P. CARTIER

Cohomologie des algèbres de Lie, III

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. nº 5, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A7_0>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55.
-:-:-:-

7 décembre 1954.

Exposé n° 5

COHOMOLOGIE DES ALGEBRES DE LIE, III

(Exposé par P. CARTIER)

1.- Interprétation de $H^2(\mathfrak{g}, M)$

La définition d'une extension d'algèbre de Lie se fait comme dans le cas des modules. Une extension $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{m}$ est définie par une suite exacte d'algèbres de Lie :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \xrightarrow{i} \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

Si on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{h} \arrow[dr, "\pi"] \arrow[d, "k"] & \\ \mathfrak{m} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & {} & \mathfrak{g} \\ & \mathfrak{h}' \arrow[ur, "\pi'"'] & \end{tikzcd}$$

on dit que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont des extensions équivalentes.

On va d'abord s'intéresser au cas où $\mathfrak{m}$ est abélien ;une extension $\mathfrak{h}$ définit alors $\mathfrak{m}$ comme $\mathfrak{g}$ -module de la façon suivante : $\mathfrak{m}$ est un idéal de $\mathfrak{h}$ donc est stable pour la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}$ d'où une représentation linéaire θ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{m}$. Mais si $m, m' \in \mathfrak{m}$

$$\theta(m)m' = [m,m'] = 0$$

donc $\theta(m) = 0$, θ s'annule sur $\mathfrak{m}$ et définit donc par passage au quotient une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$. On a $\theta(x)m = [y,m]$ quel que soit $y \in \mathfrak{h}$ avec $\pi(y) = x$.

On va établir une correspondance entre $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$ et les extensions de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{m}$ définissant la structure de $\mathfrak{g}$ -modules donnée sur $\mathfrak{m}$.

Pour cela soit ℓ une application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ telle que $\pi \circ \ell = 1$. π étant un homomorphisme annule les éléments $[\ell(x), \ell(y)] - \ell([x,y])$ qui sont donc dans $\mathfrak{m}$. Par suite on peut poser

$$[\ell(x), \ell(y)] - \ell([x,y]) = f(x,y) \in \mathfrak{m}$$

Il est clair que $f(x,x) = 0$ donc $f \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{m})$.

<u>Cette 2.cochaîne définit la loi de composition dans l'extension</u> $\mathfrak{h}$:

En effet on peut, ℓ <u>étant choisie</u>, identifier comme espaces vectoriels $\mathfrak{m} \times \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ par $(m,x) \longrightarrow m + \ell(x)$ et le crochet s'écrit ainsi :

$$[m + \ell(x), n + \ell(y)] = [\ell(x), n] + [m, \ell(y)] + [\ell(x), \ell(y)]$$

$$= \theta(x)n - \theta(y)m + \ell([x,y]) + f(x,y)$$

d'où par transport à $\mathfrak{m} \times \mathfrak{g}$

(1) $[(m,x),(n,y)] = (\theta(x)n - \theta(y)m + f(x,y), [x,y])$

C.Q.G.D.

Les deux axiomes des algèbres de Lie donnent des conditions sur la cochaîne f

(2) $[(m,x),(m,x)] = (f(x,x),0)$

$$[[(m,x),(n,y)](p,z)] = [(\theta(x)n - \theta(y)m + f(x,y),[xy]), (p,z)]$$

$$= (\theta([x,y])p - \theta(z)\theta(x)n + \theta(z)\theta(y)m + \theta(z)f(x,y) +$$
$$+ f([x,y],z) \ , \ [[x,y],z])$$

Si l'on fait la somme Σ des 3 expressions obtenues par permutation circulaire, on trouve 0 comme 2ème composante d'après l'identité de Jacobi dans $\mathfrak{g}$. La 1ère composante fournit :

$$\Sigma_3 \ \theta(z)f(x,y) + f([xy],z) = df(x,y,z)$$

à quoi il faut ajouter les termes en m, n, p, soit

$$\theta([yz])m - \theta(y)\theta(z)m + \theta(z)\theta(y)m = 0$$

et les termes semblables. Finalement

(3) $\Sigma = (df\ (x,y,z) \ , \ 0)$

<u>(2) exprime que</u> f <u>est une cochaîne et</u> $\Sigma = 0$ <u>que</u> f <u>est un cocycle</u>.

