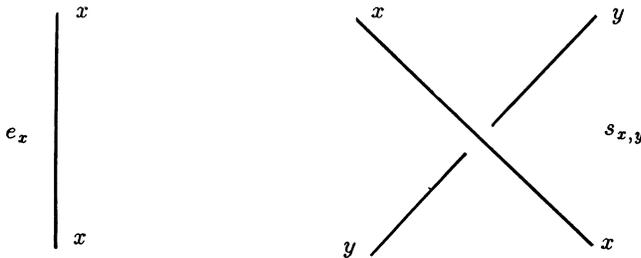
Supposons alors qu’à chaque couleur $x \in \mathcal{X}$ on associe un espace vectoriel V_x et qu’on se donne des opérateurs linéaires $R_{x,y} : V_x \otimes V_y \rightarrow V_x \otimes V_y$. On suppose que, pour tout triplet de couleurs x, y, z , on a la relation de Yang-Baxter

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}$$

entre opérateurs sur $V_x \otimes V_y \otimes V_z$; par exemple, on a $R_{12} = R_{x,y} \otimes \text{Id}_{V_z}$, etc...

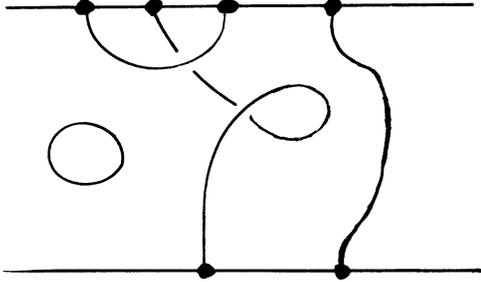
On peut alors généraliser la construction du n° 2.1. Si t est une tresse colorée, de source $x = (x_1, \dots, x_n)$ et de but $y = (y_1, \dots, y_n)$, on lui associe une application linéaire $H(t)$ de $H(x) = V_{x_1} \otimes \dots \otimes V_{x_n}$ dans $H(y) = V_{y_1} \otimes \dots \otimes V_{y_n}$. On obtient ainsi un foncteur H de la catégorie $Tr(\mathcal{X})$ dans celle des espaces vectoriels sur \mathbf{C} . Il est caractérisé par les propriétés suivantes :

- a) on a $H(x \times y) = H(x) \otimes H(y)$ pour les objets et les flèches ;
- b) si $s_{x,y}$ est la tresse colorée à 2 brins ci-dessous, on a $H(S_{x,y}) = \sigma_{x,y} R_{x,y}$, où $\sigma_{x,y}$ est la symétrie usuelle de $V_x \otimes V_y$ sur $V_y \otimes V_x$;
- c) si e_x est la tresse à 1 brin ci-dessous, $H(e_x)$ est l'application identique de V_x .



5.3. On généralise la notion de tresse en celle de *cablage*. Supposons donc donnés deux plans parallèles Π et Π' , une suite de points distincts P_1, \dots, P_n dans Π et de même P'_1, \dots, P'_n dans Π' . Un cablage M ayant les extrémités $P_1, \dots, P_n, P'_1, \dots, P'_n$, sera réunion d'un nombre fini d'arcs ou de lacets (différentiables par morceaux) ; on fait les hypothèses suivantes :

- a) ces arcs et lacets sont deux à deux disjoints ;
- b) les extrémités des arcs appartiennent à l'ensemble $\{P_1, \dots, P_n, P'_1, \dots, P'_n\}$ et chacun de ces points intervient exactement une fois ;
- c) si C est l'un des arcs ou lacets, il est transverse à tous les plans parallèles à Π et Π' sauf éventuellement un nombre fini ;
- d) M est entièrement contenu dans la région H comprise entre les plans Π et Π' .



Une projection plane d'un cablage

On remarquera qu'un entrelac n'est autre qu'un cablage dont l'ensemble des extrémités est vide. De plus, on supposera chaque arc ou lacet orienté, et muni d'une couleur appartenant à un ensemble \mathcal{X} . Deux telles configurations sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme de \mathbf{R}^3 , conservant l'orientation et transformant l'une en l'autre.

