

# SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

## Cohomologie des algèbres de Lie, I

*Séminaire "Sophus Lie"*, tome 1 (1954-1955), exp. n° 3, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SSL\\_1954-1955\\_\\_1\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A5_0)

© Séminaire "Sophus Lie"  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 3

## COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE, I .

(Exposé de P. CARTIER du 23.11.54)

1.- Préliminaires sur les complexes.

En vertu des principes généraux (cf. le livre à paraître de Cartan-Eilenberg) pour construire une théorie de l'homologie et de la cohomologie des algèbres de Lie, il faut se donner un U-complexe libre et acyclique, U étant l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  sur l'anneau K. Ce n'est pas la marche suivie historiquement par Hochschild et Chevalley-Eilenberg qui ont sorti cette théorie de la topologie des groupes de Lie, mais c'est la mieux adaptée à notre propos. Rappelons les définitions des complexes :

En général, un complexe C est un K-module unitaire vérifiant les conditions suivantes :

- 1) C est somme directe de sous-modules  $C_p$  ( $C_p = 0$  si  $p < 0$ )
- 2) Il existe sur C un opérateur linéaire d tel que  $d.C_p \subset C_{p-1}$  et  $d^2 = 0$
- 3) Il existe un projecteur  $\xi$  de  $C_0$  sur un sous-espace de dim 1 de  $C_0$  tel que  $\xi d = 0$  et donc  $d \xi = 0$ .  $\xi$  est prolongé par 0 sur les  $C_p$  ( $p > 0$ ).

Les  $a$  tels que  $da = 0$  sont les cycles et les  $a = db$  sont les bords ; tout bord est un cycle puisque  $d^2 = 0$ . Réciproquement, si les cycles annulés par  $\xi$  sont des bords, C sera dit acyclique. Pour démontrer que C est acyclique, le plus simple est de construire un opérateur "d'homotopie" k tel que  $k.C_p \subset C_{p+1}$  et  $kd = dk = 1 - \xi$ . Si alors  $\xi a = da = 0$ , on aura  $a = d(ka)$  ce qui prouve l'acyclidité.

Soient  $C'$  et  $C''$  deux complexes (ce qui se rapporte à  $C'$  est marqué d'un astérisque et itou pour  $C''$ ). Sur  $C = C' \otimes C''$  on pose  $d = d' \otimes 1 + \alpha \otimes d''$ ,  $C_p = \sum_r C'_r \otimes C''_{p-r}$ ,  $\xi = \xi' \otimes \xi''$  ( $\alpha$  est l'opérateur  $\sum c_p \longrightarrow \sum (-1)^p c_p \in C'_p$ ). On vérifie immédiatement avec ces définitions que C est un complexe. S'il existe des opérateurs d'homotopie sur  $C'$  et  $C''$  on pose  $k = k' \otimes 1 + \xi' \otimes k''$  et c'est un opérateur d'homotopie car

$$kd + dk = (k'd' + d'k') \otimes 1 + (k'\alpha + \alpha k') \otimes d'' + (d' \xi' + \xi' d') \otimes k'' + \alpha \xi' \otimes d'' k'' + \xi' \alpha \otimes k'' d'' = (1 - \xi') \otimes 1 + \xi' \otimes (1 - \xi'') = 1 \otimes 1 - \xi' \otimes \xi'' = 1 - \xi$$

donc  $C$  est acyclique.

Lemme 1 : Soit  $A$  un groupe abélien muni d'un endomorphisme  $d$  tel que  $d^2 = 0$  et  $B$  un sous-groupe stable par  $d$ .  $A/B$  est muni de l'opérateur  $\bar{d}$  déduit de  $d$  par passage au quotient. Si  $B$  et  $A/B$  sont acycliques, il en est de même de  $A$ . (on suppose  $\xi = 0$ )

$\bar{a}$  est la classe mod.  $B$  de  $a \in A$ . Supposons que  $da = 0$ , alors  $\bar{d}\bar{a} = \bar{d}.a = 0$ , donc il existe  $\bar{b}$  tel que  $\bar{a} = \bar{d}\bar{b}$ , i.e.  $a - db \in B$ . Mais  $a - db$  est un cycle de  $B$ , donc il existe  $c \in B$  tel que  $a - db = dc$ , donc  $a = d(b + c)$ . C.Q.F.D.