Réciproquement un 2-cocycle de f définit sur $\mathfrak{m} \times \mathfrak{g}$ une structure d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ par la formule (1). On définit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \xrightarrow{i} \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

par $i(m) = (m,0)$ $\pi(m,x) = x$. i est un homomorphisme parce que $[(m,0),(n,0)] = 0$ et il est clair sur (1) que π est un homomorphisme. Il existe une section ℓ particulière $\ell(x) = (0,x)$ et

$$[\ell(x), \ell(y)] - \ell([xy]) = [(0,x),(0,y)] - (0,[x,y])$$

$$= (f(x,y),0)$$

donc f est un des cocycles définis par l'extension.

Le cocycle f dépend de l'extension et de la section ℓ choisie. Soit ℓ' une autre section $\pi \circ \ell = \pi \circ \ell'$ donc $\ell'(x) - \ell(x) = g(x) \in \mathfrak{m}$. $g \in C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{m})$. On va calculer le cocycle attaché à ℓ'

$$f'(x,y) = [\ell'(x), \ell'(y)] - \ell'([x,y])$$

$$= [\ell(x)+g(x), \ell(y)+g(y)] - \ell([x,y]) - g([x,y])$$

$$= f(x,y) + \theta(x)\,g(y) - \theta(y)\,g(x) - g([xy])$$

donc $f' = f + \delta g$. <u>La classe de cohomologie de</u> f <u>est bien définie par l'extension seule</u>.

Une extension est <u>inessentielle</u> s'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{h}$ soit somme directe de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{m}$; elle est <u>triviale</u> si $\mathfrak{a}$ est un idéal. L'extension est inessentielle dans le cas et celui là seulement où existe une section $\ell : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ qui soit un homomorphisme. Alors $f(x,y) = [\ell(x), \ell(y)] - \ell([x,y]) = 0$ donc la classe de cohomologie de f est nulle. Réciproquement si la classe de l'extension est nulle, dans cette classe existe le cocyle nul, donc une section ℓ qui est un homomorphisme et l'extension est inessentielle.

<u>Théorème 1</u>. <u>Une extension $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{m}$ abélien définit une 2-classe de cohomologie qui définit l'extension à une équivalence près. Toute 2-classe est attachée à une extension. Cette extension est inessentielle si et seulement si sa classe est nulle</u>.

<u>Corollaire</u> : <u>Si</u> $H^1(\mathfrak{g},M) = H^2(\mathfrak{g},M) = 0$ <u>pour tout</u> $\mathfrak{g}$ <u>-module simple</u> M <u>non annulé par</u> M <u>et si</u> $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ <u>alors toute extension de</u> $\mathfrak{g}$ <u>à noyau abélien est inessentielle</u>.

En effet, calculons $H^1(\mathfrak{g}, K_0)$ K_0 étant le module trivial. Si $f \in K_0$ $\delta f(x) = \theta(x)f = 0$ donc $B^1(\mathfrak{g}, K_0)$ est nul ; si $f \in C^1(\mathfrak{g}, K_0)$ $\delta f(x,y) = -f([x,y])$. Si, donc $\delta f = 0$ f est nulle sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ donc $f = 0$; par suite $H^1(\mathfrak{g}, K_0) = 0$. Le théorème 2 de l'exposé précédent montre alors que <u>toute représentation de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible</u>.

Calculons alors $H^2(\mathfrak{g}, K_0)$. Soit f une 2-classe de cohomologie et $\mathfrak{h}$ l'extension qui lui correspond. Les opérateurs sur K_0 étant nuls, K_0 est le centre de $\mathfrak{h}$ donc la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}$ est nulle sur l'idéal K_0 et en définit une représentation de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}/K_0$ dans $\mathfrak{h}$. Il existe alors puisque toute représentation de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible, un sous espace $\mathfrak{a}$ invariant par $\mathfrak{g}$ c'est-à-dire un idéal, supplémentaire de K_0 dans $\mathfrak{h}$. <u>L'extension est triviale</u> donc $f = 0$ et $H^2(\mathfrak{g}, K_0) = 0$. Une récurrence utilisant la suite exacte de cohomologie analogue à celle utilisée au théorème 2 de l'exposé 4 montre que $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ pour tout $\mathfrak{g}$-module M de dimension finie. Alors le théorème 1 montre que toute extension à noyau abélien est inessentielle.

C.Q.F.D.

