

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

Théorie des caractères II. Détermination des caractères

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 19 et 20, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A22_0

© Séminaire "Sophus Lie"
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire "Sophus LIE"
E.N.S., 1954/55

-:-:-:-

Exposés n^{os} 19 et 20

THÉORIE DES CARACTÈRES II.

DÉTERMINATION DES CARACTÈRES.

(Exposés de P. CARTIER, le 26.4.55
et le 3.5.55)

Les notations sont les mêmes que dans l'exposé précédent

1.- Lemmes sur les racines.

Lemme 1 : La symétrie S_i associée à la racine simple α_i permute entre elles les racines positives différentes de α_i et change α_i en $-\alpha_i$.

Soit α une racine positive quelconque $\neq 0$, soit $\alpha = \sum_j m_j \alpha_j$.

On a $S_i \alpha = \alpha - m \alpha_i = (m_i - m) \alpha_i + \sum_{j \neq i} m_j \alpha_j$ avec $m = 2 \frac{\langle \alpha, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$.

Comme les α_j forment un système fondamental de racines, les coefficients des α_j dans l'expression de $S_i \alpha$ sont de même signe ; si alors $m_i \leq m$, les autres coefficients sont ≤ 0 , mais comme les m_j sont ≥ 0 puisque α est > 0 c'est que $m_j = 0$ dès que $j \neq i$ donc α est proportionnelle à α_i et elle lui est nécessairement égale. Si $m_i > m$ alors les coefficients de $S_i \alpha$ sont ≥ 0 et $S_i \alpha$ est une racine positive. Enfin on sait que $S_i \alpha_i = -\alpha_i$.

Lemme 2 : Si ρ est la demi-somme des racines positives, $\rho(H_i) = 1$ on a $S_i \rho = \rho - \rho(H_i) \alpha_i$. D'autre part, d'après le lemme 1, S_i permute tous les termes de l'expression de ρ , à l'exception de $\frac{1}{2} \alpha_i$ qui devient $-\frac{1}{2} \alpha_i$, donc $S_i \rho = \rho - \alpha_i$ et il en résulte que $\rho(H_i) = 1$.

Lemme 3 : Pour qu'une forme linéaire λ sur \mathfrak{h} soit plus grande que toutes ses transformées par le groupe de Weyl, il faut et il suffit que l'on ait $\lambda(H_i) > 0$ pour tout i .

La condition est nécessaire, car si l'on avait $\lambda(H_i) \leq 0$, on aurait $S_i \lambda = \lambda - \lambda(H_i) \alpha_i \geq \lambda$ contrairement à ce qui a été supposé. Elle est aussi suffisante : en effet supposons que $\lambda(H_i) > 0$ et démontrons que $\lambda > \sigma \cdot \lambda$ pour toute transformation $\sigma \neq 1$ appartenant au groupe de Weyl W .

Ceci est vrai pour $\sigma = S_i$ car $\lambda \succ S_i \lambda = \lambda - \lambda(H_i) \alpha_i$; on va alors le démontrer par récurrence sur p pour le produit de p symétries S_i ce qui suffira puisque le groupe W est engendré par les S_i . Supposons donc démontrée l'inégalité $\lambda \succ \sigma \cdot \lambda$ lorsque σ est le produit de $q < p$ symétries S_i et soit $\sigma = S_{i_1} \dots S_{i_p} = \tau \cdot S_{i_p}$; on a

$$\sigma \cdot \lambda = \tau S_{i_p} \lambda = \tau \cdot \lambda - \lambda(H_{i_p}) \tau \alpha_{i_p} .$$

Or de deux choses l'une : ou bien $\tau \alpha_{i_p}$ est une racine positive et alors $\tau \cdot \lambda \prec \sigma \cdot \lambda$ et $\sigma \cdot \lambda \prec \lambda$, ou bien $\tau \alpha_{i_p} \prec 0$. Soit alors k le plus petit indice tel que

$$\beta_\ell = S_{i_\ell} S_{i_{\ell+1}} \dots S_{i_{p-1}} \alpha_{i_p} \succ 0 \text{ pour } \ell \geq k ;$$

on a $k > 1$ puisque $\tau \alpha_{i_p} \prec 0$ donc $\beta_k \succ 0$ et $\beta_{k-1} = S_{i_{k-1}} \beta_k \prec 0$. D'après le lemme 1 ceci implique l'égalité de β_k et de $\alpha_{i_{k-1}}$, finalement $\tau = \tau' S_{i_{k-1}} \tau''$ avec $\tau'' \alpha_{i_p} = \alpha_{i_{k-1}}$. Mais il est clair que $\tau'' S_{i_p} \tau''^{-1}$ est pour toute racine α la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à $\tau'' \alpha$, donc $\tau'' S_{i_p} \tau''^{-1} = S_{\tau'' \alpha}$ et $\tau'' S_{i_p} = S_{i_{k-1}} \tau''$; comme le carré de $S_{i_{k-1}}$ est l'identité, il en résulte que $\sigma = \tau' \tau''$ est le produit de $p-2$ symétries S_i et par conséquent, dans ce cas aussi $\sigma \lambda \prec \lambda$ si $\sigma \neq e$.