Un complexe  $C$  sera un U-complexe si  $C$  est aussi un  $U$ -module à gauche, les  $C_p$  étant des sous- $U$ -modules et  $d$  un  $U$ -endomorphisme. Il sera libre si les  $C_p$  possèdent une base sur l'anneau  $U$ .

Le complexe que nous allons construire possède une structure supplémentaire, à savoir que  $C$  est une algèbre sur  $K$ , la multiplication envoyant  $C_p \times C_q \longrightarrow C_{p+q}$  et  $d$  étant une antiderivation i.e.

$$(1) \quad d(cc') = dc.c' + \alpha(c).dc' \quad c, c' \in C$$

Le carré d'une antiderivation est une dérivation, donc si  $d^2$  s'annule sur un système de générateurs de  $C$ , alors  $d^2 = 0$ . De plus :

Lemme 2 : Soit  $S$  un système de générateurs de l'algèbre  $C$ . Un opérateur linéaire  $d$  sera une antiderivation pourvu que la formule (1) soit vraie pour tous  $c \in C$  et  $c' \in S$ .

L'ensemble  $T$  des  $c'$  tels que (1) soit identiquement vérifiée en  $c$  est un  $K$ -module ; de plus il est stable pour la multiplication car si  $x, y \in T$  on a :

$$\begin{aligned} d(cxy) &= d((cx)y) = d(cx).y + \alpha(cx).dy = dc.x.y + \alpha(c).dx.y + \alpha(c)\alpha(x)dy = \\ &= dc.(xy) + \alpha(c).d(xy) \end{aligned}$$

donc  $xy \in T$ . Comme  $T \supset S$  il est clair que  $T = C$ .

Remarquons que si  $d(1) = 0$ , la formule (1) est trivialement vraie si  $c' = 1$ .

## 2.- Construction du complexe fondamental.

La construction de  $C$  va se faire en deux étapes : construction de la multiplication, puis de  $d$ .  $K$  désigne une algèbre pour  $K$  avec unité ; on suppose donné un homomorphisme  $x \longrightarrow \theta(x)$  de  $\mathcal{L}$  dans l'algèbre de Lie des dérivations de  $A$ . On pose  $C = U \otimes A$  et l'on identifie  $u$  et  $u \otimes 1$ ,  $a$  et  $1 \otimes a$  ( $u \in U, a \in A$ ).

Lemme 3 : Sur  $C$  existe une multiplication telle que  $u \otimes a = ua$  et si  
 $x \in \mathcal{G}$   $\theta(x) \cdot a = xa - ax$  .

Posant  $\psi(x)u = ux$  et  $\psi(x)a = -\theta(x)a$  , on a deux antireprésentations linéaires de  $\mathcal{G}$  dont on peut former le produit tensoriel  $\varphi(x)$  qui est une antireprésentation linéaire de  $\mathcal{G}$  dans  $C = U \otimes A$  ; autrement dit :

$$(2) \quad \varphi(x)(u \otimes a) = ux \otimes a - u \otimes \theta(x)a$$

On peut prolonger cette antireprésentation linéaire de  $\mathcal{G}$  en une représentation linéaire droite de  $U$  dans  $C$  par  $\varphi(x_1 \dots x_n) = \varphi(x_n) \dots \varphi(x_1)$  donc