Avant de quitter les extensions à noyau abélien cherchons dans le cas d'une extension inessentielle les différentes sous-algèbres supplémentaires de $\mathfrak{m}$. Soient deux sections multiplicatives ℓ et ℓ', $\ell' - \ell = g$. Les cocycles définis par f et f' sont nuls et on a vu que $f' - f = \delta g$ donc $\delta g = 0$. Si $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}) = 0$ g est un cobord, il y a donc $m \in \mathfrak{m}$ tel que

$$\ell'(x) - \ell(x) = -\theta(x).m = [m, \ell(x)]$$

d'où
$$\ell'(x) = \ell(x) + [m, \ell(x)] = e^{\operatorname{ad} m}\ell(x)$$

car si $y \in \mathfrak{h}$ $[m,y] \in \mathfrak{m}$ $(\operatorname{ad} m)^2(y) = [m,[my]] = 0$ donc $(\operatorname{ad} m)^2 = 0$ et $e^{\operatorname{ad} m} = 1 + \operatorname{ad} m$.

2. <u>Le théorème de Levi-Malcev</u>.

Nous faisons sur $\mathfrak{g}$ <u>les hypothèses du corollaire du théorème 1</u> et nous allons étudier les extensions de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{m}$ <u>résoluble</u>.

<u>Lemme 1 : Soit $\mathfrak{k}$ un idéal caractéristique de $\mathfrak{m}$. On suppose que toute extension par $\mathfrak{k}$ et par $\mathfrak{m}/\mathfrak{k}$ soit inessentielle. Alors toute extension par $\mathfrak{m}$ est inessentielle</u>.

Soit $\mathfrak{h}$ une extension de $\mathfrak{g}'$ par $\mathfrak{m}$. Si $x \in \mathfrak{h}$ $\operatorname{ad} x$ induit une dérivation de $\mathfrak{m}$ qui conserve $\mathfrak{k}$ donc $\mathfrak{k}$ est un idéal dans $\mathfrak{h}$. On a alors les deux suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{h}/\mathfrak{k} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{h}/\mathfrak{k} \xrightarrow{\pi'} \mathfrak{h}/\mathfrak{m} = \mathfrak{g}' \longrightarrow 0$$

Par hypothèse il existe un homomorphisme ℓ de $\mathfrak{h}/\mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{h}$ tel que $\pi \circ \ell = 1$. De même $\ell' : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{h}/\mathfrak{k}$ $\pi' \circ \ell' = 1$. Alors $\ell \circ \ell'$ est un homomorphisme de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{h}$ et $\pi' \circ \pi$ est la projection de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g}'$. On a donc $(\pi' \circ \pi) \circ (\ell \circ \ell') = \pi' \circ \ell' = 1$. Donc $\mathfrak{h}$ est une extension inessentielle

<u>Corollaire</u>: <u>si $\mathfrak{m}$ est résoluble, toute extension de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{m}$ est inessentielle</u>.

On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{m}$. Puisque $\mathfrak{m}$ est résoluble $\dim [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] < \dim \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}/[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ est abélienne. Le théorème étant démontré pour les extensions abéliennes, la récurrence se fera à l'aide du lemme 1.

<u>Lemme 2</u> : <u>Soit $\mathfrak{m}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{h}$</u> $\mathfrak{n} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}]$ <u>et</u> (θ, v) <u>une représentation linéaire de $\mathfrak{h}$. Si</u> $n \in \mathfrak{n}$, $\theta(n)$ <u>est dans le radical de l'algèbre associative engendrée par</u> $\theta(\mathfrak{h})$ <u>donc est nilpotent</u>.

En étendant le corps de base, on peut supposer K algèbriquement clos.

Soit (θ, V) une représentation linéaire de $\mathfrak{h}$ et $(0) = V_n \subset V_{n-1} \dots \subset \subset \dots V_1 \subset V_0 = V$ une suite de sous-espaces invariants par $\theta(\mathfrak{m})$ et tels que

$\theta(m)\, v \equiv h_i(m)\, v \mod V_{i+1}$ si $v \in V_i$ (ceci d'après le théorème de Lie)

On a $\theta(m)^k v \equiv h_i^k(m) v$ donc si $\theta(m)$ est nilpotent $h_i(m) = 0$. Réciproquement si $h_i(m) = 0$, $\theta(m) V_i \subset V_{i+1}$ et $\theta(m)^n = 0$. Donc l'ensemble des $m \in \mathfrak{m}$ tels que $\theta(m)$ soit nilpotent forment un sous-espace de $\mathfrak{m}$ et même un idéal puisqu'il contient $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$. Soit alors $x \in \mathfrak{h}$, $m \in \mathfrak{m}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{m}'$ engendrée par m et x est résoluble et $[x,m] \in [\mathfrak{m}', \mathfrak{m}']$. D'après le théorème de Lie $\theta([x,m])$ est nilpotent et il en est de même d'après ce qu'on a vu de toute combinaison linéaire de tels éléments donc $\theta(n)$ est nilpotent si $n \in \mathfrak{n}$.