2.- Digression sur les exponentielles.

On désigne par P le groupe additif des formes linéaires λ sur \mathfrak{h} telles que $\lambda(H_i)$ soit entier et par P_+ le sous-monoïde défini par les inégalités $\lambda(H_i) \geq 0$. Soit A l'algèbre du groupe P à coefficients dans K et $\{e^\lambda\}$ la base canonique de A ; on a donc $e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu}$. Le sous-anneau de A formé des combinaisons linéaires des e^λ avec $\lambda \in P_+$ a des générateurs algébriquement indépendants qui sont e^{λ_i} ($\lambda_i(H_j) = \delta_{ij}$) donc c'est un anneau d'intégrité qui est même factoriel. A peut s'identifier à l'anneau des fractions de B par rapport à l'ensemble multiplicativement clos des e^λ ($\lambda \in P_+$), donc c'est aussi un anneau d'intégrité qui est factoriel.

On considère en plus le module $M = A \otimes \mathfrak{h}^*$ sur l'anneau A . On définit un produit scalaire sur M par la convention

$\langle a \otimes \lambda, b \otimes \mu \rangle = ab \langle \lambda, \mu \rangle$ puis un opérateur Δ sur A (laplacien) par $\Delta(e^\lambda) = \langle \lambda, \lambda \rangle e^\lambda$ et un opérateur g ("gradient") de A dans M par la convention $g(e^\lambda) = e^\lambda \otimes \lambda$. On a alors les formules suivantes :

$$(1) \quad g(ab) = b.g(a) + a.g(b)$$

$$(2) \quad \Delta(ab) = a \Delta(b) + 2 \langle g(a), g(b) \rangle + \Delta(a)b$$

En effet on vérifie immédiatement ces égalités lorsque $a = e^\lambda$, $b = e^\mu$, la deuxième par exemple provenant de l'identité

$$\langle \lambda + \mu, \lambda + \mu \rangle = \langle \lambda, \lambda \rangle + 2 \langle \lambda, \mu \rangle + \langle \mu, \mu \rangle \text{ et le cas général s'en déduit par linéarité.}$$

Il nous reste à faire agir W sur l'algèbre A , ce que l'on fait par la convention $\sigma.e^\lambda = e^{\sigma.\lambda}$. Un élément $\sigma \in W$ est une transformation orthogonale de \mathfrak{h}^* donc possède un déterminant qui est égal à ± 1 . Un élément de A , soit a , sera dit symétrique ou antisymétrique suivant que l'on a $\sigma.a = a$ ou $\sigma.a = \det \sigma . a$; pour que a soit symétrique, il faut et il suffit que $S_i a = a$ pour tout i et pour qu'il soit antisymétrique, il faut et il suffit que $S_i a = -a$ puisque $\det S_i = -1$ et que les S_i engendrent W .

Soit w l'ordre du groupe W et Q l'opérateur de A défini par

$$(3) \quad Q.a = \sum_{\sigma \in W} \det \sigma . \sigma.a$$

Si a est quelconque, on a $\sigma.Q.a = \sum_{\sigma'} \det \sigma' . \sigma \sigma'.a = (\det \sigma)^{-1} Q.a$ donc $Q.a$ est antisymétrique et si a est antisymétrique $Q.a = wa$, ce qui prouve, puisque K est de caractéristique 0, que Q applique A sur le sous-espace des éléments antisymétriques. Il en résulte que tout élément antisymétrique de A est combinaison linéaire des $Q.e^\lambda = \sum_{\sigma} \det \sigma . e^{\sigma.\lambda}$; on peut évidemment se limiter aux λ tels que $\lambda \succcurlyeq \sigma.\lambda$ pour tout $\sigma \in W$, donc en tout cas aux λ tels que $\lambda(H_i) \geq 0$ (car $\lambda \succcurlyeq S_i \lambda$). Mais si pour un i donné on a $\lambda(H_i) = 0$ on a $S_i \lambda = \lambda$ et par suite si l'on fait une partition $W = T \cup T.S_i$, on a $Q.e^\lambda = \sum_{\sigma \in T} (\det \sigma . e^{\sigma.\lambda} + \det(\sigma S_i) e^{\sigma S_i \lambda}) = 0$ puisque le déterminant de S_i est -1 . Finalement tout élément antisymétrique de A s'écrit comme combinaison linéaire des $Q.e^\lambda$ pour les λ tels que $\lambda(H_i) > 0$.

