P. Cartier

Cohomologie des algèbres de Lie, II. Interprétation des groupes de cohomologie

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n^{o} 4, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A6_0>

Exposé n° 4

COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE, II.

INTERPRÉTATION DES GROUPES DE COHOMOLOGIE.

(Exposé de P. Cartier du 30.11.1954)

1.- Opérations sur les représentations linéaires - Opérateur de Casimir.

Rappelons comment, étant données plusieurs représentations linéaires d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on peut en construire d'autres grâce au lemme suivant :

Lemme 1. Soit M un K-module, θ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n représentations linéaires de $\mathfrak{g}_n$ dans M telles que $\theta_i(\mathfrak{g})$ commute avec $\theta_j(\mathfrak{g})$ pour $i \neq j$, alors $x \longrightarrow \theta(x) = \sum_{i=1} \theta_i(x)$ est une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans M .

Il est évident que $\theta(x)$ est linéaire. Il reste donc à vérifier que θ respecte le crochet $[\theta(x), \theta(y)] = \sum_{i,j} [\theta_i(x), \theta_j(y)] = \sum_i [\theta_i(x), \theta_i(y)]$ puisque les termes correspondants à $i \neq j$ sont nuls d'après l'hypothèse de commutativité.

Mais θ_i étant une représentation $[\theta_i(x), \theta_i(y)] = \theta_i([x,y])$ et finalement $[\theta(x), \theta(y)] = \sum_i \theta_i([x,y]) = \theta([x,y])$, ce qui démontre le lemme.

Appliquons ceci au cas où l'on s'est donné n représentations linéaires de $\mathfrak{g}$: (θ_i, M_i) $1 \leqslant i \leqslant n$ pour construire une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$: $(\theta, M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_n)$

A cet effet, considérons que θ_i agit sur le i^e facteur de $M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_n$ et laisse les autres fixes, soit

$$\theta_i(x)\ (\bigotimes_k m_k) = \bigotimes_k n_k \quad \text{avec} \quad n_k = m_k \ \text{pour}\ k \neq i \ \text{et}\ n_i = \theta_i(x)(m_i)$$

Il est bien évident que $\theta_i(x)\,\theta_j(y) = \theta_j(y)\,\theta_i(x)$, ce qui permet d'appliquer le lemme au K-module $\bigotimes_k M_k$ et qu'on définit par $\theta(x) = \sum_i \theta_i(x)$ une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\bigotimes_k M_k$.

En explicitant on trouve

$$\theta(x)\ (m_1 \otimes m_2 \ldots \otimes m_n) = \sum_{i=1}^{n} m_1 \ldots \otimes \theta_i(x)\ m_i \ldots \otimes m_n$$

ce qui correspond à la formule usuelle de dérivation d'un produit.

Une autre construction est possible si l'on se donne deux représentations linéaires (θ, M) , (θ', M') en considérant le K-module $V = \mathcal{L}(M;M')$ des applications K-linéaires de M dans M'. On définit deux représentations linéaires de $\mathfrak{g}$ dans V en posant

$$\psi(x).f = -f\circ\theta(x)$$
$$\psi'(x).f = \theta'(x)\circ f$$

on a $\psi(x)\,\psi'(y).f = -\theta'(y)\circ f\circ\theta(x) = \psi'(y)\,\psi(x)f$ ce qui permet d'appliquer le lemme1 et de poser $\rho(x).f = \theta'(x)\circ f - f\circ\theta(x)$ où $\rho(x)$ est une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans V.

On ramène le cas des modules d'applications multilinéaires à celui des modules d'applications linéaires grâce au produit tensoriel et l'on a donc la formule

$$(\rho(x)f)\,(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \theta(x)[f(m_1 \ldots m_n)] - \sum_{i=1}^{n} f(m_1, \ldots, \theta_i(x)\ m_i \ldots)$$

La représentation triviale (ou unité) s'effectue dans le K-module K, les opérateurs $\theta(x)$ étant nuls. La représentation de $\mathfrak{g}$ construite dans $\mathcal{L}(M;K) \simeq M^*$ est la duale de (θ, M): elle est donnée par

$$\theta^*(x) = -\,{}^t\theta(x)$$

On peut aussi considérer le cas du module $\mathcal{L}(M_1, M_2; K)$ et définir une représentation de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des formes bilinéaires sur $M_1 \times M_2$.