$\varphi(uv) = \varphi(v) \varphi(u)$  . On définit une représentation linéaire droite de  $A$  dans  $C$  en posant

$$(3) \quad \varphi(a)(u \otimes b) = u \otimes ba$$

On définit enfin des opérateurs  $\varphi(c)$  dans  $C$  lorsque  $c \in C$  en posant

$$(4) \quad \varphi(u \otimes a) = \varphi(a) \cdot \varphi(u)$$

et en étendant par linéarité. On va d'abord montrer que  $\varphi(c)(1 \otimes 1) = c$  donc que  $c \rightarrow \varphi(c)$  est biunivoque, puis que les  $\varphi(c)$  forment une algèbre d'opérateurs et que  $\varphi(\theta(x)a) = \varphi(a) \varphi(x) - \varphi(x) \varphi(a)$  . On pourra alors définir un produit et un seul sur  $C$  tel que  $\varphi$  soit une représentation linéaire droite de  $C$  et les assertions qu'on vient d'énumérer jointes à la formule (4) démontreront le lemme.

Posons  $t = [ \varphi(a) , \varphi(x) ]$  , on a

$$\begin{aligned} t(u \otimes b) &= \varphi(a)(ux \otimes b - u \otimes \theta(x)b) - \varphi(x)(u \otimes ba) = \\ &= ux \otimes ba - u \otimes (\theta(x)b)a - ux \otimes ba + u \otimes (x)(ba) = u \otimes b \theta(x)a \end{aligned}$$

d'où  $t = \varphi(\theta(x)a)$  [Voir complément page 3-07]

Pour montrer que les  $\varphi(c)$  forment une algèbre, il suffit de montrer d'après la formule (4) que  $\varphi(C)$  est stable pour la multiplication à gauche par les  $\varphi(a)$  et les  $\varphi(u)$  et même simplement par les  $\varphi(a)$  et les  $\varphi(x)$  ( $x \in \mathcal{G}$ ) puisque  $\mathcal{G}$  engendre  $U$  et que  $\varphi$  est une représentation linéaire droite de  $U$  donc que les  $\varphi(x)$  engendrent  $\varphi(U)$  . Or

$$\begin{aligned} \varphi(a) \varphi(u \otimes b) &= \varphi(a) \varphi(b) \varphi(u) = \varphi(ba) \varphi(u) \in \varphi(C) \\ \varphi(x) \varphi(u \otimes b) &= \varphi(x) \varphi(b) \varphi(u) = \varphi(b) \varphi(x) \varphi(u) - \\ - \varphi(\theta(x)b) \varphi(u) &= \varphi(b) \varphi(ux) - \varphi(\theta(x)b) \varphi(1) \in \varphi(C) \end{aligned}$$

Il reste à construire  $\underline{d}$  .

C.Q.F.D.

Lemme 4 : Soit  $\wedge$  l'algèbre extérieure du module sous-jacent à  $\mathcal{G}$  ,  $B$  une algèbre associative contenant  $\wedge$  comme sous-algèbre et ayant même unité. Pour  
qu'une application linéaire  $h$  de  $\mathcal{G} = \wedge^1$  dans  $B$  se prolonge en une

antidérivation de  $\wedge$  dans  $B$ , il faut et il suffit que  $x$  commute à  $h(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{U}$ .

C'est nécessaire, car  $x^2 = 0$  dans  $\wedge$ , d'où  $d(x^2) = dx.x - x.dx = 0$ . C'est suffisant, car si l'on pose :

$$(5) \quad h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_1 \dots x_{i-1} h(x_i) x_{i+1} \dots x_n \quad (\text{dans } B)$$

on définit une application  $n$ -linéaire de  $\mathcal{U}^n$  dans  $B$  et elle est alternée si  $x$  commute à  $h(x)$ . Supposons en effet que dans (5)  $x_j = x_{j+1}$ ; comme dans  $\wedge \subset B$  le carré de  $x_j$  est nul, les seuls termes non nuls de cette somme sont ceux pour lesquels  $i = j, j+1$ , la contribution de ces termes étant  $(-1)^{j-1} a.h(x_j)x_j b + (-1)^j a.x_j h(x_j)b = (-1)^{j-1} a[h(x_j), x_j]b$  donc 0.