Soit α une racine et $a \in A$ tel que $S_\alpha a = -a$; il est clair que a est combinaison linéaire de termes de la forme

$e^\lambda - S_\alpha e^\lambda = e^\lambda - e^{\lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha} = e^\lambda (1 - (e^{-\alpha})^{\lambda(H_\alpha)})$ car $\lambda(H_\alpha)$ est un entier. Il est alors clair que $e^\lambda - S_\alpha e^\lambda$ est divisible par $1 - e^{-\alpha}$, donc aussi que a est divisible par $1 - e^{-\alpha}$. Si a est antisymétrique, il est divisible par tous les éléments $1 - e^{-\alpha}$, premiers entre eux, donc par leur produit puisque A est un anneau factoriel et donc aussi par

$$\prod_{\alpha > 0} (e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha}) = e^{+\rho} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}) = D.$$

D est antisymétrique car d'après le lemme 1, S_i permute entre eux les facteurs de D à l'exception de $e^{\frac{1}{2}\alpha_i} - e^{-\frac{1}{2}\alpha_i}$ qui est changé en $e^{-\frac{1}{2}\alpha_i} - e^{\frac{1}{2}\alpha_i} = -(e^{\frac{1}{2}\alpha_i} - e^{-\frac{1}{2}\alpha_i})$ donc $S_i D = -D$ et D est bien antisymétrique. Les exposants du développement de D en combinaison linéaire des e^λ sont compris entre ρ et $-\rho$, donc D est combinaison linéaire des $Q.e^\lambda$ avec $\rho \succ \lambda \succ -\rho$; mais chacun de ces $Q.e^\lambda$ étant antisymétrique est divisible par $D : Q.e^\lambda = b.D$. Or le "plus haut" terme de $b.D$ est le produit des plus hauts termes de b et de D et de même pour le "plus bas" terme donc l'intervalle des termes de $b.D$ est somme des intervalles correspondants pour b et D et ceci est manifestement impossible si $\rho \succ \lambda \succ -\rho$ et $b \neq 0$ et cela implique que b est constant si $\lambda = \rho$. Donc D est proportionnel à $Q.e^\rho$ et lui est même égal puisque dans D et dans $Q.e^\rho$, le terme de plus haut rang est égal à e^ρ .

Soit finalement a symétrique, donc $a.D$ antisymétrique est combinaison linéaire des $Q.e^\lambda$ avec $\lambda(H_i) > 0$ (donc ≥ 1) autrement dit $a.D$ est combinaison linéaire des $Q.e^{\lambda+\rho}$ ($\lambda \in P_+$) et a est combinaison linéaire des $Q.e^{\lambda+\rho}/Q.e^\rho$ puisque $D = Q.e^\rho$ et que $Q.e^{\lambda+\rho}$ étant antisymétrique est divisible par D .

3.- Caractères des représentations de dimension finie.

Soit (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie de \mathcal{G} ayant Λ pour poids dominant, $m_\lambda = \dim V_\lambda$ la multiplicité du poids λ de V . Si h est un élément de $U(\mathfrak{h}) \subset U(\mathcal{G})$, l'opérateur $\rho(h)$ est scalaire dans V_λ , sa valeur étant $f_\lambda(h) = \langle h, e^\lambda \rangle$ (e^λ est la forme linéaire $\sum_{m \geq 0} (m!)^{-1} \lambda^m$ sur $U(\mathfrak{h})$) donc

$\text{Tr}_V(\rho(h)) = \sum_\lambda m_\lambda f_\lambda(h) = \langle h, \sum_\lambda m_\lambda e^\lambda \rangle$ et $\dim V = \sum_\lambda m_\lambda$. Ceci nous conduit donc à étudier l'élément $\Psi_\Lambda = \sum_\lambda m_\lambda e^\lambda$ de l'algèbre A ;

on sait que c'est un élément symétrique de A puisque deux poids de V conjugués par le groupe de Weyl ont même multiplicité, donc Ψ_λ est combinaison linéaire des $Q.e^{\lambda+\rho}/Q.e^\rho$: on va montrer plus précisément qu'il est égal à $Q.e^{\lambda+\rho}/Q.e^\rho$.

Lemme 4 : Les E_α étant choisis dans \mathcal{G}^α de sorte que $\langle E_\alpha, E_{-\alpha} \rangle = 1$, si l'on pose $t(\lambda, \alpha) = \text{Tr}_{V_\lambda}(\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}))$, on a :

$$(4) \quad t(\lambda, \alpha) - t(\lambda + \alpha, \alpha) = m_\lambda \langle \lambda, \alpha \rangle$$

On définit deux opérateurs P_+ et P_- dans le sous-espace T somme de V_λ et de $V_{\lambda+\alpha}$ par la condition que pour $x \in V_\lambda$ et $y \in V_{\lambda+\alpha}$, on ait :

$$(5) \quad P_+x = \rho(E_\alpha)x \quad P_-x = 0 \quad P_+y = 0 \quad P_-y = \rho(E_{-\alpha})y$$

On en déduit $([P_+, P_-])x = -\rho(E_{-\alpha})\rho(E_\alpha)x = \langle \lambda, \alpha \rangle x - \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})x$

$$([P_+, P_-])y = \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})y$$

d'où $0 = \text{Tr}_T([P_+, P_-]) = \langle \lambda, \alpha \rangle m_\lambda - t(\lambda, \alpha) + t(\lambda + \alpha, \alpha)$ ce qui n'est autre chose que la formule (4).