Il reste à effectuer certaines identifications canoniques :

1) l'isomorphisme canonique φ de $\otimes_k M_k$ sur $\otimes_k M_{\sigma(k)}$ (σ est une permutation) est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules car si $\theta'(x)$ désigne la représentation de $\mathfrak{g}$ dans le deuxième module, on a

$\theta'(x) = \sum_k \theta'_{\sigma(k)}(x)$ $\qquad \theta(x) = \sum_k \theta_k(x)$. Mais il est clair que

$$\varphi\circ\theta_k(x) = \theta'_{\sigma(k)}(x)\circ\varphi$$
$$\varphi\circ\theta(x) = \theta'(x)\circ\varphi$$

2) Soit $K = \bigcup_{m\in M} K_m$ une partition de K et $N_m = \bigotimes_{k\in K_m} M_k$. On a un isomor-

phisme φ de K-modules de $\otimes_k M_k$ sur $\otimes_m N_m$. C'est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ .modules car si ψ_m est la représentation de $\mathfrak{g}$ dans N_m on a

$$\psi_m(x) = \sum_{k \in K_m} \psi_{m,k}(x)$$

et la représentation ψ' de $\mathfrak{g}$ dans $\otimes N_m$ est donnée par $\sum_m \psi'_m(x)$
$\psi'_m(x) = \sum_k \psi'_{m,k}(x)$ donc $\psi'(x) = \sum_{m,k} \psi'_{m,k}(x)$. Mais

$$\varphi \circ \theta_k(x) = \psi'_{m,k}(x) \circ \varphi \qquad \text{si } k \in K_m$$
$$\varphi \circ \theta(x) = \psi'(x) \circ \varphi$$

3) On vérifie de même que l'application linéaire de $\otimes_k \mathcal{L}(M_k;M'_k)$ dans $\mathcal{L}(\otimes M_k ; \otimes M'_k)$ est un $\mathfrak{g}$ .homomorphisme, ainsi que l'application $\mathcal{L}(M; \mathcal{L}(N; P)) \longrightarrow \mathcal{L}(M \otimes N; P)$.

De ces trois identifications canoniques, on en déduit bien d'autres par exemple $\mathcal{L}(M ; M') \simeq M' \otimes M^*$ (si M ou M' de rang fini)

<u>Définition 1</u> : <u>un invariant d'une représentation linéaire</u> (θ, M) <u>de</u> $\mathfrak{g}$ <u>est un élément de</u> M <u>annulé par tous les</u> $\theta(x)$. <u>L'ensemble des invariants de</u> M se <u>note</u> $M^{\natural}$

<u>Exemples</u> : $f \in \mathcal{L}(M;M')$ est invariant si et seulement si $\theta'(x) \circ f = f \circ \theta(x)$ c'est-à-dire si f est un $\mathfrak{g}$.homomorphisme. L'espace des $\mathfrak{g}$ .homomorphismes de M dans M' se note $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}(M;M')$

2) Une forme bilinéaire f sur $M \times M$ est invariante si et seulement si

$$f(\theta(x)\, m, m') + f(m, \theta(x)\, m') = 0$$

3) Si m_i est un invariant de (θ_i, M_i) , $m_1 \otimes m_2$ est invariant.

<u>Nous supposerons désormais que</u> K <u>est un corps de caractéristique</u> 0 <u>et que</u> $\mathfrak{g}$ <u>et les modules de représentation sont de rang fini sur</u> K . (<u>pour ce paragraphe</u>)

