Séminaire "Sophus Lie"

P. Cartier

Représentations linéaires des algèbres de Lie semi-simples

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. nº 17, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A20_0>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 17

RÉPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

(Exposé de P. CARTIER, le 29.3.1955)

1.- Générateurs canoniques d'une algèbre semi-simple.

Le corps de base K est toujours de caractéristique 0 et algébriquement clos, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple dont $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan. On munit $\mathfrak{h}_0^*$ d'une structure d'ordre total compatible avec sa structure d'espace Q-vectoriel ; Σ est alors le système des racines positives et $\pi = \{\alpha_i\}$ le système des racines simples.

Si l'on pose $\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha < 0} \mathfrak{g}^\alpha$, on a deux sous-algèbres nilpotentes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$ et $\mathfrak{h}$. J'affirme que $\mathfrak{n}_+$ est engendrée par les $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$: en effet si $\mathfrak{n}'_+$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{n}_+$ engendrée par les $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$, supposons par hypothèse de récurrence que $\mathfrak{n}'_+$ contienne les $\mathfrak{g}^\beta$ pour $0 < \beta < \alpha$; alors ou bien α est simple et donc $\mathfrak{g}^\alpha \subset u'_+$, ou bien $\alpha = \beta + \gamma$ et comme $\beta , \gamma < \alpha$ $\mathfrak{g}^\alpha = [\mathfrak{g}^\beta , \mathfrak{g}^\gamma] \subset [\mathfrak{n}'_+ , \mathfrak{n}'_+] \subset \mathfrak{n}'_+$. De même $\mathfrak{n}_-$ est engendré par les $\mathfrak{g}^{-\alpha_i}$

D'autre part, on a déjà défini H'_α pour toute racine α par l'équation $\alpha(H) = B(H , H'_\alpha)$; on pose alors $H_\alpha = 2 H'_\alpha / \langle \alpha , \alpha \rangle$ d'où $\alpha(H_\alpha) = 2$ et $H_i = H_{\alpha_i}$. On en déduit $\alpha_i(H_j) = 2 \langle \alpha_i , \alpha_j \rangle / \langle \alpha_j , \alpha_j \rangle = - a_{ji}$. On sait aussi (cf. Exp. 9) que si $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ alors $[X , Y] = \langle X , Y \rangle H'_\alpha$, par suite on peut choisir $X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$ et $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$ de sorte que $[X_i , Y_i] = H_i$. Enfin comme $\alpha_i - \alpha_j$ n'est pas racine, $[X_i , Y_j] = 0$ dès que $i \neq j$, autrement dit $\mathfrak{g}$ est engendrée par les X_i , les Y_i ; les H_i qui vérifient entre autres les relations suivantes :

$$(1) \qquad [X_i , Y_j] = 0 \text{ si } i \neq j \qquad [X_i , Y_i] = H_i \qquad [H_i , X_j] = - a_{ij} X_j$$

$$[H_i , Y_j] = a_{ij} \quad Y_j \qquad [H_i , H_j] = 0$$

(Remarquer que ces relations ne font intervenir de $\mathfrak{g}$ que les entiers de Cartan a_{ij}) .

Ce sont ces générateurs de $\mathfrak{g}$ que nous appellerons <u>canoniques</u>.

Nous terminerons ce paragraphe en démontrant que $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ équivaut à " $\lambda(H_i)$ rationnel pour tout i " . En effet si $\lambda = \sum m_i \alpha_i$ $(m_i \in K)$ on a $\lambda(H_i) = \sum m_j \alpha_j(H_i)$ et $\alpha_j(H_i)$ est entier, donc si les m_i sont rationnels, les nombres $\lambda(H_i)$ sont rationnels et si ces nombres, réciproquement, sont rationnels, les m_i sont solution unique d'un système d'équations linéaires à coefficients rationnels, donc rationnels eux-mêmes. Ceci prouve notre assertion.

2.- Poids des représentations linéaires.

