

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

Théorie des algèbres semi-simples

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 7, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A10_0

© Séminaire "Sophus Lie"
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 7

THÉORIE DES ALGÈBRES SEMI-SIMPLES

(Exposé de P. CARTIER, le 4.1.55)

Le corps de base est supposé de caractéristique 0 dans cet exposé.

1.- Préliminaires.

Soit V un espace vectoriel de dimension quelconque sur K et A une famille d'endomorphismes de V . On dit que V muni de A est complètement réductible si tout espace de V invariant par A admet un supplémentaire invariant par A .

Lemme 1.- V étant complètement réductible, on appelle V^h le sous espace des vecteurs annulés par tous les $X \in A$ et V^0 le sous espace engendré par les vecteurs Xv ($X \in A, v \in V$).

1). V est somme directe de V^h et V^0 .

2). si V est muni d'une différentielle d commutant aux $X \in A$ et telle que Xv est un bord si v est un cycle $H(V) \simeq H(V^h)$, ($H(V)$ désigne l'homologie de V pour d , $H(V) = Z(V)/B(V)$).

1) Il est clair que V^h et V^0 sont invariants par A . V^h admet donc un supplémentaire invariant W . Si $v = w + v'$ $w \in W$ $v' \in V^h$ on a $Xv = Xw \in W$ donc $W \supset V^0$. Soit alors T un supplémentaire de V^0 dans W . Si $t \in T$ $Xt \in T \cap V^0 = 0$ donc $t \in V^h$ mais $T \cap V^h \subset W \cap V^h = 0$ donc $t = 0$, autrement dit $T = 0$ $W = V^0$ et V est somme directe de V^h et V^0 . Noter que si U est un sous-espace invariant de V , U est somme directe de U^0 et U^h ; par ailleurs il est clair que $U^0 \subset V^0$ et $U^h \subset V^h$. Par suite $U^0 = U \cap V^0$ $U^h = U \cap V^h$ en particulier si $U \subset V^0$ $U = U^0$.

2) d commutant à A , V^0 et V^h sont invariants par d donc $H(V)$ est somme directe de $H(V^0)$ et $H(V^h)$. Il suffit donc de montrer que $H(V^0) = 0$. Soit $v \in V^0$ $dv = 0$, U le sous espace invariant engendré par v : il est sous tendu par v et les Xv . Mais $U \subset V^0$ donc $U \subset U^0$ et v est donc de la forme $\sum h_i X_i v + \sum \mu_i Y_i Z_i v$. v est un cycle donc $X_i v$ est un bord; par ailleurs $d Z_i v = Z_i dv = 0$ donc $Z_i v$ est un cycle et $Y_i Z_i v$ est un bord. Finalement v est un bord.

C.Q.F.D.

Ce lemme permet de définir une application $\mathfrak{h} : V \rightarrow V^{\mathfrak{h}}$ parallèlement à V^0 , donc $v^{\mathfrak{h}\mathfrak{h}} = v^{\mathfrak{h}}$ ($X v$) $^{\mathfrak{h}} = 0$.

2.- Cohomologie des algèbres semi-simples.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple, (θ, V) une représentation linéaire irréductible non triviale de \mathfrak{g} , \mathfrak{a} l'ensemble des éléments de \mathfrak{g} annulés par θ . Il existe alors un idéal \mathfrak{L} tel que \mathfrak{g} soit isomorphe à $\mathfrak{a} \times \mathfrak{L}$ (cf. Exposé n° 6); si on restreint la représentation θ à \mathfrak{L} elle est fidèle et \mathfrak{L} est encore semi-simple donc (théorème 3 de l'Exposé n° 6) la restriction à \mathfrak{L} de la forme quadratique $\text{Tr}(\theta(x)\theta(y))$ est non dégénérée. On peut donc former l'élément de Casimir C_V correspondant à l'idéal \mathfrak{L} et à la forme quadratique $\text{Tr}(\theta(x)\theta(y))$. C'est un élément du centre de $U(\mathfrak{g})$ donc (Exposé n° 4, Proposition 2) C_V^* annule les $H^p(\mathfrak{g}, V)$, mais $\theta(C_V)$ est un automorphisme de V et ceci implique que $H^p(\mathfrak{g}, V) = 0$ pour $p \geq 0$. En outre si $V = K$, $\theta = 0$, $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$ car $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ on peut appliquer le théorème 2 de l'Exposé 4, qui montre donc que toute représentation de \mathfrak{g} est complètement réductible.