Par suite il existe une application linéaire de  $\wedge^n$  dans  $B$  telle que  $d(x_1 \dots x_n) = h(x_1, \dots, x_n)$  et  $d(1) = 0$  si  $n = 0$ . Enfin c'est une antidérivation, car si  $a = x_1 \dots x_n$ ,  $x = x_{n+1}$  on a

$$\begin{aligned} d(ax) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_1 \dots x_{i-1} h(x_i) x_{i+1} \dots x_n x + (-1)^n x_1 \dots x_n h(x_{n+1}) \\ &= da.x + \alpha(a).dx \end{aligned}$$

et le lemme 2 achève la démonstration de ce lemme.

Ces deux lemmes étant démontrés, prenons  $A = \wedge$  i.e.  $C = U \otimes \wedge$ , et munissons  $C$  du produit du lemme 3 en prenant pour  $\theta(x)$  le prolongement en une dérivation de  $\wedge$  de l'opérateur  $adx$  de  $\wedge^1 = \mathcal{U}$ . Pour éviter les confusions  $x$  sera noté  $\underline{x}$ , considéré comme élément de  $U$ , et  $x$  comme élément de  $\wedge$ . On a alors les relations suivantes :

$$(6) \quad \underline{xy} - \underline{yx} = [\underline{x}, \underline{y}], \quad \underline{xy} - \underline{yx} = \theta(x)y = [x, y], \quad xy + yx = 0, \quad x^2 = 0$$

et les  $x$  et les  $\underline{x}$  engendrent  $C$ . On pose  $C_p = U \otimes \wedge^p$  et  $h(x) = \underline{x}$ . Il résulte de la deuxième relation (6) et du lemme 4 qu'il existe une antidérivation  $d$  de  $\wedge$  dans  $C$  telle que  $dx = \underline{x}$ . On prolonge  $d$  à  $C$  en posant  $d(u \otimes a) = u da$  donc  $d\underline{x} = d(\underline{x} \otimes 1) = 0$ .

$$\begin{aligned} d(uax) - d(ua)x - \alpha(ua)dx &= u(d(ax) - da.x - \alpha(a).dx) = 0 \\ d(ua\underline{x}) - d(ua)\underline{x} - \alpha(ua)d\underline{x} &= u(d(a\underline{x}) - da.\underline{x}) \end{aligned}$$

On pourra appliquer le lemme 2 et prouver que  $d$  est une antidérivation pourvu que  $d(a\underline{x}) = (da)\underline{x}$ . Or l'on définit une dérivation de  $C$  qui prolonge  $\theta(x)$  en posant  $\theta(x).c = \underline{xc} - c\underline{x}$ .  $d\theta(x) - \theta(x)d$  est une antidérivation de  $\wedge$  dans  $C$  et elle s'annule pour  $y \in \wedge^1$

$d(\theta(x)y) - \theta(x)dy = d([\underline{x}, y]) - (\underline{xy} - \underline{yx}) = [\underline{x}, y] - (\underline{xy} - \underline{yx}) = 0$   
donc elle s'annule sur  $\wedge$  et  $d(\theta(x)a) = \theta(x)da$

Comme  $d(\underline{x}a) = \underline{x}da$  et  $\underline{ax} = \underline{x}a - \theta(x)a$ , il en résulte que  $d(\underline{ax}) = (da)\underline{x}$ .  
 Donc  $d$  est une antidérivation ; comme  $dx = \underline{x}$  et  $d\underline{x} = 0$ ,  $d^2$  s'annule sur les  $x$  et les  $\underline{x}$  donc sur  $C$  puisque ces éléments engendrent  $C$ . L'augmentation  $\varepsilon$  de  $C_0 = U$  est l'augmentation définie dans l'exposé 1. Enfin  $C$  est un  $U$ -module à gauche de façon naturelle  $u(v \otimes a) = uv \otimes a$  et les  $C_p$  sont des  $U$ -sous-modules tandis que  $d$  est un  $U$ -endomorphisme.

### 3.- Propriétés du complexe.

On suppose désormais que  $\mathcal{A}$  possède une base sur  $K$ .