Soit (ρ, V) une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel de dimension quelconque non nécessairement finie. On note alors V_λ l'ensemble des vecteurs de V qui vérifient les équations $\rho(H)v = \lambda(H)v$ et ceci pour toute forme linéaire sur $\mathfrak{h}$. V_λ est un sous-espace de V et $V_\lambda \subset V^\lambda$ (V^λ est l'ensemble des $v \in V$ qui sont annulés par une puissance de $(\rho(H) - \lambda(H).1)$ cf ; Exp. 9). Si V_λ est différent de 0 , on dira que λ est un poids de la représentation considérée.

Lemme : la somme des différents V_λ est directe et pour tout sous-espace invariant W , on a $W \cap (\sum_\lambda V_\lambda) = \sum_\lambda (W \cap V_\lambda)$; toute représentation de dimension finie possède au moins un poids ; enfin $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$ donc $\sum_\lambda V_\lambda$ est un sous-espace invariant.

On a $V_\lambda \subset V^\lambda$ et on sait par l'exposé 9 que la somme des V^λ est directe (la démonstration de ce fait ne suppose pas V de dimension finie) donc la somme des V_λ est directe. Appliquons ceci à la représentation quotient dans V/W pour un sous-espace invariant W , donc si $\sum_\lambda v_\lambda \equiv 0 \mod W$, v_λ étant dans V_λ , on a $v_\lambda \equiv 0 \mod W$ donc $W \cap (\sum_\lambda V_\lambda) \subset \sum_\lambda (W \cap V_\lambda)$. L'inclusion de sens contraire étant évidente, la deuxième assertion est démontrée. Si V est de dimension finie, on peut trouver un sous-espace irréductible pour $\mathfrak{h}$, qui est alors de dimension 1 par le lemme de Schur, donc il existe un poids. Enfin si $v \in V_\lambda$ et $x \in \mathfrak{g}^\alpha$ alors

$$\rho(H)\rho(x)v = \rho([H,x])v + \rho(x)\rho(H)v = \alpha(H)\rho(x)v + \lambda(H)\rho(x)v = (\lambda(H) + \alpha(H))\rho(x)v$$

donc $\rho(x)v$ est dans $V_{\lambda+\alpha}$

Ceci démontre le lemme.

3.- Représentations possèdant un vecteur dominant.

Nous dirons que la représentation (ρ, V) possède un vecteur dominant v si $v \in V_\lambda$ pour un certain poids λ , si $\rho(X_i)v = 0$, et si V est engendré par v (comme $\mathfrak{g}$-module) ; λ sera par définition un poids dominant

1) Comme $\mathfrak{n}_+$ est engendrée par les X_i, un vecteur dominant est annulé par $\rho(\mathfrak{n}_+)$ et $\rho(H)v = \lambda(H)v$ puisque $v \in V_\lambda$; $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ dont $\mathfrak{n}_+$ est un idéal puisque $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+] = \mathfrak{n}_+$. Il résulte de ce qu'on vient de voir que la droite $K.v$ est invariante par $\mathfrak{b}$, donc aussi par l'algèbre enveloppante U_0 de $\mathfrak{b}$.

$\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{n}_-$ et $\mathfrak{b}$, donc l'algèbre enveloppante U de $\mathfrak{g}$ est comme espace vectoriel produit tensoriel de U_- (algèbre enveloppante de $\mathfrak{n}_-$) et de U_0 d'après le théorème de Birkoff-Witt et $U = U_-U_0$. V est engendré par v, donc $V = \rho(U)v = \rho(U_-)v$ puisque $\rho(U_0)v = K.v$ autrement dit V est engendré par v en tant que $\mathfrak{b}$-module. On définit une nouvelle relation d'ordre (partielle) sur $\mathfrak{h}^*$, compatible avec l'addition mais non avec les homothéties en convenant que "$\mu \leq \nu$" équivaut à "$\nu - \mu = \sum m_i\alpha_i$, les m_i étant des entiers positifs ou nuls". Le sous-espace $K.v + \sum_{\mu < \lambda} V_\mu$ de V contient v et est invariant par $\mathfrak{n}_-$ en vertu des formules $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)V_\mu \subset V_{\mu-\alpha}$ et $\mu - \alpha < \mu < \lambda$, donc est égal à V, autrement dit V_λ est de dimension 1 et les autres poids de V sont de la forme $\lambda - \sum m_i\alpha_i$