Si l'on définit des éléments de \mathfrak{h} par les formules $\langle H_i, K_j \rangle = \delta_{ij}$ on a deux bases duales de \mathcal{G} avec $\{E_\alpha, H_i\}$ d'une part et $\{E_{-\alpha}, K_j\}$ d'autre part donc l'élément de Casimir sera $\Gamma = \sum_\alpha E_\alpha E_{-\alpha} + \sum_i H_i K_i$. C'est un élément du centre de l'algèbre enveloppante de \mathcal{G} , et comme la représentation (ρ, V) est irréductible, le lemme de Schur montre que $\rho(\Gamma)$ est un opérateur scalaire $\gamma \cdot 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \gamma \cdot m_\lambda &= \text{Tr}_{V_\lambda}(\rho(\Gamma)) = \sum_\alpha \text{Tr}_{V_\lambda}(\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})) + \sum_i \text{Tr}_{V_\lambda}(\rho(H_i)\rho(K_i)) \\ &= \sum_\alpha t(\lambda, \alpha) + \sum_i m_\lambda \lambda(H_i)\lambda(K_i) = \sum_\alpha t(\lambda, \alpha) + m_\lambda \langle \lambda, \lambda \rangle \end{aligned}$$

soit finalement

$$(6) \quad m_\lambda (\gamma - \langle \lambda, \lambda \rangle) = \sum_\alpha t(\lambda, \alpha)$$

Considérons le produit $R = \prod_\alpha (e^\alpha - 1)$; on a $R = \prod_{\alpha > 0} (e^\alpha - 1)(e^{-\alpha} - 1) = -D^2$.

Nous allons calculer $R(\gamma \Psi_\lambda - \Delta(\Psi_\lambda)) = S$

$$\begin{aligned}
S &= \prod_{\beta} (e^{\beta} - 1) \sum_{\lambda} m_{\lambda} e^{\lambda} (\gamma - \langle \lambda, \lambda \rangle) && \text{donc d'après (6)} \\
&= \prod_{\beta} (e^{\beta} - 1) \sum_{\lambda} e^{\lambda} \sum_{\alpha} t(\lambda, \alpha) \\
&= \sum_{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha} (e^{\beta} - 1) \sum_{\lambda} t(\lambda, \alpha) (e^{\lambda + \alpha} - e^{\lambda}) \\
&= \sum_{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha} (e^{\beta} - 1) \sum_{\lambda} e^{\lambda + \alpha} (t(\lambda, \alpha) - t(\lambda + \alpha, \alpha)) && \text{donc d'après le lemme 4} \\
&= \sum_{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha} (e^{\beta} - 1) \sum_{\lambda} m_{\lambda} \langle \lambda, \alpha \rangle e^{\lambda + \alpha} \\
&= \left\langle \left(\sum_{\alpha} e^{\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha} (e^{\beta} - 1) \otimes \alpha, \sum_{\lambda} m_{\lambda} e^{\lambda} \otimes \lambda \right) \right\rangle \\
&= \langle g(\mathbb{R}), g(\Psi_{\Lambda}) \rangle
\end{aligned}$$

Autrement dit en divisant par D : $D(\gamma \Psi_{\Lambda} - \Delta(\Psi_{\Lambda})) = 2 \langle g(D), g(\Psi_{\Lambda}) \rangle$

Dès lors $\gamma(D \Psi_{\Lambda}) = D \Delta(\Psi_{\Lambda}) + 2 \langle g(D), g(\Psi_{\Lambda}) \rangle = \Delta(D \Psi_{\Lambda}) - \Delta(D) \Psi_{\Lambda}$

Or d'une manière générale, $\Delta(Q \cdot e^{\rho}) = \langle \rho, \rho \rangle Q \cdot e^{\rho}$ donc

$\Delta(D) = \langle \rho, \rho \rangle D$ et $D \cdot \Psi_{\Lambda}$ est vecteur propre de l'opérateur Δ ;

pour calculer la valeur propre correspondante, remarquons que le terme le plus haut de $D \cdot \Psi_{\Lambda}$ est $e^{\Lambda + \rho}$ qui se trouve multiplié par $\langle \Lambda + \rho, \Lambda + \rho \rangle$ par l'opérateur Δ . Comme $D \cdot \Psi_{\Lambda}$ est antisymétrique, on a

w.D. $\Psi_{\Lambda} = Q(D \cdot \Psi_{\Lambda}) = \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} \det \sigma m_{\lambda} Q \cdot e^{\lambda + \sigma \cdot \rho}$ et chacun des termes de cette somme est vecteur propre de Δ avec la valeur propre $\langle \lambda + \sigma \cdot \rho, \lambda + \sigma \cdot \rho \rangle$. Comme $D \cdot \Psi_{\Lambda}$ est vecteur propre de Δ avec la valeur propre $\langle \Lambda + \rho, \Lambda + \rho \rangle$, on peut se limiter dans cette somme aux termes pour lesquels $\langle \lambda + \sigma \cdot \rho, \lambda + \sigma \cdot \rho \rangle = \langle \Lambda + \rho, \Lambda + \rho \rangle$; or il se trouve qu'on a le résultat suivant :

Lemme 5 : Si λ est un poids de V distinct de $\sigma \cdot \Lambda$, on a
 $|\lambda + \sigma \cdot \rho| < |\Lambda + \rho|$