Ces cablages colorés forment les flèches d'une catégorie $Cab(\mathcal{X})$ dont les objets sont les suites $(x_1, \varepsilon_1, \dots, x_n, \varepsilon_n)$ formées de couleurs x_1, \dots, x_n et de nombres $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ égaux à 1 ou -1 . Les conventions de source et de but sont figurées ci-dessous



A côté des configurations fournies par les tresses, apparaissent deux situations élémentaires nouvelles



5.4. Décrivons maintenant une méthode très générale pour fabriquer des invariants d'isotopie des entrelacs. On reprend les hypothèses du n° 3.5. Soit $(A, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf ; on note \mathcal{A}_n l'algèbre duale de la

coalgèbre $A^{\otimes n}$ et l'on suppose donné un élément R de \mathcal{A}_2 satisfaisant aux relations (3.12) à (3.15) de Drinfeld. On considère des comodules sur la coalgèbre A , de dimension finie comme espaces vectoriels sur \mathbf{C} ; ce sont des A_1 -modules. Si M et N sont deux tels comodules, R définit un opérateur $R_{M,N}$ dans l'espace vectoriel $M \otimes N$. De plus, l'antipodisme S de A permet d'associer à tout comodule M (à gauche sur A) un comodule M^\vee (à gauche sur A) dont l'espace vectoriel sous-jacent est le dual de M . On note aussi $\mathbf{1}$ le A -module ayant \mathbf{C} pour espace vectoriel sous-jacent avec le coproduit $\lambda \mapsto 1 \otimes \lambda$ de \mathbf{C} dans $A \otimes \mathbf{C}$. Il existe alors deux homomorphismes de comodules

$$e_M : \mathbf{1} \longrightarrow M \otimes M^\vee \quad , \quad \varepsilon_M : M^\vee \otimes M \longrightarrow \mathbf{1}$$

définis par

$$e_M(\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^N v_i \otimes v^i \quad , \quad \varepsilon_M(x \otimes y) = \langle x, y \rangle$$

(v_1, \dots, v_N forment une base de M sur \mathbf{C} , et v^1, \dots, v^N la base duale de M^\vee).

Supposons qu'on ait associé à chaque couleur $x \in \mathcal{X}$ un comodule M_x . Grâce aux opérateurs de Yang-Baxter R_{M_x, M_y} , on peut définir comme au n° 5.2 un foncteur H de la catégorie $Tr(\mathcal{X})$ dans celle des A -comodules. On peut alors étendre ce foncteur en un foncteur \tilde{H} de la catégorie $Cab(\mathcal{X})$ vers celle des comodules sur A . Il suffit d'ajouter les règles suivantes aux règles a), b) et c) du n° 5.2 :

d) *A un objet $(x_1, \varepsilon_1, \dots, x_n, \varepsilon_n)$ de $Cab(\mathcal{X})$, on associe le comodule $M_{x_1}^{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes M_{x_n}^{\varepsilon_n}$ (par convention, on a $M^+ = M$ et $M^- = M^\vee$) ; en particulier, l'objet vide de $Cab(\mathcal{X})$ donne par \tilde{H} le comodule $\mathbf{1}$.*

e) *Le foncteur \tilde{H} associe à la configuration a_x ci-dessous le morphisme e_{M_x} de $\mathbf{1}$ dans $M_x \otimes M_x^\vee$ et à b_x il associe le morphisme ε_{M_x} de $M_x^\vee \otimes M_x$ dans $\mathbf{1}$.*



Le point crucial est que deux cablages isotopes fournissent le même morphisme de comodules. En particulier, un entrelac coloré et orienté L fournit un endomorphisme de $\mathbf{1}$, c'est-à-dire un nombre complexe $e(L)$. Ce nombre ne dépend que de la classe d'isotopie de L . On comparera ce résultat aux théories quantiques des champs topologiques de Witten et Atiyah. Il restera à expliciter les invariants ainsi obtenus !!