Alors  $\Lambda^p$  possède une base sur  $K$  et il est clair que cette base est une base de  $C_p = U \otimes \Lambda^p$  sur  $U$  :  $U$  est un complexe libre.

Démontrons l'acyclicité de  $C$ . Pour cela, on filtre  $C$  par les  $C_p = \sum_r U_{p-r} \otimes \Lambda^r$ . La somme des  $\Lambda^p$  étant directe, cette somme est directe et  $C^p \subset C^{p+1}$  et  $C^p/C^{p-1} = \sum_r S_{p-r} \otimes \Lambda^r$  d'après le théorème de Birkhoff-Witt. ( $S$  est l'algèbre symétrique sur  $\mathcal{A}$ ).

Chaque élément de  $C^p$  est somme de produits de  $q \leq p$  générateurs ( $x$  ou  $\underline{x}$ ). Pour prouver que cette filtration est compatible avec la structure d'algèbre de  $C$  il suffit de prouver que  $C^p x \subset C^{p+1}$   $C^p \underline{x} \subset C^{p+1}$ . Or  $\Lambda^r x \subset \Lambda^{r+1}$  implique la première inclusion tandis que pour la seconde, on a :

$$\text{si } u \in U_{p-r} \quad a \in \Lambda^r$$

$$(u \otimes a)\underline{x} = \underline{u} \otimes a - u \otimes \theta(x)a \in U_{p-r+1} \otimes \Lambda^r + U_{p-r} \otimes \Lambda^r \subset C^{r+1}$$

En vertu du lemme 1, l'acyclicité sera démontrée si l'on montre que  $\bar{C}$  (l'algèbre graduée associée à  $C$ ) est acyclique. Or  $\bar{C}$  est engendrée par les classes  $x'$  des  $x$  et  $x''$  des  $\underline{x}$ . Les relations (6) donnent que les  $x''$  commutent entre eux et avec les  $x'$  et que  $x''^2 = 0$ , donc  $\bar{C}$  s'identifie à un quotient de  $S \otimes \Lambda$ , et ce quotient est en réalité  $S \otimes \Lambda$ , comme il résulte du calcul fait plus haut de  $C^p/C^{p-1}$ . On est donc ramené au cas d'une algèbre de Lie  $\mathcal{A}$  abélienne.

Il nous reste à examiner ce cas. Soit  $(x_\iota)_{\iota \in I}$  une base de  $\mathcal{A}$ . Pour toute partie finie  $F$  de  $I$ , on appelle  $C_F$  la sous-algèbre de  $C$  engendrée par les  $x'_\iota$  et les  $x''_\iota$  pour  $\iota \in F$ . Comme  $dx'_\iota = x''_\iota$ ,  $dx''_\iota = 0$ ,  $C_F$  est stable par  $d$  et comme  $C$  est réunion des  $C_F$ , on se ramène à démontrer que  $C_F$  est acyclique. Enfin  $C_F$  est le produit tensoriel gauche des algèbres graduées  $C_{\{\iota\}}$  et il nous suffira donc d'exhiber un opérateur d'homotopie dans le cas où la base de  $\mathcal{A}$  a un seul élément  $x_0$ .

Base de  $C$  :  $x_0^n = u_n$   $x_0' x_0^n = v_n$   $dv_n = u_{n+1}$   $du_n = 0$   $\xi u_n = 0$  si  $n > 0$   
 $\xi u_0 = u_0$

Il suffit de poser  $ku_n = u_{n-1}$  si  $n > 0$   $ku_0 = 0$   $kv_n = 0$

En résumé, on a montré que  $C$  est acyclique.