On a vu en effet à l'exposé 17 (page 6, dernier paragraphe) que λ est conjugué à un poids μ tel que $\mu(H_i) \geq 0$ et que $|\mu| \leq |\Lambda|$; donc $\langle \lambda, \lambda \rangle = \langle \mu, \mu \rangle \leq \langle \Lambda, \Lambda \rangle$. D'autre part $\sigma^{-1} \cdot \lambda$ est un poids de V , donc il est égal à $\Lambda - \sum_i m_i \alpha_i$ où les m_i sont des entiers

$$\geq 0; \text{ par suite } \langle \lambda, \sigma \cdot \rho \rangle = \langle \sigma^{-1} \cdot \lambda, \rho \rangle = \langle \Lambda, \rho \rangle - \sum_i m_i \langle \rho, \alpha_i \rangle$$

$$\text{et } |\Lambda + \rho|^2 - |\lambda + \sigma \rho|^2 = |\Lambda|^2 - |\lambda|^2 + \sum_i m_i |\alpha_i|^2 \text{ ce qui est } > 0$$

sauf si les m_i sont tous nuls, i.e. sauf si $\sigma^{-1} \cdot \lambda = \Lambda$. (Noter que d'après le lemme 2, $\rho(H_i) = 2 \langle \rho, \alpha_i \rangle / \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 1$)

Reprenant la formule donnant $D. \Psi_\Lambda$, on peut donc écrire :

$$D. \Psi_\Lambda = w^{-1} \sum_{\sigma} \det_{\sigma}^2 m_{\sigma, \Lambda} Q. e^{(\Lambda + \rho)} = m_{\Lambda} Q. e^{\Lambda + \rho} \text{ et donc}$$

$$\Psi_\Lambda = Q. e^{\Lambda + \rho} / Q. e^{\rho} \text{ car } m_{\Lambda} = 1$$

Il nous reste à obtenir la valeur de $\dim V = \sum m_{\lambda}$; ce nombre se déduit de Ψ_Λ par la spécialisation $e^{\lambda} \rightarrow 1$ de $\lambda \in A$ dans K , spécialisation que nous effectuerons en deux pas, remplaçant d'abord e^{λ} par la

série formelle en T $e^{T \langle \lambda, \rho \rangle}$ puis en faisant correspondre à toute série formelle en T son terme constant. Soit f_{μ} la spécialisation

$$e^{\lambda} \rightarrow e^{T \langle \lambda, \mu \rangle} ; \text{ on a } f_{\mu}(Q. e^{\lambda}) = \sum_{\sigma} \det_{\sigma} e^{T \langle \sigma \lambda, \mu \rangle}$$

$$= \sum \det_{\sigma} e^{T \langle \lambda, \sigma^{-1} \mu \rangle} = f_{\lambda}(Q. e^{\mu}) \text{ donc}$$

$$f_{\rho}(Q. e^{\lambda}) = f_{\lambda}(Q. e^{\rho}) = \prod_{\alpha > 0} (e^{\frac{1}{2} T \langle \alpha, \lambda \rangle} - e^{-\frac{1}{2} T \langle \alpha, \lambda \rangle}) \text{ série dont le}$$

terme constant est $\prod_{\alpha > 0} T \langle \alpha, \lambda \rangle$. Le terme constant de

$$f_{\rho}(\Psi_\Lambda) = f_{\rho}(Q. e^{\Lambda + \rho}) / f_{\rho}(Q. e^{\rho}) \text{ est donc } \prod_{\alpha > 0} \langle \Lambda + \rho, \alpha \rangle / \prod_{\alpha > 0} \langle \rho, \alpha \rangle$$

En résumé, on a démontré les résultats suivants :

$$(7) \quad \text{Tr}(\rho(h)) = \langle h, \sum_{\sigma} \det_{\sigma} e^{\sigma(\Lambda + \rho)} / \sum_{\sigma} \det_{\sigma} e^{\sigma \cdot \rho} \rangle$$

$$(8) \quad \dim V = \prod_{\alpha > 0} \frac{\langle \Lambda + \rho, \alpha \rangle}{\langle \rho, \alpha \rangle}$$

4.- Détermination des caractères de l'algèbre semi-simple \mathcal{U} .

Nous allons maintenant déterminer à l'aide de ces formules l'application χ introduite dans l'exposé précédent ou tout au moins sa restriction à la sous-algèbre $U(\mathfrak{h})$ de $U(\mathcal{U})$, ce qui est suffisant puisque l'on sait par la proposition 1 de l'exposé précédent que $U(\mathcal{U})$ est somme de $U(\mathfrak{h})$ et de $[U, U]$.