Comme $V = \rho(U_-)v$, et que Y_i appartient à la racine $-\alpha_i$, V_μ est sous-tendu par les vecteurs $\rho(Y_{i_1}) \dots \rho(Y_{i_p})v$ pour toute suite $i_1, i_2, \dots, i_p$ telle que $\lambda - \alpha_{i_1} \dots - \alpha_{i_p} = \mu$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de telles suites, V_μ est de dimension finie.

Enfin le poids dominant λ étant le plus haut des poids pour l'ordre $\geq$ est bien défini par la représentation.

2) Soit $I \subset U$ l'annulateur d'un vecteur dominant : c'est un idéal à gauche qui contient $\mathfrak{n}_+$ et les $H - \lambda(H)$ pour $H \in \mathfrak{h}$, donc l'idéal à gauche J_λ engendré par ces éléments et réciproquement si I est un idéal à gauche de U contenant J_λ, le générateur canonique de la représentation naturelle dans U/I est un vecteur dominant de poids λ. Pour démontrer qu'il existe des représentations ayant λ pour poids dominant, il suffit donc de démontrer que $J_\lambda \neq U$ et toute représentation admettant λ pour poids dominant sera un quotient de U/J_λ. Or si J'_λ est l'idéal de U_0 engendré par $\mathfrak{n}_+$ et les $H - \lambda(H)$, $J'_\lambda \neq U_0$ car J'_λ est contenu dans le noyau de la représentation de dimension 1 de $\mathfrak{b}$ définie par $\theta(H) = \lambda(H)1$ et $\theta(n) = 0$ (c'est bien une représentation car elle est de dimension 1 et nulle sur $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}_+$). Mais comme $U = U_-U_0$, on a $J = U_-J'_\lambda$ et si l'on identifie U à $U_- \otimes U_0$,

J_λ est identifié à $U_- \otimes J'_\lambda$ qui est différent de U puisque J'_λ est différent de U_0 et c'est ce qu'il fallait démontrer.

3) Soit maintenant W un sous-espace invariant de V ; on a $W = \sum_\mu (W \cap V_\mu)$ en vertu du lemme puisque $V = \sum_\mu V_\mu$. Comme V_λ est de dimension 1 , on a $W \cap V_\lambda = 0$ ou $W \cap V_\lambda = V_\lambda$; dans ce dernier cas W contient v donc est égal à V puisque v est générateur. Donc si $W \neq V$ $W \subset V^+ = \sum_{\mu < \lambda} V_\mu$; la somme des sous-espaces invariants par $\mathfrak{g}$ contenus dans V^+ est un sous-espace invariant différent de V qui est évidemment le plus grand des sous-espaces invariants différents de V . Ceci s'applique en particulier à la représentation dans U/J_λ et il en résulte qu'il existe un seul idéal à gauche maximal de U contenant J_λ , autrement dit, il existe à un isomorphisme près une seule représentation irréductible de poids dominant λ .

Résumons les résultats obtenus jusqu'à présent :

<u>THÉORÈME 1</u> : <u>Soit</u> (ρ , V) <u>une représentation linéaire de</u> $\mathfrak{g}$ <u>ayant un poids dominant</u> λ . <u>Alors</u> V <u>est somme directe des différents</u> V_μ <u>qui sont tous de dimension finie,</u> V_λ <u>étant de dimension 1</u> . <u>Le seul poids dominant est</u> λ <u>et tout autre poids est de la forme</u> $\lambda - \sum m_i \alpha_i$ <u>où les</u> m_i <u>sont des entiers</u> $\geqslant 0$. <u>Enfin, pour toute forme linéaire</u> λ <u>sur</u> $\mathfrak{h}$ <u>il existe une et, à un isomorphisme près, une seule représentation irréductible de poids dominant</u> λ .