BIBLIOGRAPHIE RAISONNÉE

A. Ouvrages généraux

Voici d'abord les textes fondateurs :

- [1] E. ARTIN - *Collected papers* (édités par S. Lang et J. Tate), Addison-Wesley, 1965. [Voir en particulier la partie consacrée à la Topologie (p. 416-498) qui contient les articles célèbres : *Theorie der Zöpfe* (1925), *Theory of braids* (1947), *Braids and permutations* (1947).]
- [2] W. BURAU - *Über Zopf invarianten*, Hamburg Abh. **9** (1932), p. 117-124.
- [3] A.A. MARKOV - *Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe*, Recueil Soc. Math. Moscou **43** (1936), p. 73-78.
- [4] R.H. FOX - *Free differential calculus I : Derivations in the free group ring*, Ann. of Math. **57** (1953), p. 547-560.
- [5] E. FADELL and L. NEUWIRTH - *Configuration spaces*, Math. Scand. **10** (1962), p. 111-118.

- [6] R.H. FOX and L. NEUWIRTH - *The braid groups*, Math. Scand. **10** (1962), p. 119-126.

Nous donnons maintenant une sélection de manuels consacrés essentiellement aux nœuds et tresses.

- [7] K. REIDEMEISTER - *Knotentheorie*, Erg. Math. Vol. 1, Springer (1932).
- [8] R.H. CROWELL and R.H. FOX - *Introduction to knot theory*, Ginn Co. (1963) (réimprimé dans GTM, vol. 57, Springer (1977)).
- [9] L. NEUWIRTH - *Knot groups*, Annals Math. Studies **56**, Princeton Univ. Press (1965).
- [10] W. MAGNUS, A. KARASS, D. SOLITAR - *Combinatorial group theory*, Interscience/Wiley (1966).
- [11] J. BIRMAN - *Braids, links and mapping class groups*, Annals Math. Studies **82**, Princeton Univ. Press (1974).
- [12] J. ROLFSEN - *Knots and links*, Publish or Perish (1976).
- [13] L. KAUFFMAN - *Formal knot theory*, Math. Notes **30**, Princeton Univ. Press (1983).
- [14] G. BURDE and H. ZIESCHANG - *Knots*, W. de Gruyter (1985).

Mentionnons également deux rapports au Séminaire N. Bourbaki qui ont conservé une certaine actualité :

- [15] A. GRAMAIN - *Rapport sur la théorie classique des nœuds* (1ère partie), Sémin. Bourbaki, exp. n° 485, juin 1976, Springer, Lect. Notes Math. **567** (1977), p. 222-237.
- [16] A. DOUADY - *Nœuds et structures de contact en dimension 3 [d'après D. Bennequin]*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 604 (février 1983), Astérisque **105-106**, 1983, p. 129-148.

Pour terminer, mentionnons un ouvrage récent explorant la plupart des aspects liés aux groupes de tresses :

- [17] J. BIRMAN and A. LIBGOBER (éditeurs) - *Braids*, Proceedings of a Research Conference, Contemporary Math. vol. 78, American Math. Soc. (1988).

B. Catégories et dualité

Articles fondamentaux sur les conditions de cohérence dans les catégories :

- [1] S. MACLANE - *Natural associativity and commutativity*, Rice Univ. Studies, **49** (1963), p. 28-46.
- [2] S. EILENBERG and G.M. KELLY - *Closed categories*, in Proc. Conf. Categorical Algebra, Springer (1966).
- [3] S. MACLANE - *Categories for the working mathematician*, GTM vol. 5, Springer (1974).
- [4] G.M. KELLY and M.L. LAPLAZA - *Coherence for compact closed categories*, J. Pure Appl. Alg. **19** (1980), p. 193-213.