Comme \mathfrak{h} est une algèbre de Lie abélienne, $U(\mathfrak{h})$ n'est autre que $S(\mathfrak{h})$ donc si $h \in U(\mathfrak{h})$ $\chi_{\lambda}(h) = f_{\lambda}(\chi(h)) = \langle \chi(h), e^{\lambda} \rangle = \langle h, {}^t \chi. e^{\lambda} \rangle$; par ailleurs si Λ est le poids dominant d'une représentation irréductible de dimension finie, on a $\chi_{\Lambda}(h) = (\dim V)^{-1} \text{Tr}(\rho(h))$, d'où d'après les formules du paragraphe précédent :

$$(9) \quad {}^t \chi. e^{\Lambda} = \frac{\prod_{\alpha > 0} \langle \rho, \alpha \rangle}{Q. e^{\rho}} \cdot \frac{Q. e^{\Lambda + \rho}}{\prod_{\alpha > 0} \langle \Lambda + \rho, \alpha \rangle} \text{ si } \Lambda(H_i) \geq 0 \text{ est entier} \\ \text{i.e. } \Lambda \in P_+$$

Nous allons introduire 3 opérateurs δ_i de $U(\mathfrak{h})$ et démontrer que $\gamma\delta_3 = \delta_1\delta_2 \cdot \delta_1$ sera défini comme l'automorphisme de l'algèbre $U(\mathfrak{h})$ qui transforme $H \in \mathfrak{h}$ en $H + \rho(H)$.

D'autre part, le groupe de Weyl est un groupe de transformations linéaires de \mathfrak{h} donc se prolonge de manière bien définie en un groupe d'automorphismes de $U(\mathfrak{h})$; on a $S_\alpha H \equiv H \pmod{H_\alpha}$ pour $H \in \mathfrak{h}$, donc puisque S_α est un automorphisme de $U(\mathfrak{h})$ et que \mathfrak{h} engendre $U(\mathfrak{h})$, $S_\alpha \mathfrak{h} \equiv \mathfrak{h} \pmod{H_\alpha}$; si alors h est antisymétrique $S_\alpha h = -h$ et $h \equiv 0 \pmod{H_\alpha}$; h est divisible par chacun des H_α correspondant aux $\alpha > 0$ et donc par leur produit puisque $U(\mathfrak{h})$ est isomorphe à un anneau de polynomes, donc est un anneau factoriel. Or $k = \prod_{\alpha > 0} H_\alpha$ est antisymétrique car d'après le lemme 1, S_i permute les différents facteurs à l'exception de H_i changé en $-H_i$ et par suite $S_i k = -k$. On définit alors δ_2 ainsi : $\delta_2(h) = \sum_{\sigma} \det \sigma \cdot \sigma h / k$ $\delta_2(h)$ est symétrique et réciproquement un élément symétrique est le quotient d'un élément antisymétrique par k donc de la forme $\delta_2(h) : \delta_2$ applique $U(\mathfrak{h})$ sur le sous-espace des éléments symétriques. Enfin δ_3 sera défini comme le transposé de l'opérateur de multiplication par $Q \cdot e^\rho / \prod_{\alpha > 0} \langle \rho, \alpha \rangle$; comme un anneau de séries formelles est sans diviseurs de 0, ${}^t\delta_3$ est un opérateur biunivoque et par conséquent δ_3 applique $U(\mathfrak{h})$ sur $U(\mathfrak{h})$.

$e^\lambda \circ \delta_1$ est un homomorphisme de $U(\mathfrak{h})$ dans K qui applique $H \in \mathfrak{h}$ sur $\lambda(H) + \rho(H)$ donc est égal à $e^{\lambda+\rho}$ ce qui signifie ${}^t\delta_1 e^\lambda = e^{\lambda+\rho}$;

On a ensuite $\langle \delta_2(h), e^\lambda \rangle = \langle \sum_{\sigma} \det \sigma \cdot \sigma h / \prod_{\alpha > 0} H_\alpha, e^\lambda \rangle$

$= \sum_{\sigma} \det \sigma \langle \sigma h, e^\lambda \rangle / \prod_{\alpha > 0} \langle \lambda, \alpha \rangle$, donc

${}^t\delta_2 {}^t\delta_1 e^\lambda = \sum_{\sigma} \det \sigma e^{\sigma(\lambda+\rho)} / \prod_{\alpha > 0} \langle \alpha, \lambda + \rho \rangle$. La formule (9) montre que

pour $\lambda \in P_+$, ceci est égal à ${}^t\delta_3 {}^t\gamma e^\lambda$ et comme on a démontré à

l'appendice de l'exposé 18 que les e^λ avec $\lambda \in P_+$ forment un système total dans le dual de $U(\mathfrak{h})$, on a donc démontré que ${}^t\delta_2 {}^t\delta_1 = {}^t\delta_3 {}^t\gamma$

autrement dit $\delta_1\delta_2 = \gamma\delta_3$ et également le fait que ${}^t\gamma e^\lambda$ est donné

pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ par la formule (9).

δ_3 applique $U(\mathfrak{h})$ sur $U(\mathfrak{h})$ donc l'image de γ est égale à celle de $\gamma\delta_3 = \delta_1\delta_2$ et c'est donc l'image par l'automorphisme δ_1 de l'algèbre S formée des éléments symétriques de $U(\mathfrak{h})$. C'est un théorème bien

connu dont on trouvera la démonstration en appendice que tout homomorphisme de S dans K se prolonge en un homomorphisme de $U(\mathfrak{h})$ dans K donc est de la forme $s \rightarrow \langle s, e^\lambda \rangle$; donc tout homomorphisme de $\chi(U\mathfrak{h}) = \chi(U(\mathfrak{h})) = \delta_1(S)$ est de la forme $s \rightarrow \langle s, e^\lambda \rangle$ autrement dit tout caractère de \mathcal{O}_f est de la forme $e^\lambda \circ \chi = \chi_\lambda$ et il est donné par la formule (9).