4.- <u>Représentations irréductibles de dimension finie</u>.

Nous allons maintenant nous intéresser aux représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$ obtenant une classification complète de ces représentations. Se limiter aux représentations <u>irréductibles</u> n'est pas une restriction essentielle vu le théorème de complète réductibilité.

1) Une représentation (ρ , V) de dimension finie possède au moins un poids d'après le lemme, mais ses poids sont en nombre fini puisque la somme des V_μ est directe et V de dimension finie. Il existe donc un poids de V maximal pour l'ordre (partiel) $\mu \geqslant \nu$, soit λ . Comme $\lambda + \alpha_i > \lambda$, $\lambda + \alpha_i$ n'est pas un poids et comme $\rho(X_i) V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha_i} = 0$ il en résulte que $\rho(X_i) v = 0$ pour tout $v \in V_\lambda$; si $v \neq 0$ c'est un générateur de V puisque la représentation est irréductible et par suite v est un vecteur dominant. On peut donc appliquer à la représentation en question les résultats du paragraphe précédent en particulier V est somme directe des V_μ et tout poids est de la forme $\lambda - \sum m_i \alpha_i$

2) Soit μ un poids de V et α une racine de $\mathfrak{g}$; on pose

$W = \sum_k V_{\mu+k\alpha}$ c'est un sous-espace de V invariant par la sous-algèbre $\mathcal{F}$ de base E_α , $E_{-\alpha}$, H_α en vertu de la formule $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)\, V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$. Comme $\alpha(H_\alpha) = 2$, deux poids distincts de la série $\mu + k\alpha$ prennent des valeurs distinctes pour H_α . Ceci dit, on peut appliquer à la représentation de $\mathcal{F}$ dans W les résultats du théorème 1 de l'exposé 10 . On voit par le 1) de ce théorème que $2\mu(H_\alpha)/\alpha(H_\alpha) = \mu(H_\alpha)$ est un entier ; le 3) du même dit qu'il existe un poids de $\mathcal{F}$ dans W soit μ' tel que $\mu'(H_\alpha) = -\mu(H_\alpha)$, autrement dit, il existe un poids μ' de V de la forme $\mu + k\alpha$ tel que $\mu + \mu'$ soit orthogonal à α . Il en résulte immédiatement que $\mu' = S_\alpha \mu$ et que l'ensemble des poids de V est invariant par le groupe de Weyl qui est engendré par les S_α ; enfin le 3) du th. 1 de l'exposé 10 dit que V_μ et $V_{\mu'}$ ont même dimension, donc deux poids de V équivalents par le groupe de Weyl ont même multiplicité (= dim V_μ) .

Le 4) du th. de l'exp. 10 affirme que si $\mu + \alpha$ est un poids de W , et $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ pour une certaine racine α , $\rho(X)W_\mu \neq 0$ autrement dit $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)\, V_\mu \neq 0$