Soit U l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{h}$ et (ψ, W) une représentation linéaire irréductible de $\theta(U)$. Elle définit de manière évidente une représentation linéaire irréductible de U i.e. de $\mathfrak{g}$ dans W. Restreinte à $\mathfrak{n}$ cette représentation est nilpotente et le théorème d'Engel prouve l'existence d'un $w \neq 0$ dans W annulé par $\mathfrak{n}$. Comme $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{h}$ l'ensemble des w annulés par $\mathfrak{n}$ est stable pour $\mathfrak{h}$ et comme la représentation est irréductible, tout w est annulé par $\mathfrak{n}$. Donc $\theta(\mathfrak{n})$ est contenu dans le radical de $\theta(U)$.

C.Q.F.D.

<u>Lemme 3</u> : <u>Si</u> D <u>est une dérivation nilpotente d'une algèbre non nécessairement associative</u> A, exp D = S <u>est au automorphisme de</u> A.

$$S(xy) = \sum \frac{1}{k!} D^k(xy) = \sum \frac{1}{k!} \sum \frac{k!}{(k-m)!\,m!} D^m x\, D^{k-m} y$$

$$= \sum \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} D^p x\, D^q y = Sx.Sy \quad \text{d'après la formule de Leibniz}$$

toutes les sommes étant en réalité finies.

<u>Définition</u> : <u>on pose</u> $\sigma(x) = \exp \operatorname{ad} x$ <u>pour</u> $x \in \mathfrak{n}$. <u>Les automorphismes du groupe engendré par les</u> $\sigma(x)$ <u>sont dits spéciaux</u>.

Ceci dit revenons au cas de l'extension $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{n}$ résoluble. Elle est inessentielle. Soient deux sections multiplicatives ℓ_1 et ℓ_2 de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$. On pose $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$. $\bar{\mathfrak{n}}$ est abélien et $\bar{\mathfrak{h}}/\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{h}/\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$

π' est la projection de $\mathfrak{h}$ sur $\bar{\mathfrak{h}}$. $\pi' \circ \ell_1 = k$ est une section de $\mathfrak{g}$ dans $\bar{\mathfrak{h}}$ et $\bar{\mathfrak{n}}$ est abélien donc il existe un automorphisme spécial de $\bar{\mathfrak{h}}$ soit σ avec $k_1 = \sigma \circ k_2$. Comme $\pi'([\mathfrak{h},\mathfrak{n}]) = [\bar{\mathfrak{h}}, \bar{\mathfrak{n}}]$, il existe un automorphisme spécial de $\mathfrak{h}$ soit σ' avec $\pi' \circ \sigma' = \sigma \circ \pi'$

Alors $\pi' \circ \ell_1 = k_1 = \sigma \circ k_2 = \sigma \circ \pi' \circ \ell_2 = \pi' \circ \sigma' \circ \ell_2 = \pi' \circ \ell'_2$

par suite $\pi' \circ \ell_1 = \pi' \circ \ell'_2$, $\ell_1 - \ell'_2$ applique $\mathfrak{g}$ dans $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ et $\ell_1(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = \ell'_2(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = \mathfrak{h}'$. $\mathfrak{h}'$ est une extension de $\mathfrak{g}$ par $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$. En appliquant un raisonnement par récurrence il existe un automorphisme spécial de $\mathfrak{h}'$ soit σ'' avec

$$\ell_1 = \sigma'' \circ \ell'_2 = \sigma'' \circ \sigma' \circ \ell_2$$

Comme $[\mathfrak{h}', [\mathfrak{m},\mathfrak{m}]] \subset [\mathfrak{h},\mathfrak{m}]$ σ'' est un automorphisme spécial de $\mathfrak{h}$ et ℓ_1 se déduit de ℓ_2 par $\sigma'' \circ \sigma'$.

Théorème 2 (Levi-Malcev) : Si $H^1(\mathfrak{g}, M) = H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ pour tout module simple non annulé par $\mathfrak{g}$ et si $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, toute extension de $\mathfrak{g}$ à noyau résoluble est inessentielle. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux sections multiplicatives de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$, il existe un automorphisme spécial σ de $\mathfrak{h}$ avec $\ell_1 = \sigma \circ \ell_2$

On verra que les algèbres semi-simples vérifient les hypothèses de ce théorème.