Venons en à l'élément de Casimir. Soit f une forme bilinéaire <u>symétrique</u>, <u>invariante</u> et non <u>dégénérée</u> sur M (i.e. $f(m,m') = 0$ pour tout $m' \in M$ entraîne $m = 0$) . $(M \otimes M)^* \simeq \mathcal{L}(M,M^*)$ autrement dit à f invariante correspond une application $\varphi\ M \to M^*$ définie par $\langle m, \varphi(m')\rangle = f(m,m')$. φ est un $\mathfrak{g}$ -homomorphisme et comme f est non dégénérée c'est un isomorphisme . $\Psi = \varphi^{-1}$ est un $\mathfrak{g}$ .homomorphisme de $M^* \longrightarrow M$, donc un invariant de $\mathcal{L}(M^*;M) \simeq M^{**}\otimes M = M \otimes M$. Donc à f est associé un invariant c de $M \otimes M$. Explicitons : soient $\{m_i\}$ $\{n_i\}$ deux bases duales de M i.e. $f(m_i,n_j) = \delta_{ij}$. Si $\{m_i'\}$ est la base de M^* duale de $\{m_i\}$ i.e. $\langle m_i,m_j'\rangle = \delta_{ij}$, on a évidemment $\varphi(n_j) = m_j'$ donc $\Psi(m_j') = n_j =$ $= \sum \langle m_i,m_j'\rangle\ n_i$. Donc $c = \sum m_i \otimes n_i$.

Le cas important est le suivant : M est un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et $\theta(x)$ est la restriction à $\mathfrak{h}$ de $\operatorname{ad} x$. f est de la forme

$$f(m,m') = \operatorname{Tr}\ (\rho(m)\ \rho(m')) \qquad m,m' \in \mathfrak{h}$$

où (ρ, N) est <u>une représentation linéaire de</u> $\mathfrak{g}$ <u>telle que</u> f <u>soit non dégénérée</u>. Un calcul facile montre que f est <u>invariante</u> et il est connu qu'elle est symétrique. Formons l'élément C_N' associé à f . C'est un élément $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ invariant par la représentation adjointe. Par les homomorphismes $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ on en déduit un élément du <u>centre</u> de $U(\mathfrak{g})$ soit C_N qui est l'élément de Casimir de (ρ, N) . De plus $\rho(C_N) \neq 0$, car

$$C_N = \sum m_i n_i \qquad \operatorname{Tr}(\rho(C_N)) = \sum \operatorname{Tr}(\rho(m_i)\ \rho(n_i)) = \sum \delta_{ii} = \dim N$$

Le lemme de Schur montre alors que si (ρ, N) est irréductible $\rho(C_N)$ qui est un $\mathfrak{g}$.endomorphisme non nul de N est un automorphisme.

2.- <u>Nullité de certains groupes de cohomologie</u>.

<u>Définition 2</u> : <u>un</u> $\mathfrak{g}$.<u>module</u> V <u>est injectif si pour tout</u> $\mathfrak{g}$.<u>module</u> A , <u>tout sous</u>- $\mathfrak{g}$.<u>module</u> B <u>de</u> A <u>et tout</u> $\mathfrak{g}$.<u>homomorphisme</u> $f : B \to V$ <u>il existe un</u> $\mathfrak{g}$-<u>homomorphisme</u> $\bar{f} : A \longrightarrow V$ <u>qui prolonge</u> f .

Autrement dit pour tous les A et $B \subset A$ l'application canonique $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}(A,V) \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}(B,V)$ est <u>surjective</u>.

<u>Lemme 2</u>. <u>si</u> $V = \mathcal{L}(L;N)$ <u>où</u> L <u>est</u> U.<u>libre, alors</u> V <u>est injectif</u>.

Un $\mathfrak{g}$ - homomorphisme de $f : B \longrightarrow V$ est un invariant de $\mathcal{L}(B,V) =$ $= \mathcal{L}(B, \mathcal{L}(L,N)) \simeq \mathcal{L}(L, \mathcal{L}(B,N))$, autrement dit un $\mathfrak{g}$.homomorphisme de L dans $\mathcal{L}(B,N)$. Mais l'application canonique de $\mathcal{L}(A,N)$ sur $\mathcal{L}(B,N)$ est surjective (il s'agit d'espaces vectoriels) ; L étant libre, tout $\mathfrak{g}$ - homomorphisme de L dans $\mathcal{L}(B,N)$ se remonte en un $\mathfrak{g}$ - homomorphisme de L dans $\mathcal{L}(A,N)$. Donc l'application canonique de $\mathcal{L}(L,\mathcal{L}(A,N))$ dans $\mathcal{L}(L,\mathcal{L}(B,N))$ est surjective et par suite il en est de même de $\mathcal{L}(A,V)\to\mathcal{L}(B,V)$ par suite des identifications faites. C.Q.F.D.