3) De ce que l'on vient de démontrer, résulte que $S_i\lambda = \lambda - \lambda(H_i)\alpha_i$ est un poids de V , donc d'après la forme des poids de V , que $\lambda(H_i)$ est un entier $\geqslant 0$ et même plus généralement $\lambda(H_\alpha)$ est un entier $\geqslant 0$ pour toute racine $\alpha > 0$. Réciproquement, soit (ρ , V) une représentation irréductible admettant un poids dominant λ tel que $\lambda(H_i)$ soit un entier $\geqslant 0$; <u>on va montrer que</u> V <u>est de dimension finie</u>. Soit $\mathfrak{g}_i$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ ayant X_i , Y_i , H_i pour base et T_i le sous-espace de V invariant par $\mathfrak{g}_i$ engendré par v . La représentation de $\mathfrak{g}_i$ dans T_i admet λ pour poids dominant , on peut donc appliquer les résultats du paragraphe précédent à l'algèbre simple $\mathfrak{g}_i$, donc T_i est sous-tendu par les $\rho(Y_i)^k v$. Si $j \neq i$ on a $[X_j , Y_i] = 0$ donc $\rho(X_j)\,\rho(Y_i)^k v = \rho(Y_i)^k \rho(X_j)\, v = 0$ i.e. $\rho(X_j)$ annule le sous-espace T_i ; si alors ~~un~~ on avait un sous-espace U_i de T_i invariant par $\mathfrak{g}_i$ distinct de 0 et de T_i , il serait contenu dans $T_i^+ \subset V^+$ d'après le th. 1 et comme $\rho(X_j)$ est nul sur T_i , U_i serait invariant par les X_j pour $j \neq i$ et par X_i donc par $\mathfrak{n}_{+j}$; mais les poids de T_i par rapport à $\mathfrak{g}$ sont de la forme $\lambda - k\alpha_i$ donc à deux distincts de ces poids correspondent des poids distincts de $\mathfrak{g}_i$ (noter que $\alpha_i(H_i) = 2$) ; en conséquence $U_i = \sum_\mu (U_i \cap V_\mu)$ donc est invariant par $\mathfrak{h}$. Le sous-espace U_i serait donc invariant par $\mathfrak{g}$ et contenu dans V^+ , mais alors $0 \neq \rho(U)\, U_i = \rho(U_-)\,\rho(U_0)\, U_i \subset \rho(U_-)\, V^+ \subset V^+$ c'est-à-dire que la représentation de $\mathfrak{g}$

dans V ne serait pas irréductible.

On vient donc de démontrer que la représentation de $\mathfrak{g}_i$ dans T_i est irréductible et possède un poids dominant λ tel que $\lambda(H_i)$ soit un entier $\geqslant 0$. Mais on sait alors par les résultats de l'exposé 10 qu'il existe une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{g}_i$ ayant ce même poids dominant ; en vertu du théorème d'unicité qu'on a démontré , T_i est de dimension finie. Considérons maintenant la famille F_i des sous-espaces de dimension finie de V invariants par $\mathfrak{g}_i$. Si M et N sont dans F_i il est clair que $M + N$ est dans F_i et d'autre part $\rho(\mathfrak{g})M$ est de dimension finie et $\rho(\mathfrak{g}_i)\rho(\mathfrak{g})M \subset \rho([\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i])M + \rho(\mathfrak{g})\rho(\mathfrak{g}_i)M \subset \rho(\mathfrak{g})M$ donc ce sous-espace est aussi dans F_i . De là découle que la réunion W_i des sous-espaces de la famille F_i est un sous-espace invariant par $\mathfrak{g}$, mais comme $T_i \in F_i$ et que $v \in T_i$, $v \in W_i$ et donc, v étant générateur $W_i = V$.

Soit maintenant μ un poids quelconque de V et $x \in V_\mu$. Le sous-espace $\sum_k V_{\mu + k\alpha_i}$ est invariant par $\mathfrak{g}_i$, donc il existe un sous-espace M de dimension finie invariant par $\mathfrak{g}_i$, contenant x et contenu dans $\sum V_{\mu+k\alpha_i}$. Par le même argument qu'en 2) , on voit que $S_i\mu$ est alors un poids de V et par suite comme on sait que le groupe de Weyl est engendré par les symétries S_i , l'ensemble P des poids de V est invariant par le groupe de Weyl.