Donc si (θ, V) est une représentation linéaire quelconque de dimension finie de \mathfrak{g} , V est somme directe de sous modules irréductibles ou triviaux, donc $V = V^{\mathfrak{h}} + \sum V_i$, V_i étant irréductible non trivial. Comme $H^p(\mathfrak{g}, V_i) = 0$ on voit que $H^p(\mathfrak{g}, V) = H^p(\mathfrak{g}, V^{\mathfrak{h}})$. Il reste donc à étudier le cas de $V = K$, $\theta = 0$.

Pour ceci rappelons que $C^p(\mathfrak{g}, K)$ est l'espace des \mathfrak{g} -homomorphismes de C_p dans K autrement dit les formes linéaires sur C_p telles que $f(u.c) = 0$ si $u \in U(\mathfrak{g})$, $\xi(u) = 0$. Rappelons que C est engendrée par les x et les \underline{x} ($x \in \mathfrak{g}$) et que $d x = \underline{x}$. On définit alors $\theta(x)f$ et $i(x)f$ pour la cochaîne f par les formules

$$(\theta(x)f)(c) = f(c.\underline{x}) \quad (i(x)f)(c) = f(c.x)(-1)^p$$

d'où

$$(i(x)df + di(x)f)(c) = f(d(c.x)) - f(dc.x) = f(c.\underline{x}) = (\theta(x)f)(c)$$

donc si $df = 0$, $\theta(x)f = di(x)f$ est un bord. Comme il est clair que $[\theta(x)\theta(y)] = \theta([x y])$ c'est-à-dire que les $\theta(x)$ définissent une représentation linéaire de \mathfrak{g} dans $C^p(\mathfrak{g}, K)$ et que par ailleurs $\theta(x)d = i(x)d^2 + di(x)d = d\theta(x)$ (car $d^2 = 0$), il suffit de remarquer que toute représentation de \mathfrak{g} est complètement réductible pour pouvoir appliquer le 2) du lemme 1. Nous allons montrer que, si f est annulée par les $\theta(x)$,

$df = 0$, ce qui achèvera de prouver que $H^P(\mathfrak{g}, K)$ s'identifie aux cochaînes invariantes de degré P . Or il suffit de calculer $d(x_1 \dots x_p)$ dans C_p

$$d(x_1 \dots x_p) = \sum_i (-1)^{i-1} x_1 \dots \underline{x}_i \dots x_p$$

$$\begin{aligned} \text{mais } \underline{x}_i x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_p &= x_1 \dots \underline{x}_i \dots x_p + \sum_{j < i} x_1 \dots [x_i, x_j] \dots \hat{x}_i \dots x_p \\ x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_p \underline{x}_i &= x_1 \dots \underline{x}_i \dots x_p - \sum_{j > i} x_1 \dots \hat{x}_i \dots [x_i, x_j] \dots x_p \end{aligned}$$

additionnons ces deux égalités membre à membre, multiplions par $(-1)^{i-1}$ et sommons en i ; il viendra alors en utilisant le fait que les x_i anticommuent dans $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} &\sum (-1)^{i-1} \underline{x}_i x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_p + \sum (-1)^{i-1} x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_p \underline{x}_i \\ &= 2 d(x_1 \dots x_p) + \sum_i \sum_{j < i} (-1)^{i+j-2} [x_i, x_j] x_1 \dots \hat{x}_j \dots \hat{x}_i \dots x_p \\ &\quad + \sum_i \sum_{j > i} (-1)^{i+j-2} [x_i, x_j] x_1 \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j \dots x_p \\ &= 2 d(x_1 \dots x_p) \end{aligned}$$

Mais f s'annule sur les termes commençant ou se terminant par \underline{x}_i donc $2 df(x_1 \dots x_p) = 0$ c'est-à-dire $df = 0$.