Pour la dualité de Tannaka "classique" des groupes compacts, les articles de base :

- [5] T. TANNAKA - *Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen*, Tohoku Math. J. **45** (1939), p. 1-12.
- [6] M.G. KREIN - *A principle of duality for a bicomact group and a square block algebra*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **69** (1949), p. 725-728.
- [7] M. TAKESAKI - *A characterization of group algebras as a converse of Tannaka-Stinespring-Tatsuuma duality theorem*, Amer. J. Math. **91** (1969), p. 529-564.
- [8] S. DOPLICHER and J. ROBERTS - *Duals of compact Lie groups realized in the Cuntz algebras and their actions on C^* -algebras*, J. Funct. Anal. **74** (1987), p. 96-120.
- [9] S. DOPLICHER and J. ROBERTS - *Endomorphisms of C^* -algebras, cross products and duality for compact groups*, Ann. of Math. **130** (1989), p. 78-119.
- [10] S. DOPLICHER and J. ROBERTS - *A new duality theory for compact groups*, Invent. Math. **98** (1989), p. 157-218.

Pour une extension dans le cas des groupes quantiques :

- [11] P. GHEZ, R. LIMA and J. ROBERTS - *W^* -categories*, Pacific J. Math. **120** (1985), p. 79-109.

- [12] S.L. WORONOWICZ - *Duality in the C^* -algebra theory*, Proc. Int. Cong. Math., Varsovie 1983, vol. 2, p. 1347-1350.
- [13] S.L. WORONOWICZ - *Compact matrix pseudo-groups*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), p. 613-665.
- [14] S.L. WORONOWICZ - *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudo-groups. Twisted $SU(N)$* , Invent. Math. **93** (1988), p. 35-76.

Enfin, l'extension de la dualité de Tannaka-Krein aux groupes algébriques :

- [15] C. CHEVALLEY - *Théorie des groupes de Lie, tome II : groupes algébriques*, Hermann (1951).
- [16] P. CARTIER - *Dualité de Tannaka et algèbres de Lie*, C.R. Acad. Sci. Paris, **242** (1956), p. 322-325.
- [17] S. SAAVEDRA - *Catégories tannakiennes*, Lect. Notes Math. vol. 265, Springer (1972).
- [18] P. DELIGNE et J.S. MILNE - *Tannakian categories in Hodge cycles, Motives and Shimura varieties*, Lect. Notes Math. vol. 900, Springer (1982).
- [19] P. DELIGNE - *Catégories tannakiennes*, in Grothendieck's Festschrift, Prog. in Math., Birkhäuser (1990), à paraître.

C. Invariants polynomiaux des nœuds

Voici les articles originaux pour le polynôme de Jones :

- [1] V. JONES - *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), p. 1-25.
- [2] V. JONES - *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), p. 103-112.
- [3] V. JONES - *Braid groups, Hecke algebras and type II_1 factors*, in "Geometric methods in operator algebras", Proc. U.S.-Japan Symposium, Wiley, 1986, p. 242-273.
- [4] V. JONES - *On a certain value of the Kauffman polynomial*, Comm. Math. Phys.
- [5] V. JONES - *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. of Math. **126** (1987), p. 335-388.

- [6] V. JONES - *Notes on subfactors and statistical mechanics*, in "Braid group, knot theory and statistical mechanics" (C.N. Yang et M.L. Ge, éditeurs), World Scientific, 1989, p. 1-25.
- [7] A. OCNEANU - *Quantized groups, string algebras and Galois theory for algebras*, prépublication Penn. State Univ., 1985.
- [8] A. OCNEANU - *A polynomial invariant for knots : a combinatorial and an algebraic approach*, à paraître.
- [9] H. WENZL - *Representations of Hecke algebras and subfactors*, Thèse, Univ. of Pennsylvania, 1985.
- [10] H. WENZL - *Hecke algebras of type A_n and subfactors*, Invent. Math. **92** (1988), p. 349-383.
- [11] H. WENZL - *Braid group representations and the quantum Yang-Baxter equation*, à paraître.

La généralisation en un polynôme à deux variables est contenue dans l'article-annonce :

- [12] P. FREYD, D. YETTER, J. HOSTE, W. LICKORISH, K. MILLETT, A. OCNEANU - *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), p. 239-246.