On sait que tous les V_μ sont de dimension finie ; il suffit donc, pour achever la démonstration du fait que V est de dimension finie, de démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de poids distincts. Soit μ un poids de V et $\sigma.\mu$ les différents transformés de μ (en nombre fini) par le groupe de Weyl ; parmi ces transformés soit ν le plus haut pour l'ordre $\geqslant$, on a donc $\nu \geqslant S_i\nu$ d'où $\nu(H_i)\alpha_i \geqslant 0$ ce qui implique $\nu(H_i) \geqslant 0$. Tout poids est donc conjugué à un poids ν tel que $\nu(H_i) \geqslant 0$ ou encore $\langle \nu , \alpha_i \rangle \geqslant 0$; par suite si $\beta \geqslant 0$ $\langle \nu , \beta \rangle \geqslant 0$ puis comme $\nu = \lambda - \beta$ avec $\beta \geqslant 0$ $\lambda = \nu + \beta$ $\langle \lambda , \lambda \rangle = \langle \nu , \nu \rangle + \langle \beta , \beta \rangle + 2\langle \nu , \beta \rangle \geqslant \langle \nu , \nu \rangle$. Les poids tels que $\nu(H_i) \geqslant 0$ sont donc contenus dans l'intersection du réseau discret des éléments de $\mathfrak{h}_0^*$ de la forme $\lambda - \sum m_i\alpha_i$ (m_i entier) et de la boule de rayon $|\lambda|$ donc en nombre fini. Comme tout poids de V est conjugué par le groupe de Weyl qui est fini à l'un de ces poids en nombre fini, P est fini et V est de dimension finie.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

<u>THÉORÈME 2 : Soit</u> (ρ, V) <u>une représentation linéaire irréductible de</u> $\mathfrak{g}$ <u>dans un espace de dimension finie. Alors :</u>

a) <u>Il existe un poids dominant</u> λ <u>et</u> V <u>est somme directe des</u> V_μ

b) <u>L'ensemble</u> P <u>des poids de</u> V <u>est fini et invariant par le groupe de Weyl ; si deux poids</u> μ <u>et</u> ν <u>sont conjugués par le groupe de Weyl,</u> V_μ <u>et</u> V_ν <u>ont même dimension.</u>

c) <u>Pour qu'une représentation irréductible de poids dominant</u> λ <u>soit de dimension finie, il faut et il suffit que</u> $\lambda(H_i)$ <u>soit un entier</u> $\geqslant 0$ <u>pour tout</u> i <u>et alors</u> $\mu(H_\alpha)$ <u>est entier pour toute racine</u> α <u>et tout poids</u> μ .

d) <u>Si</u> α <u>est une racine de</u> $\mathfrak{g}$ <u>et</u> μ <u>un poids de</u> V <u>tel que</u> $\mu + \alpha$ <u>soit encore un poids, alors</u> $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)V_\mu \neq 0$

<u>Remarques</u> : 1) Supposons qu'il existe $v \in V_\lambda$ tel que pour toute racine α v soit annulé par $\rho(E_\alpha)$ ou $\rho(E_{-\alpha})$; alors l'ensemble Q des racines α telles que $\rho(E_\alpha)v = 0$ vérifie $(Q + Q) \cap \Delta \subset Q$ et $Q \cup -Q = \Delta$. On démontre facilement alors que pour un choix convenable de Σ , $\Sigma \subset Q$, donc que v est un vecteur dominant. Ceci, joint au théorème 1 est l'essentiel d'un résultat récent de Harish-Chandra (Proc. Nat. Ac. Sc. of U.S.A. déc. 1954) .

2) Soit A l'algèbre associative universelle engendrée par des X_i , Y_i , H_i soumis aux relations (1) avec $[a , b] = ab - ba$ .La démonstration du théorème d'unicité se transpose aisément au cas de l'algèbre A , donc il existe une seule représentation irréductible de A de poids dominant λ , et comme toute représentation de $\mathfrak{g}$, i.e. de U fournit une représentation de A , toute représentation irréductible de dimension finie de A provient d'une représentation de $\mathfrak{g}$. Soit ω_i la représentation irréductible de poids dominant λ_i défini par $\lambda_i(H_j) = \delta_{ij}$; si $\lambda(H_i) = m_i$, $\lambda = \sum_i m_i \lambda_i$ et la représentation irréductible associée à λ est contenue dans $\bigotimes_i \omega_i^{\otimes m_i}$ donc $\sum_i \omega_i$ est une représentation fidèle de $\mathfrak{g}$. On a donc un moyen de construire $\mathfrak{g}$ à partir des entiers de Cartan en construisant la représentation $\sum \omega_i$ de A et considérant l'algèbre de Lie d'opérateurs engendrée par les générateurs de A .