#### 4.- Cohomologie des algèbres de Lie.

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires. Soit  $M$  un  $\mathcal{G}$ -module, donc un  $U$ -module unitaire, on appelle  $C^p(\mathcal{G}, M)$  le  $K$ -module des  $U$ -homomorphismes de  $C_p$  dans  $M$ . Puisque  $C_p = U \otimes \Lambda^p$ , la donnée d'une cochaîne de degré  $p$  à valeurs dans  $M$ , i.e. d'un élément de  $C^p(\mathcal{G}, M)$  est entièrement équivalente à la donnée d'une application  $K$ -linéaire de  $\Lambda^p$  dans  $M$  ou encore d'une fonction  $p$ -linéaire alternée de  $\mathcal{G}$  dans  $M$ . Si  $f : C_p \rightarrow M$  est un  $U$ -homomorphisme,  $f \circ d$  est un  $U$ -homomorphisme de  $C_{p+1}$  dans  $M$  donc une cochaîne de degré  $p+1$  notée  $\delta f$  et appelée le cobord de  $f$ . On définit alors sans peine les cocycles et les cobords et le  $p$ -ième groupe de cohomologie  $H^p(\mathcal{G}, M)$  de  $\mathcal{G}$  à valeur dans  $M$  comme le quotient du groupe  $Z^p(\mathcal{G}, M)$  des cocycles par le sous-groupe  $B^p(\mathcal{G}, M)$  des cobords.

A tout  $\mathcal{G}$ -homomorphisme  $\varphi : M \rightarrow N$  est associé un homomorphisme de  $C^p(\mathcal{G}, M)$  dans  $C^p(\mathcal{G}, N)$  compatible avec le bord, d'où un homomorphisme  $\varphi_* : H^p(\mathcal{G}, M) \rightarrow H^p(\mathcal{G}, N)$ . On a  $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$  et si  $\varphi$  est l'identité,  $\varphi_*$  l'est aussi. Si  $M$  est un sous-module de  $N$ ,  $C^p(\mathcal{G}, M)$  peut être identifié à un sous-groupe de  $C^p(\mathcal{G}, N)$  et  $C^p(\mathcal{G}, N/M)$  à  $C^p(\mathcal{G}, N)/C^p(\mathcal{G}, M)$ . De cette situation, on déduit l'opérateur cobord de cohomologie  $\partial$  :

$H^p(\mathcal{G}, N/M) \rightarrow H^{p+1}(\mathcal{G}, M)$  et la suite exacte de cohomologie :

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{G}, M) \rightarrow H^0(\mathcal{G}, N) \rightarrow H^0(\mathcal{G}, N/M) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{G}, M) \rightarrow H^1(\mathcal{G}, N) \rightarrow \dots$$

Pour être complets explicitons le cobord dans  $C^p(\mathcal{G}, M)$  quand on considère une cochaîne comme une fonction  $p$ -linéaire alternée de  $\mathcal{G}$  dans  $M$

$$g = \delta f \quad a = x_1 \dots x_p \quad g(x_1, \dots, x_p) = g(a) = f(da)$$

$$da = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} x_1 \dots x_{i-1} \hat{x}_i \dots x_p = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \hat{x}_i x_1 \dots x_p + \theta(x_i)(x_1 \dots x_{i-1}) \dots x_p$$

$$\text{Or } \theta(x_i)(x_1 \dots x_{i-1}) = \sum_{j < i} x_1 \dots [x_i, x_j] \dots x_{i-j}$$

$$\text{d'où } da = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \hat{x}_i x_1 \dots x_p + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} [x_i, x_j] x_1 \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j \dots x_p$$

$$\text{donc } g(x_1 \dots x_p) = \sum (-1)^{i-1} x_i f(x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_p) + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] x_1 \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j)$$

Avec ces formules, on retrouve la définition usuelle des cochaînes et du cobord.

Nota : un chapeau  $\hat{\phantom{x}}$  au dessus d'une lettre dans un produit signifie qu'on doit omettre cette lettre dans le produit en question.

Erratum à la page 3 : Après la ligne 23, compléter ainsi la démonstration :

Si  $c = u \otimes a = (x_1 \dots x_n) \otimes a$

$$\varphi(c)(1 \otimes 1) = \varphi(a) \varphi(x_n) \dots \varphi(x_1)(1 \otimes 1) = (x_1 \dots x_n) \otimes a = c$$


---