Les articles suivants fournissent un exposé général et des extensions des résultats précédents :

- [13] A. CONNES - *Indice des sous-facteurs, algèbres de Hecke et théorie des nœuds*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 647, juin 1985, Astérisque **133-134** (1986), p. 289-308.
- [14] F. GOODMAN, P. DE LA HARPE et V. JONES - *Coxeter-Dynkin diagrams and towers of algebras*, M.S.R.I. Publ. vol. 14, Springer (1989).
- [15] P. DE LA HARPE, M. KERVAIRE et C. WEBER - *On the Jones polynomial*, Ens. Math. **32** (1986), p. 271-335.
- [16] P. VOGEL - *Représentations et traces des algèbres de Hecke, polynôme de Jones-Conway*, Ens. Math. **34** (1988), p. 333-356.

Voici la référence de base sur les représentations des algèbres de Hecke :

- [17] P.N. HOEFSMIT - *Representations of Hecke algebras of finite groups with BN pairs of classical type*, Thèse, Univ. of British Columbia, 1974.

Enfin, l'approche tridimensionnelle est contenue dans les travaux suivants :

- [18] M. ATIYAH - *Topological quantum field theories*, Publ. I.H.E.S. **68** (1988), p. 175-186.
[19] N. RESHETIKHIN and V. TURAEV - *Invariants of 3-manifolds via link polynomial and quantum groups*, à paraître.
[20] E. WITTEN - *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), p. 351-399.

D. Groupes quantiques et invariants des nœuds

Références de base sur les groupes quantiques :

- [1] V. DRINFELD - *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Sov. Math. Dokl. **32** (1985), p. 254-258.
[2] V. DRINFELD - *Quantum groups*, Proc. Int. Cong. Math., Berkeley 1986, vol. 1, p. 798-820.

Y joindre un compte-rendu à Bourbaki :

- [3] J.-L. VERDIER - *Groupes quantiques [d'après V. Drinfeld]*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 685, juin 1987, Astérisque **152-153** (1987), p. 305-319.

Sur les représentations des groupes quantiques :

- [4] J. JIMBO - *A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebras and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), p. 247-252.
[5] A. KIRILLOV and N. RESHETIKHIN - *Representations of the algebra $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, q-orthogonal polynomials and invariants of links*, LOMI preprint, Leningrad, 1988.
[6] G. LUSZTIG - *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. Math. **70** (1988), p. 237-249.
[7] M. ROSSO - *Finite dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), p. 581-593. [Corrections dans la thèse de l'auteur.]

Pour conclure, voici une liste de travaux de l'École de Léninegrad (applications des groupes quantiques aux invariants des nœuds) :

- [8] V. DRINFELD - *Sur les algèbres de Hopf presque cocommutatives*, à paraître dans "Algebra and Analysis", Leningrad, 1989 (en russe).
- [9] V. DRINFELD - *Quasi-algèbres de Hopf*, Algebra and Analysis, vol. 1, n° 2 (1989), p. 30-46 (en russe).
- [10] N. RESHETIKHIN - *Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links*, I, II, LOMI preprint, Léninegrad, 1988.
- [11] N. RESHETIKHIN - *Algèbres de Hopf quasi-triangulaires et invariants des nœuds*, Algebra and Analysis, vol. 1, n° 2 (1989), p. 169-188 (en russe).
- [12] N. RESHETIKHIN, L. TAKHTADJAN et L. FADDEEV - *Groupes de Lie quantiques et algèbres de Lie*, Algebra and Analysis, vol. 1, n° 2 (1989), p. 178-205 (en russe).
- [13] V. TURAEV - *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), p. 527-553.
- [14] V. TURAEV - *Algebra of loops on surfaces, algebra of knots, and quantization*, LOMI preprint, Léninegrad, 1988.

Référence supplémentaire :

- [15] C.M. RINGEL - *Hall algebras and quantum groups*, à paraître (Bielefeld, RFA).

E. Topologie des espaces de configuration

Le point de départ est fourni par les travaux d'Arnold et Brieskorn :

- [1] V.I. ARNOLD - *The cohomology ring of the colored braid group*, Mat. Zametki **5** (1969), p. 227-231.
- [2] V.I. ARNOLD - *Topological invariants of algebraic functions II*, Funct. Anal. Appl. **4** (1970), p. 91-98.
- [3] E. BRIESKORN - *Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe*, Invent. Math. **12** (1971), p. 57-61.