Pour que $\chi_\lambda = \chi_\mu$, il faut et il suffit que e^λ et e^μ coïncident sur $\chi(U(\mathfrak{h})) = \delta_1(S)$ autrement dit que $t\delta_1 e^\lambda$ et $t\delta_1 e^\mu$ coïncident sur S ce qui par le théorème de l'appendice signifie que $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ sont conjugués par le groupe de Weyl.

Théorème 1 : (Harish-Chandra). La représentation irréductible de \mathcal{O}_f soit \mathcal{O}_λ admettant λ pour poids dominant admet un caractère χ_λ qui est donné par la formule :

$$(10) \quad \chi_\lambda(h) = \left\langle h, \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{\langle \rho, \alpha \rangle}{\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle} \cdot \frac{\sum_{\sigma} \det e^{\sigma \cdot (\lambda + \rho)}}{\sum_{\sigma} \det e^{\sigma \cdot \rho}} \right\rangle$$

Tout caractère de \mathcal{O}_f est de la forme χ_λ ; enfin pour que $\chi_\lambda = \chi_\mu$, il faut et il suffit que $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ soient conjugués par le groupe de Weyl.

Remarquons qu'en conséquence si $\lambda \neq \mu$ mais $\lambda + \rho = \sigma(\mu + \rho)$, \mathcal{O}_λ et \mathcal{O}_μ sont inéquivalentes, mais ont même caractère, contrairement au cas des représentations de dimension finie.

5.- Application bécarre dans l'algèbre symétrique de \mathcal{O}_f .

Munissons l'algèbre symétrique de \mathcal{O}_f de la représentation adjointe. D'après le théorème de Birkhoff-Witt, $U_p(\mathcal{O}_f)/U_{p-1}(\mathcal{O}_f)$ s'identifie à $S^p(\mathcal{O}_f)$ et on voit facilement que cette identification est compatible avec les opérateurs de la représentation adjointe. Or, si d'une manière générale, nous considérons deux \mathcal{O}_f -modules M et N et un \mathcal{O}_f -homomorphisme p de M sur N , on a $p(M^0) = N^0$ et $p(M^{\mathfrak{h}}) = N^{\mathfrak{h}}$ donc $p(m^{\mathfrak{h}}) = p(m)^{\mathfrak{h}}$. $S^p(\mathfrak{h})$ étant plongé dans $S^p(\mathcal{O}_f)$ admet \mathcal{O}_{f_p} pour supplémentaire, ces deux espaces étant orthogonaux (cf exp. 18); nous allons chercher à caractériser le sous-espace T de $S^p(\mathfrak{h})$ projection orthogonale du sous-espace des invariants de $S^p(\mathcal{O}_f)$ pour la représentation adjointe.

Soit $u \rightarrow u'$ la projection canonique de $U_p(\mathcal{O}_f)$ sur $S^p(\mathcal{O}_f)$. D'après la proposition 1 de l'exp. 18 (ou plutôt un léger renforcement que

donne sa démonstration) tout élément u de $U_p(\mathcal{G})$ s'écrit sous la forme $u = h + \sum [g_i, u_i]$ où $h \in U_p(\mathfrak{h})$ et les u_i sont dans $U_p(\mathcal{G})$; par suite $u^{\mathfrak{h}} = h^{\mathfrak{h}} = \chi(h) + p$ où $\chi(h)$ est comme on sait dans $U_p(\mathcal{G})$ et $p \in \mathbb{F}$. Appliquant l'homomorphisme $u \rightarrow u'$ on trouve alors $(u')^{\mathfrak{h}} = (u^{\mathfrak{h}})' = \chi(h)' + p'$ et p' est dans \mathcal{U}_p tandis que $\chi(h)'$ appartient à $S^p(\mathfrak{h})$; ceci signifie que T se compose des éléments de la forme $\chi(h)'$ avec $h \in U_p(\mathfrak{h})$.