<u>Proposition 1 : si</u> V <u>est injectif</u> $H^q(\mathfrak{g},V)=0$ <u>pour</u> $q>0$.

Soit $f\in Z^q(\mathfrak{g},V)$ $q>0$. f est donc un $\mathfrak{g}$.homomorphisme : $C_q\to V$ tel que $f\circ d=0$ c'est-à-dire nul sur $d\,C_{q+1}$. Mais C est acyclique donc $d\,C_{q+1}$ est le noyau N de l'opérateur $d : C_q\to C_{q-1}$ (car $q>0$). f étant nul sur N, il existe un $\mathfrak{g}$.homomorphisme et un seul g $d\,C_q\to V$ tel que $f=g\circ d$. Mais $d\,C_q$ est un sous-$\mathfrak{g}$-module de C_{q-1} et comme V est injectif il existe $\bar{g}\;C_{q-1}\to V$ prolongeant g. Par suite $f=\bar{g}\circ d$ et $f\in B^q(\mathfrak{g},V)$. Donc $B^q=Z^q$ et $H^q(\mathfrak{g},V)=0$ C.Q.F.D.

Avant d'énoncer la proposition 2, faisons les remarques suivantes: si c est dans le centre de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ et (θ,M) un module de représentations de $\mathfrak{g}$, $\theta(c)$ est un $\mathfrak{g}$.endomorphisme c^* et il existe donc un endomorphisme des $H^q(\mathfrak{g},M)$ transformant un cocycle f en $\theta(c)\circ f=c.f$

<u>Proposition 2 : si</u> c <u>est d'augmentation nulle</u> c^* <u>annule les</u> $H^q(\mathfrak{g},M)$

On a $(c.f)(\gamma)=f(c.\gamma)$ car f est un $\mathfrak{g}$.homomorphisme. On va construire par récurrence sur q des $\mathfrak{g}$.homomorphismes $k_q : C_q\to C_{q+1}$ tels que

$$c.\gamma = k\,d\gamma + d\,k\gamma \qquad \text{c'est-à-dire}$$

$$c.\gamma = k_q d\gamma + d\,k_{q+1}\gamma \qquad \gamma\in C_q$$

Supposons définis les k_r pour $r\leqslant q$. La récurrence commence avec $q=-1$ $k_{-1}=0$. C_q est U.libre, soit γ_α une U.base de C_q ; il suffira de définir les k_{γ_α} de sorte que

$$c.\gamma_\alpha = k_q d\gamma_\alpha + d\,k_{q+1}\gamma_\alpha$$

soit

$$d(k_{q+1}\gamma_\alpha) = c.\gamma_\alpha - k_q d\gamma_\alpha$$

Pour cela puisque C est acyclique il suffira de démontrer que le 2[e] membre est annulé par d (et ε si $q=-1$). Or $d_{\gamma_\alpha}\in C_{q-1}$ donc

$$d(c.\gamma_\alpha - k_q d\gamma_\alpha) = c.d_{\gamma_\alpha} - d\,k_q(d\gamma_\alpha) = k_{q-1}\,d\,d_{\gamma_\alpha}=0$$

et si $q=-1$ $k_q d_{\gamma_\alpha}=0$ $\varepsilon(c.\gamma_\alpha)=\varepsilon(c)\,\varepsilon(\gamma_\alpha)=0$ car $\varepsilon(c)=0$

k est donc bien défini. Soit Alors $f \in Z^q(\mathfrak{g},M)$. On aura

$$(c.f)(\gamma) = f(c.\gamma) = f(k\, d\gamma + d\, k\gamma) = (f\circ k)(d\gamma) .$$

donc $c.f$ est le cobord de $f\circ k$ et $H^q(\mathfrak{g},M) = 0$.

C.Q.F.D.

<u>Corollaire : si</u> (θ,M) <u>est une représentation irréductible et de dimension finie,</u> K <u>de caractéristique</u> 0 <u>et la forme bilinéaire</u> $Tr(\theta(x)\theta(y))$ <u>non dégénérée alors</u> $H^q(\mathfrak{g},M) = 0$ <u>pour</u> $q \geqslant 0$.