Remarquons finalement que les cochaînes à valeurs dans K s'identifient aux formes linéaires sur l'algèbre extérieure $\wedge(\mathfrak{g})$ et qu'alors

$$(\mathcal{D}(x)f)(a) = f(a \underline{x}) = -f([\underline{x}, a]) = -f(\mathcal{D}(x)a) \quad a \in \wedge(\mathfrak{g})$$

$\mathcal{D}(x)a$ désignant la valeur de a pour la dérivation de $\wedge(\mathfrak{g})$ qui prolonge adx sur $\wedge^1(\mathfrak{g})$. Autrement dit $\mathcal{D}(x)f = 0$ signifie que f est une forme multilinéaire invariante sur \mathfrak{g} .

Théorème 1 : si V est un \mathfrak{g} -module de dimension finie $H^P(\mathfrak{g}, V)$ est isomorphe à $H^P(\mathfrak{g}, V^H)$. Par ailleurs $H^P(\mathfrak{g}, K)$ s'identifie à l'espace des formes p -linéaires alternées invariantes sur \mathfrak{g} .

Tirons maintenant les conséquences de ce théorème en ce qui concerne la théorie des algèbres semi-simples. Tout d'abord on a vu que toute représentation de \mathfrak{g} est complètement réductible. Réciproquement si cette propriété est vraie, la représentation adjointe est complètement réductible donc tout idéal admet une supplémentaire. Si \mathfrak{g} n'était pas semi-simple, elle aurait un idéal abélien non nul α , alors $\mathfrak{g} \simeq \alpha \times \mathfrak{B}$ et toute représentation de α se prolonge en une représentation de \mathfrak{g} nulle sur \mathfrak{B} . Or une algèbre de Lie abélienne possède des représentations non complètement réductibles, par exemple, la représentation matricielle

$$a \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & \lambda(a) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \lambda \text{ forme linéaire sur } \mathfrak{a} .$$

donc :

Théorème 2 : Pour qu'une algèbre de Lie \mathfrak{g} soit semi simple, il faut et il suffit que toute représentation linéaire de \mathfrak{g} soit complètement réductible.

Corollaire : si \mathfrak{g} est semi-simple, toute dérivation de \mathfrak{g} est intérieure.

Soit \mathfrak{D} l'algèbre de Lie des dérivations de \mathfrak{g} , \mathfrak{J} l'idéal de \mathfrak{D} formé des dérivations intérieures. $x \rightarrow \text{adx}$ est un isomorphisme de \mathfrak{g} sur \mathfrak{J} ; donc \mathfrak{J} est un idéal semi-simple de \mathfrak{D} . La représentation adjointe de \mathfrak{J} dans \mathfrak{D} est complètement réductible, donc \mathfrak{D} est somme directe de $[\mathfrak{J}, \mathfrak{D}]$ et du sous espace $\mathfrak{D}^{\mathfrak{J}}$ des éléments commutant à \mathfrak{J} . Or si $D \in \mathfrak{D}^{\mathfrak{J}}$ $[\text{adx}, D] = \text{ad}Dx = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, mais alors $Dx = 0$ et finalement $D = 0$. Comme $[\mathfrak{J}, \mathfrak{D}] \subset \mathfrak{J}$ puisque \mathfrak{J} est un idéal de \mathfrak{D} , $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}$.
C.Q.F.D.

On peut démontrer ceci autrement : D une dérivation de \mathfrak{g} est une 1-cochaîne à valeurs dans \mathfrak{g} (muni de la représentation adjointe)

$$\begin{aligned} \delta D(x, y) &= \text{adx } D(y) - \text{ady } D(x) - D([x, y]) \\ &= [x, D(y)] + [D(x), y] - D([x, y]) = 0 \end{aligned}$$

D est un cocycle donc un cobord puisque $\mathfrak{g}^{\mathfrak{g}} = 0$ (c'est le centre de \mathfrak{g}) et il existe $a \in \mathfrak{g}$ tel que $D(x) = -\text{adx}.a = \text{ada}.x$.