Il y a eu déjà deux rapports au Séminaire Bourbaki sur ce sujet :

- [4] E. BRIESKORN - *Sur les groupes de tresses [d'après V.I. Arnold]*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 401, novembre 1971, Springer, Lect. Notes Math. **317** (1973), p. 21-44.
- [5] P. CARTIER - *Arrangements d'hyperplans : un chapitre de Géométrie combinatoire*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 582, novembre 1980, Springer, Lect. Notes Math. **901** (1982), p. 1-22.

Quant à la structure des groupes de tresses, elle est élucidée dans ce qui suit :

- [6] F.A. GARSIDE - *The braid groups and other groups*, Quart. J. Math. Oxford **20**, (1969), p. 235-254.
- [7] E. BRIESKORN and K. SAITO - *Artin-Gruppen und Coxeter-gruppen*, Invent. Math. **17**, (1972), p. 245-271.
- [8] P. DELIGNE - *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Invent. Math. **17**, (1972), p. 273-302.
- [9] M. FALK and R. RANDELL - *Pure braid groups and products of free groups*, in "Braids", Contemporary Math., Amer. Math. Soc. (1988), vol. 78, p. 217-228.

F. Équations différentielles et monodromie

Pour un rapport général sur la monodromie, voir mon exposé récent :

- [1] P. CARTIER - *Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées*, Sémin. Bourbaki, exp. n° 687, novembre 1987, Astérisque **161–162** (1988), p. 31-52.

Voici quelques références complétant la bibliographie de cet exposé :

- [2] A.A. BELAVIN and V. DRINFELD - *Solution of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras*, Funct. Anal. Appl. **16** (1982), p. 1-29.
- [3] T. KOHNO - *Homology of a local system on the complement of hyperplanes*, Proc. Japan Acad. Sci. **62**, série A (1986), p. 144-147.
- [4] T. KOHNO - *One-parameter family of linear representations of Artin's braid groups*, Adv. Stud. in Pure Math. **12** (1987), p. 189-200.

- [5] T. KOHNO - *Linear representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations*, in "Braids", Contemporary Math., Amer. Math. Soc. (1988), vol. 78, p. 339-363.
- [6] A.B. GIVENTAL and V.V. SHEKHTMAN - *Monodromy groups and Hecke algebras*, Usp. Math. Nauk **12** n° 4 (1987), p. 138- .
- [7] K. AOMOTO - *A construction of integrable differential system associated with braid groups*, in "Braids", Contemporary Math., Amer. Math. Soc. (1988), vol. 78, p. 1-11.
- [8] A.B. GIVENTAL - *Twisted Picard-Lefschetz formulas*, Funct. Anal. Appl. **22** (1988), p. 10-18.

Donnons enfin quelques articles fondamentaux provenant de la théorie conforme des champs quantiques :

- [9] A.A. BELAVIN, A.N. POLYAKOV and A.B. ZAMOLODCHIKOV - *Infinite dimensional symmetries in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B 241** (1984), p. 333-380.
- [10] V.G. KNIZHNIK and A.B. ZAMOLODCHIKOV - *Current algebras and Wess-Zumino models in two dimensions*, Nucl. Phys. **B 247** (1984), p. 83-103.
- [11] A. TSUCHIYA and Y. KANIE - *Vertex operators in conformal field theory on \mathbf{P}^1 and monodromy representations of braid group*, Adv. Studies in Pure Math. **12** (1988), p. 297-372.

G. Mécanique statistique et théorie des nœuds

Deux collections d'articles sur le sujet viennent de paraître :

- [1] C.N. YANG and M.L. GE (éditeurs) - *Braid group, knot theory and statistical mechanics*, Adv. Series Math. Phys. vol. 9, World Scientific (1989).
- [2] M.L. GE and N.C. SONG (éditeurs) - *Conformal field theory and braid group* (Nankai lectures in mathematical physics, 1988), World Scientific (1989).