En effet C_M est dans le centre de $U(\mathfrak{g})$ et $\theta(C_M)$ un automorphisme de M donc C_M^* un automorphisme de $H^q(\mathfrak{g},M)$. Il ne peut être nul que si les $H^q(\mathfrak{g},M)$ sont nuls.

3.- <u>Interprétation de</u> $H^0(\mathfrak{g},M)$

Explicitons la formule du cobord donné à la fin de l'exposé 3.

$f \in C^p(\mathfrak{g},M)$ $\quad g = \delta f \quad$ $C^p(\mathfrak{g},M)$ étant l'espace des formes p-linéaires alternées : $\mathfrak{g}^p \to M$

Si $p = 0$ $\quad g(x_1) = \theta(x_1).f$

$p = 1$ $\quad g(x_1,x_2) = \theta(x_1)f(x_2) - \theta(x_2)f(x_1) - f([x_1,x_2])$

$p = 2$ $\quad g(x_1,x_2,x_3) = \theta(x_1)f(x_2,x_3) - \theta(x_2)f(x_1,x_3) + \theta(x_3)f(x_1,x_2) -$

$$- f([x_1,x_2],x_3) + f([x_1,x_3],x_2) - f([x_2,x_3],x_1) =$$

$$= \Sigma_3 \{\theta(x_1)f(x_2,x_3) - f([x_1,x_2],x_3)\} .$$

$C^{-1}(\mathfrak{g},M) = 0$ entraîne $B^0(\mathfrak{g},M) = 0$. Pour que $f \in Z^0(\mathfrak{g},M)$ il faut et il suffit que $\theta(x).f = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ c'est-à-dire que f soit invariant.

Il s'ensuit que $H^0(\mathfrak{g},M)$ <u>s'identifie canoniquement à l'espace</u> $M^\natural$ <u>des invariants de</u> M.

4.- <u>Interprétation de</u> $H^1(\mathfrak{g},M)$

Nous allons étudier le problème des extensions de $\mathfrak{g}$-modules. <u>Une extension de</u> (θ,N) <u>par</u> (θ',M) <u>est un</u> $\mathfrak{g}$<u>-module</u> (ψ,P) <u>et deux</u> $\mathfrak{g}$<u>-homomorphismes</u>

$$i : M \longrightarrow P$$
$$\pi : P \longrightarrow N$$

<u>tels que la suite</u> $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$ <u>soit exacte</u>.

<u>Deux extensions seront dites équivalentes si le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dd, "k"] \arrow[dr, "\pi"] & \\ M \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i_1"'] & & N \\ & P_1 \arrow[ur, "\pi_1"'] & \end{tikzcd}$$

<u>est commutatif.</u>

A la suite exacte $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$ correspond la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(N,M) \xrightarrow{\pi'} \mathcal{L}(P,M) \xrightarrow{i'} \mathcal{L}(M,M) \longrightarrow 0$$

où les homomorphismes de cette suite ont des $\mathcal{G}$-homomorphismes, $\mathcal{L}(Q,R)$ étant muni de la structure de $\mathcal{G}$-module définie dans l'exposé n° 1 . On peut appliquer la suite exacte de cohomologie, soit

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}(N,M)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\mathcal{L}(P,M)) \xrightarrow{i^*} H^0(\mathcal{L}(M,M)) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{L}(N,M))$$

$H^0(\mathcal{L}(Q,R))$ est l'ensemble des invariants de $\mathcal{L}(Q,R)$ c'est-à-dire les $\mathcal{G}$-homomorphismes de Q dans R . Dans $\mathcal{L}(M,M)$ il existe un élément privilégié qui est l'application identique j de M dans M . $\partial j \in H^1(\mathcal{L}(N,M))$ s'appelle <u>la classe caractéristique</u> ou <u>l'obstruction</u> de l'extension considérée.

Si cette classe est nulle, j est dans le noyau de ∂ donc dans l'image de i^*, c'est-à-dire qu'il existe un $\mathcal{G}$-homomorphisme f de P dans M tel que $f_o i$ soit l'identité de M.