Théorème 3 : Si \mathfrak{g} est semi-simple, toute extension de \mathfrak{g} par une algèbre résoluble est inessentielle. Si \mathfrak{a} et \mathfrak{a}' sont deux sections, elles sont conjuguées par un automorphisme spécial.

Il suffit de remarquer que $H^2(\mathfrak{g}, V) = H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$ pour toute représentation irréductible non triviale de \mathfrak{g} et que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ pour pouvoir appliquer le théorème 2 de l'Exposé n° 5.

3.- Algèbres réductives.

Définition : Si \mathfrak{h} est une sous-algèbre de \mathfrak{g} , on dira que \mathfrak{h} est réductive dans \mathfrak{g} lorsque la représentation adjointe de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} est complètement réductible, \mathfrak{g} réductive dans \mathfrak{g} se dira simplement \mathfrak{g} -réductive.

Théorème 4 : Les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ non nul il existe une représentation irréductible (θ, V) de \mathfrak{g} avec $\theta(x) \neq 0$.
- 2) \mathfrak{g} est somme directe d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre

abélienne : $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (\mathfrak{z} centre de \mathfrak{g}).

3) \mathfrak{g} est réductive.

1) \implies 3) Soit \mathfrak{m} un idéal résoluble de \mathfrak{g} et $\mathfrak{u} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{g}]$. Le lemme 2 de l'Exposé n° 5 montre que $\mathcal{O}([\mathfrak{m}, \mathfrak{g}])$ est dans le radical de l'algèbre associative $\mathcal{O}(U(\mathfrak{g}))$ donc que $\mathcal{O}(\mathfrak{u}) = 0$ si (\mathcal{O}, V) est une représentation irréductible. Finalement $\mathfrak{u} = 0$ d'après la condition 1). Tout idéal résoluble de \mathfrak{g} est contenu dans le centre \mathfrak{z} de \mathfrak{g} . $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ n'a pas d'idéal résoluble $\neq 0$ car un tel idéal serait de la forme $\mathfrak{m}/\mathfrak{z}$ et \mathfrak{m} serait résoluble $\neq \mathfrak{z}$. Donc $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ est semi-simple. La représentation adjointe de \mathfrak{g} s'annule sur \mathfrak{z} et toute représentation de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ est complètement réductible, donc \mathfrak{g} est réductive.

3) \implies 2) Soit \mathfrak{g} réductive. Le lemme 1 montre que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{h}} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ c'est-à-dire $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. D'autre part $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est somme directe d'idéaux minimaux qui ne peuvent être abéliens sinon ils appartiendraient à \mathfrak{z} . Donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est somme directe d'algèbres simples : elle est semi-simple.

2) \implies 1) Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{a}$, \mathfrak{h} semi-simple, \mathfrak{a} abélienne. La représentation adjointe de \mathfrak{h} est fidèle sur \mathfrak{h} . Soit une base $\lambda_1 \dots \lambda_n$ du dual de l'espace vectoriel \mathfrak{a} . On construit une représentation complètement réductible fidèle de \mathfrak{g} en posant

$$\mathcal{O}(\mathfrak{h} + \mathfrak{a}) = \left\| \begin{array}{cc} \text{adh} & 0 \\ \lambda_1(\mathfrak{a}) & \\ 0 & \lambda_n(\mathfrak{a}) \end{array} \right\| \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Supposons donnée une représentation irréductible d'une algèbre de Lie réductive soit (\mathcal{O}, V) . Soit \mathfrak{a} un idéal abélien de \mathfrak{g} contenu dans le centre \mathfrak{z} de \mathfrak{g} . Le commutant de $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ est un corps L d'après le lemme de Schur, corps qui contient $\mathcal{O}(\mathfrak{a})$. Donc l'algèbre d'opérateurs engendrée par $\mathcal{O}(\mathfrak{a})$ est un sous corps M de L et la réduction à \mathfrak{a} de la représentation donnée est complètement réductible. Même résultat si (\mathcal{O}, V) est complètement réductible.