On doit à Kauffman trois exposés de synthèse sur l'interprétation des invariants des nœuds :

- [3] L. KAUFFMAN - *Statistical mechanics and the Jones polynomial*, in "Braids", Contemporary Math., Amer. Math. Soc. (1988), vol. 78, p. 263-297.
- [4] L. KAUFFMAN - *New invariants in the theory of knots*, Astérisque **163-164** (1988), p. 137-219.
- [5] L. KAUFFMAN - *Knots, abstract tensors and the Yang-Baxter equation*, prépublication IHES/M/89/24 (avril 1989).

Deux références classiques, de physiciens, sur les modèles de Mécanique Statistique :

- [6] R.J. BAXTER - *Exactly solved models in statistical mechanics*, Acad. Press (1982).
- [7] F.Y. WU - *The Potts model*, Rev. Mod. Phys. vol. 54, n° 1, Janvier 1982.

Sur l'approche par les "modèles à vertex", voir :

- [8] R. PENROSE - *Applications of negative dimensional tensors*, in Comb. Math. and its Appl. (Welsch éditeur), Acad. Press (1971).
- [9] L. KAUFFMAN - *State models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), p. 395-407.
- [10] V. JONES - *On knot invariants related to statistical mechanics models*, Pac. J. Math. **138** (1989), p. .
- [11] M. ROSSO - *Groupes quantiques et modèles à vertex de V. Jones en théorie des nœuds*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, vol. 307 (1988), p. 207-210.

H. Applications des tresses à la physique

Voici un échantillon, portant surtout sur les travaux de l'école de Zürich :

- [1] V. DOTSENKO and V. FATEEV - *Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical mechanics*, Nucl. Phys. **B240** (1984), p. 312-.

- [2] J. FRÖHLICH - *Statistics of fields, the Yang-Baxter equation and the theory of braids and links*, Cargèse lectures 1987, G.'t Hooft (éditeur), Plenum Press (1988).
- [3] J. FRÖHLICH - *Statistics and monodromy in two- and three-dimensional quantum field theory*, in "Differential geometrical methods in mathematical physics", K. Bleuler et M. Werner (éditeurs), Dordrecht (1988).
- [4] K.H. REHREN and B. SHROER - *Einstein causality and Artin braids*, prépublication, Freie Universität Berlin, 1988.
- [5] J. FRÖHLICH and C. KING - *Two-dimensional conformal field theory and three-dimensional topology*, prépublication ETH/TH/89-9, Zürich, 1989.
- [6] G. FELDER, J. FRÖHLICH and G. KELLER - *Braid matrices and structure constants for minimal conformal models*, Comm. Math. Phys. **124** (1989), p. 647-664.
- [7] J. FRÖHLICH, G. GABBIANI and P.A. MARCHETTI - *Braid statistics in three-dimensional local quantum theory*, in the Proceedings of the Banff Summer School in Theoretical physics (août 1989) on "Physics, Geometry and Topology", à paraître.

I. Applications arithmétiques des groupes de tresses

- [1] A. GROTHENDIECK - *Esquisse d'un programme*, Notes miméographiées, Univ. Montpellier, 1982.
- [2] R. COLEMAN - *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions*, Invent. Math. **69** (1982), p. 171-208.
- [3] Y. IHARA - *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplication*, Ann. of Math. **123** (1986), p. 3-106.
- [4] Y. IHARA - *On Galois representations arising from towers of coverings of $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$* , Invent. Math. **86** (1986), p. 427-459.
- [5] B.H. MATZAT - *Konstruktive Galois Theorie*, Lect. Notes Math. **1284**, Springer (1987).
- [6] T. KOHNO and T. ODA - *The lower central series of the pure braid group of an algebraic curve*, Adv. Studies in Pure Math. **12** (1988).

- [7] P. DELIGNE - *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in “Galois groups over \mathbf{Q} ”, M.S.R.I. Publ. vol. 16, Springer, 1989.

Pierre CARTIER
École Normale Supérieure
Département de Mathématique
et Informatique
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05