Mais ceci est équivalent au fait que l'extension est inessentielle c'est-à-dire qu'il existe un sous espace N' de P invariant avec P somme directe de M et N' .

Si l'on a deux extensions équivalentes, l'obstruction est la même car le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "k"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_1"'] & P_1 \arrow[r, "\pi_1"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

fournit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathcal{L}(M,M)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H^1(\mathcal{L}(N,M)) \arrow[d] \\ H^0(\mathcal{L}(M,M)) \arrow[r, "\partial"] & H^1(\mathcal{L}(N,M)) \end{tikzcd}$$

Donc à toute classe d'extensions équivalentes correspond un élément de $H^1(\mathcal{L}(N,M))$ bien défini, nul si et seulement si l'extension est inessentielle. Réciproquement soit $c \in H^1(\mathcal{L}(N,M))$. Représentons N comme quotient d'un module libre sur U soit L $N = L/_R$. On a alors la suite exacte $0 \to R \to L \xrightarrow{\pi} N \to 0$ d'où

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(N,M) \longrightarrow \mathcal{L}(L,M) \longrightarrow \mathcal{L}(R,M) \longrightarrow 0$$

et il résulte du lemme 2 et de la proposition 1 que $H^1(\mathcal{L}(L,M)) = 0$. La suite exacte de cohomologie s'écrit alors

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}(L,M) \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}(R,M) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{L}(N,M)) \longrightarrow 0$$

donc $H^1(\mathcal{L}(N,M))$ s'identifie au quotient du groupe $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}(R,M)$ par le sous-groupe des $\mathfrak{g}$-homomorphismes $R \longrightarrow M$ qui se prolongent à L. Soit c' un $\mathfrak{g}$-homomorphisme $R \longrightarrow M$ tel que $c = \partial c'$. Posons $P' = (M + L)/Q$ où Q est le sous-groupe formé des $(c'(r),-r)$ $(r \in R)$. Soit k l'application canonique de $M \times L$ sur P'. On pose $i(m) = k(m,0)$ $\pi(k(m,\ell)) = \pi\ell$ ce qui a un sens car $\pi r = 0$ donc π s'annule sur Q. Comme $(M + (0)) \cap Q = (0)$ i est biunivoque et comme π est surjectif, il en est ainsi de π. De plus le noyau de π se compose des $k(m,r) = k(m+c'(r),0) = i(m + c'(r))$. Donc la suite

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P' \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

est exacte.

Enfin il existe un homomorphisme $q : L \longrightarrow P'$ avec $q(\ell) = k(0,\ell)$

Le diagramme suivant est alors commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, "c'"'] & L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & P' \arrow[r, "\pi"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{L}(N,M) \arrow[r] & \mathcal{L}(L,M) \arrow[r] & \mathcal{L}(R,M) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L}(N,M) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{L}(P',M) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{L}(M,M) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

et en cohomologie

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathcal{L}(R,M)) \arrow[r, "\partial"] & H^1(\mathcal{L}(N,M)) \\
H^0(\mathcal{L}(M,M)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, "c'^{\times}"] & H^1(\mathcal{L}(N,M)) \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Comme l'image par c'^{*} de l'identité dans M est précisément c' et que $\partial c' = c$ on voit que c est l'obstruction de l'extension P'

Enfin toute extension P se construit comme ceci car si $0 \to R \to L \to N$ comme L est libre on peut factoriser $L \xrightarrow{q} P \xrightarrow{\pi} N$ et les éléments de R sont envoyés dans le noyau de π i.e. dans M d'où le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{i} & L & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle c'} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & P & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et l'on définit une application de M + L sur P par $k(m, \ell) = i(m) + q(\ell)$ qui est nulle sur Q car le diagramme est commutatif.

On définit ainsi $k : P' \longrightarrow P$ et l'on voit tout de suite que

$$\begin{tikzcd} & & P' \arrow[d, "k"] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[ur] \arrow[dr] & P \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est commutatif.