Remarquons que si A est une algèbre associative et commutative toute représentation irréductible s'effectue dans A/M où M est un idéal maximal de A . De là on déduit que toute représentation irréductible d'une algèbre de Lie abélienne \mathfrak{a} s'obtient comme suit : on considère une extension de degré finie L sur K et une application linéaire \mathcal{O} de \mathfrak{a} dans L , $\mathcal{O}(\mathfrak{a})$ engendrant le corps L sur K ; la représentation se passe alors dans L avec $\mathcal{O}(x)(\ell) = \mathcal{O}(x) \cdot \ell$ (produit dans le corps L).

Soit alors \mathfrak{g} réductive $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{z}$, (θ, V) une représentation linéaire de \mathfrak{g} dont la restriction à \mathfrak{z} est complètement réductible. Il résulte de ce qu'on vient de dire que V est somme directe de sous-espaces V_i invariants par $\theta(\mathfrak{z})$, la restriction de $\theta(\mathfrak{z})$ à V_i engendrant un corps L_i d'opérateurs et L_i étant non isomorphe à L_j pour $i \neq j$. Tout opérateur commutant à $\theta(\mathfrak{z})$ conserve alors les V_i qui sont donc invariants par $\theta(\mathfrak{g})$. Un sous-espace de V_i invariant par $\theta(\mathfrak{g})$ est alors la même chose qu'un sous-espace L_i -vectoriel de V_i invariant par \mathfrak{h} . Mais le critère de Cartan montre immédiatement que \mathfrak{h} étant semi-simple, il en est de même de $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}^{L_i}$ (algèbre déduite de \mathfrak{h} par extension du corps des scalaires) et donc toute représentation de \mathfrak{h}' est complètement réductible. Donc la représentation de \mathfrak{g} dans V_i est complètement réductible, ainsi que la représentation de \mathfrak{g} dans V .

Proposition 1 : \mathfrak{g} étant réductive, pour qu'une représentation de \mathfrak{g} soit complètement réductible, il faut et il suffit que la restriction de cette représentation au centre \mathfrak{z} de \mathfrak{g} le soit.

Considérons maintenant deux représentations complètement réductibles de \mathfrak{g} , (θ_1, V_1) et leur produit tensoriel (ρ, W) . La restriction de ρ à \mathfrak{z} est identique au produit des restrictions à \mathfrak{z} de θ_1 et θ_2 . Si nous montrons donc que le produit tensoriel de deux représentations complètement réductibles de \mathfrak{z} est de cette espèce, une double application de la Proposition 1 montrera que ρ est complètement réductible. Soient donc deux extensions L_i de K et $\psi_i = \mathfrak{z} \rightarrow L_i$ deux applications linéaires, on définit une représentation linéaire de $\mathfrak{z} \times \mathfrak{z}$ dans $L_1 \otimes L_2$ en posant $\theta(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) = \psi_1(\mathfrak{z}_1) \otimes 1 + 1 \otimes \psi_2(\mathfrak{z}_2)$. Un sous espace invariant de $L_1 \otimes L_2$ est alors ni plus ni moins qu'un idéal de l'algèbre $L_1 \otimes L_2$. Mais on est en caractéristique nulle, donc $L_1 \otimes L_2$ est une algèbre semi-simple donc la représentation de $\mathfrak{z} \times \mathfrak{z}$ est complètement réductible et il en est de même de la restriction de cette représentation à l'ensemble des (z, z) . Autrement dit le produit tensoriel des représentations ψ_1 et ψ_2 est complètement réductible.

Proposition 2 : le produit tensoriel de deux représentations complètement réductibles d'une algèbre de Lie quelconque est complètement réductible.

La proposition a été démontrée pour \mathfrak{g} réductive. Mais si \mathfrak{u} est le noyau de $\theta_1 \oplus \theta_2$, on a, en fait, affaire à des représentations de $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$

et \mathcal{O}/\mathcal{M} est réductive d'après la condition 1 du théorème 4.

Corollaire : si (θ, V) est complètement réductible, il en est de même des représentations canoniques de \mathcal{O} dans $T(V)$, $S(V)$, $\wedge(V)$. De plus si V est une algèbre de Lie dont les $\theta(g)$ sont des dérivations, la représentation de \mathcal{O} dans $U(V)$ est aussi complètement réductible.

$S(V)$ et $\wedge(V)$ étant des quotients de $T(V)$ et $T(V)$ étant somme directe des $\underbrace{V \otimes V \dots \otimes V}_{n \text{ fois}}$ les premières assertions sont évidentes. D'autre part

$U(V)$ est quotient de $S(V)$ par l'idéal J engendré par les $u \otimes v - v \otimes u - [u, v] = g_{u,v}$ et J est stable pour les $\theta(x)$ car

$$\theta(x)g_{u,v} = g_{\theta(x)u, v} + g_{u, \theta(x)v} \in J$$

Ce corollaire s'appliquera au cas de \mathfrak{h} réductive dans \mathcal{O} , la représentation de \mathfrak{h} dans \mathcal{O} étant la représentation adjointe.

Théorème 5 : si \mathfrak{h} est réductive dans \mathcal{O} et (θ, V) est une représentation complètement réductible de \mathcal{O} , cette représentation reste de même espèce quand on la restreint à \mathfrak{h} .

On peut sans restreindre la généralité supposer (θ, V) irréductible. Soit $W \subset V$ un sous espace irréductible pour \mathfrak{h} . Comme V est irréductible pour \mathcal{O} , tout élément de V est de la forme $\sum \theta(u_i)w_i$, ($w_i \in W$, $u_i \in U(\mathcal{O})$). Autrement l'application $\rho : u \otimes w \rightarrow \theta(u)w$ de $U(\mathcal{O}) \otimes W \rightarrow V$ est surjective. Montrons que cette application est compatible avec les opérateurs de \mathfrak{h} . $d_x u \rightarrow xu - ux$ ($x \in \mathfrak{h}$) est la dérivation de $U(\mathcal{O})$ qui prolonge adx donc la représentation $x \rightarrow d_x$ de \mathfrak{h} dans $U(\mathcal{O})$ est complètement réductible (corollaire de la proposition 2). D'autre part, l'image de $d_x u \otimes w + u \otimes \theta(x)w$ est $\theta(d_x u)w + \theta(u)\theta(x)w = \theta(x)\theta(u)w$ donc ρ est compatible avec les opérateurs de \mathfrak{h} . La représentation de \mathfrak{h} dans $U(\mathcal{O}) \otimes W$ étant complètement réductible, il en est de même de la représentation de \mathfrak{h} dans V . C.Q.F.D.

4.- Le théorème des invariants de Hilbert.

V est une algèbre de Lie et θ une représentation complètement réductible de \mathcal{O} dans V . $U = U(V)$ est l'algèbre enveloppante de V . D'après le corollaire de la proposition 2 et le lemme 1, $U = U^{\mathfrak{h}} + U^0$. Comme les $\theta(g)$ sont des dérivations $U^{\mathfrak{h}}$ est une sous-algèbre. D'autre part si $u \in U^{\mathfrak{h}}$ $v \in U^0$ on a $v = \sum \theta(g_i)v_i$ et $uv = \sum u\theta(g_i)v_i = \sum \theta(g_i)(uv_i) \in U^0$ donc

$U^h U^0 \subset U^0$. De même $U^0 U^h \subset U^0$. L'application h a donc les propriétés :

$$(u v^h)^h = u^h v^h = (u^h v)^h .$$

Plus généralement soit \mathcal{O} une classe de représentation irréductible de \mathcal{G} (de dimension finie) et $U_{\mathcal{O}}$ le sous-espace de U engendré par tous les sous-espaces invariants irréductibles de classe \mathcal{O} . Le théorème de densité de Jacobson montre que U est somme directe des $U_{\mathcal{O}}$. D'autre part, les $U_{\mathcal{O}}$ sont invariants par $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ et par tous les opérateurs commutant aux $\mathcal{O}(g)$ en particulier aux multiplications à droite et à gauche par les $u \in U^h$. Autrement dit les $U_{\mathcal{O}}$ sont des modules sur U^h .

Théorème 6 : L'algèbre U^h a un nombre fini de générateurs. Chaque $U_{\mathcal{O}}$ est un module de type fini sur U^h .

Les applications les plus importantes concernent le cas où \mathcal{G} est une sous algèbre réductive de V , et le cas où V est abélienne, c'est-à-dire où V est une représentation de \mathcal{G} simplement supposée complètement réductible.