<u>Théorème 1</u> : <u>il y a correspondance biunivoque entre les classes d'extensions équivalentes de</u> N, <u>par</u> M <u>et les éléments de</u> $H^1(\mathcal{L}(N,M))$

On explicite cette correspondance comme suit ; le cobord de la suite exacte est défini ainsi : on prend un élément de $Z^0(\mathcal{L}(M,M))$ soit l'identité dans M on le remonte en un élément de $C^0(\mathcal{L}(M,P))$ c'est-à-dire qu'on choisit $\rho : M \longrightarrow P$ tel que $\pi \circ \rho = 1$. Puis on prend le cobord de ρ qui est dans $Z^1(\mathcal{L}(N,M))$ autrement dit on considère la fonction $g : \mathfrak{G} \to \mathcal{L}(N,M)$ définie par $g(x) = \theta(x) \circ \rho - \rho \circ \theta'(x)$. La classe de cohomologie de g est l'obstruction de l'extension. L'application K-linéaire $(m,n) \longrightarrow m + \rho(n)$ identifie $M \times N$ à P et les opérateurs de $\mathfrak{G}$ sont définis par les matrices

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \theta(x) & g(x) \\ 0 & \theta'(x) \end{pmatrix}$$

On a
$$[\Psi(x), \Psi(y)] - \Psi([x,y]) = \begin{pmatrix} 0 & dg(x,y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Se reporter à la formule du IV) donc $dg = 0$. Réciproquement si $dg = 0$ on définit une représentation de $\mathfrak{G}$ dans $M \times N$ par les matrices $\Psi(x)$.

Si l'on change de section $\rho' = \rho + \ell$ on aura $g'(x) = g(x) + \theta(x) \circ \ell - \ell \circ \theta'(x)$ d'où $g' = g + \delta \ell$ donc g n'est modifié que par un cobord.

<u>Théorème 2</u> : <u>Il y a équivalence entre les 4 propositions suivantes</u>

(1) <u>pour tout $\mathfrak{g}$-module simple</u> M $\quad H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$

(2) <u>pour tout $\mathfrak{g}$-module</u> M $\quad H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$

(3) <u>pour tout $\mathfrak{g}$-homomorphisme</u> φ <u>de</u> M <u>sur</u> N $\quad \varphi(M^{\natural}) = N^{\natural}$

(4) <u>Toute représentation est complètement réductible.</u>

(1) ⇒ (2) M possède en effet une suite de Jordan-Hölder

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M .$$

$$M_{i+1}/M_i \quad \text{étant simples}$$

il suffit de montrer que si

$$H^1(\mathfrak{g}, P/Q) = H^1(\mathfrak{g}, Q) = 0 \quad \text{il s'ensuit que} \quad H_1(\mathfrak{g}, P) = 0 .$$

Ceci résulte de la suite exacte de cohomologie

$$0 = H^1(\mathfrak{g}, Q) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, P) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, P/Q) = 0$$

(2) ⇒ (3) $\quad M^{\natural} = H^0(\mathfrak{g}, M)$

$\qquad\qquad N^{\natural} = H^0(\mathfrak{g}, N)$

Soit en effet Q le noyau de φ, la suite exacte $0 \longrightarrow Q \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ nous donne la suite exacte $H^0(\mathfrak{g}, M) = M^{\natural} \xrightarrow[\varphi]{} H^0(\mathfrak{g}, N) = N^{\natural} \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, N) = 0$ ce qui exprime bien $\varphi(M^{\natural}) = N^{\natural}$.

(3) ⇒ (4) Il suffit de démontrer que si N est un sous-$\mathfrak{g}$-module de P, il existe un supplémentaire invariant M' de N, c'est-à-dire qu'il existe un $\mathfrak{g}$-homomorphisme f de $M = P/N$ dans P tel que $\pi \circ f$ soit l'identité i. (3) implique que

$$\mathcal{L}(M,P)^{\natural} \xrightarrow[\varphi]{} \mathcal{L}(M,M)^{\natural} \quad \text{est sur, donc qu'un tel } f \text{ existe.}$$

(4) $\Rightarrow$ (1) car si (4) est vraie toute extension est inessentielle donc

$$H^1(\mathcal{L}(N,M)) = 0 \text{ pour tout } N .$$

En prenant pour N le module de la représentation nulle, nous obtenons $M \simeq \mathcal{L}(N;M)$ donc $H^1(M) = 0$.