Démonstration : soit d'abord V abélienne. U^h est somme des $U^h \cap U^p$ ($U^p = S^p(V)$) car les U^p sont des sous-espaces invariants. Soit I l'idéal de $S(V)$ engendré par les $U^h \cap U^p$ pour $p > 0$. D'après le théorème de Hilbert, I a une base finie $s_1 \dots s_n$ dont on peut prendre les membres dans les $U^p \cap U^h$. Soit T la sous algèbre engendrée par les s_i et $T \subset U^h$. Montrons par récurrence sur p que $T \cap U^p = U^h \cap U^p$. C'est évident si $p = 0$ et supposons le démontré pour $p < q$ alors si $u \in U^q \cap U^h$ $u = \sum s_i^{q_1} s_i^{q_2} \dots s_i^{q_n}$ $s_i^{q_j}$ étant homogène de degré p_i . Comme $\deg s_i > 0$ on peut supposer $p_i < q$. Alors $u = \sum (s_i^{q_1} s_i^{q_2} \dots s_i^{q_n})^h = \sum s_i^{q_1 h} s_i^{q_2 h} \dots s_i^{q_n h}$. Mais $t_i = s_i^{q_i h} \in U^h \cap U^{p_i} \subset T \cap U^{p_i}$ donc $t_i \in T$ et finalement $u \in T$. Donc $U^h \cap U^q = T \cap U^q$.

Venons-en à l'assertion sur $U_{\mathcal{O}}(\rho, D)$ sera une représentation de classe \mathcal{O} et L l'espace des applications linéaires de D dans $S(V)$. L'application $\tau : f \otimes d \rightarrow f(d)$ applique $L \otimes D$ sur $S(V)$ et elle est compatible avec les opérateurs de \mathcal{G} . Par ailleurs L est un $S(V)$ module de façon naturelle par $(u.f)(d) = u f(d)$ et ce module est de type fini. De plus on vérifie $\mathcal{O}(g)u.f + u.\mathcal{O}(g)f = \mathcal{O}(g)(u.f)$ car $\mathcal{O}(g)$ est une dérivation de $S(V)$ d'où $(u.f^h)^h = u^h.f^h.L^h$ est l'espace des \mathcal{G} -homomorphismes de D dans $S(V)$ donc τ applique L^h sur $U_{\mathcal{O}}$. Soit J le sous- $S(V)$ -module de L engendré par L^h . Il a une base finie car $S(V)$ est noethérien. Soit (t_i) une base de J avec $t_i \in L$. Alors si $f \in L^h$ $f = \sum u_i \cdot t_i$ d'où $f^h = \sum (u_i \cdot t_i)^h = \sum u_i^h \cdot t_i^h$. Donc (t_i) est une base de L^h sur U^h . La réunion des images des t_i dans $U_{\mathcal{O}}$ est de dimension finie et engendre $U_{\mathcal{O}}$ comme U^h -module

(à gauche).

Passons maintenant au cas général. U est filtrée par les U_p et $U_p/U_{p-1} \simeq S^p(V)$. Les U_p sont stables pour \mathcal{G} et complètement réductibles donc l'image dans S^p de $U_p \cap U_0$ est $S^p \cap S_0$ de même l'image de $U_p \cap U^h$ est $S^p \cap S^h$. Donc l'algèbre graduée associée à U^h est S^h qui a un nombre fini de générateurs $s_1 \dots s_n$. Ces éléments proviennent d'éléments $u_i \in U^{pi}$. Alors si R est la sous-algèbre de U^h engendrée par les u_i , et $u \in U^h \cap U_p$ on a $u \in T \text{ mod } U_{p-1} \cap T$. Mais par récurrence sur p on peut supposer $U_{p-1} \cap T = U_{p-1} \cap U^h$ donc $u \in T$ et finalement $U^h \cap U_p = T \cap U_p$ d'où $(p \rightarrow \infty) T = U^h$.

U_0 est un U^h -module filtré dont le gradué associé est S_0 donc une technique analogue montre que U_0 a une base finie sur U^h .

C.Q.F.D.