Comme l'algèbre \mathfrak{h} est abélienne, on peut identifier $U(\mathfrak{h})$ et $S(\mathfrak{h})$, $U_p(\mathfrak{h})$ étant identifié à $\sum_{k \leq p} S^k(\mathfrak{h})$; or χ conserve les sous-espaces $U_k(\mathfrak{h})$ donc si $h \in U_{p-1}(\mathfrak{h})$ on a $\chi(h)' = 0$, ce qui montre qu'on peut remplacer h par n'importe quel élément de $U_p(\mathfrak{h})$ ayant même terme de degré p sans changer $\chi(h)'$. Soit n le nombre des racines positives le terme de plus bas degré de $Q.e^{\rho} = \prod_{\alpha > 0} (e^{\frac{1}{2}\alpha} - e^{-\frac{1}{2}\alpha})$ est donc de degré n puisqu'il est égal à $\prod_{\alpha > 0} \alpha$; par suite si f est un élément du dual de $S(\mathfrak{h})$ dont les composantes de degré $\leq p$ sont nulles, les composantes de degré $\leq p+n$ de ${}^t\delta_3 f = f.D / \prod_{\alpha > 0} \langle \rho, \alpha \rangle$ seront nulles, autrement dit si f est nulle sur $U_p(\mathfrak{h})$, ${}^t\delta_3 f$ est nulle sur $U_{p+n}(\mathfrak{h})$, ce qui prouve par dualité que δ_3 envoie $U_{p+n}(\mathfrak{h})$ dans $U_p(\mathfrak{h})$. Montrons que lorsque a parcourt $S^{p+n}(\mathfrak{h})$, la composante de degré p de $\delta_3 a$ peut être arbitraire; sinon, il y aurait une forme f non nulle sur $U(\mathfrak{h})$ mais nulle sur les $S^q(\mathfrak{h})$ pour $q \neq p$. Alors ${}^t\delta_3 f$ serait orthogonale à $S^{p+n}(\mathfrak{h})$ donc sa composante de degré $p+n$ serait nulle; or ceci n'est pas puisque cette composante est égale à $f. \prod_{\alpha > 0} \alpha / \langle \rho, \alpha \rangle \neq 0$. On a donc montré qu'il existe k de degré $p+n$ tel que h et $\delta_3 k$ aient même composante de degré p .

On sait donc maintenant que T se compose des éléments de la forme $\chi \delta_3(h)' = \delta_1 \delta_2(h)'$ avec $h \in S^{p+n}(\mathfrak{h})$ or $\delta_2(h)$ est de degré p et il est facile de voir que si k est de degré p , k et $\delta_1(k)$ ne diffèrent que par des termes degré $< p$ (par linéarité on se ramène au cas où k est le produit de p éléments h_i de degré 1 et alors $\delta_1(k)$ est le produit des $h_i + \rho(h_i)$) donc $\delta_1 \delta_2(h)' = \delta_2(h)'$ et il résulte alors d'un raisonnement déjà fait que T qui est l'image de δ_2 , est le sous-espace des éléments de $S^p(\mathfrak{h})$ invariants par le groupe de Weyl.

Théorème 2 : (Chevalley). Le sous-espace des éléments de $S^p(\mathfrak{h})$ invariants par le groupe de Weyl est la projection orthogonale sur $S^p(\mathfrak{h})$ de

l'ensemble des invariants de la représentation adjointe de \mathcal{G} dans $S^p(\mathcal{G})$.

Remarque : Il résulte de la démonstration du théorème 2 que si u est de la forme $\delta_3(h)$ avec $h \in S^{p+n}(h)$, on a $u^h = \delta_2(h)$. On peut de là démontrer que si h et h' sont dans $S(h)$, on a

$$(11) \quad \langle h^h, h'^h \rangle = \langle h^h, h'^h \rangle = \langle \delta_2(h), \delta_2(h') \rangle \\ = \left\langle \sum_{\sigma} \det \sigma \cdot \sigma.h / \prod_{\alpha > 0} H_{\alpha}, \sum_{\sigma} \det \sigma \cdot \sigma.h' / \prod_{\alpha > 0} H_{\alpha} \right\rangle$$

APPENDICE

Théorème : Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, G un groupe fini de transformations linéaires dans V que l'on prolonge en un groupe d'automorphismes de l'algèbre symétrique $S(V) = A$. A est un module de type fini sur la sous-algèbre A^G des invariants de G ; tout homomorphisme de A^G dans K se prolonge à A et deux homomorphismes de A dans K coïncident sur A^G si et seulement s'ils sont conjugués par G .

Soit B le A -module A^G ensemble des fonctions à valeur dans A définies dans G et soit C l'ensemble des fonctions de la forme $g \rightarrow g.a$ avec $a \in A$ fixe. B est un A -module de type fini sur l'anneau noethérien A , donc tout sous-module de B est de type fini, en particulier le sous-module C engendré par C ; C a donc un système fini de générateurs qu'on peut même prendre dans C , autrement dit il existe un nombre fini d'éléments $a_i \in A$ tels que pour tout $a \in A$, il existe $b_i \in A$ avec $g.a = \sum_i (g.a_i) b_i$ d'où $a = \sum_i a_i \cdot (g^{-1} b_i)$. Sommant les égalités correspondantes aux différents $g \in G$, on a $a = \sum_i a_i \cdot b_i^h$ et $b_i^h = 1/[G] \sum_{g \in G} g.b_i \in A^G$, autrement dit les a_i forment un système fini de générateurs pour le A^G -module A .

Soit \mathcal{P} un idéal de A^G et $\mathcal{G} = \mathcal{P}A$; on a $\mathcal{G} \cap A^G = \mathcal{P}$, en effet si $q \in \mathcal{G}$ est aussi dans A^G , on a $q = \sum p_i c_i$ ($p_i \in \mathcal{P}, c_i \in A$) et $q = q^h$, d'où l'application bécarre ayant les bonnes propriétés, $q = q^h = \sum p_i (c_i)^h \in \mathcal{P}$. En particulier si $\mathcal{P} \neq A^G$, $\mathcal{P}A \neq A$. Soit f un homomorphisme de A dans K et \mathcal{P} le noyau de f ; $\mathcal{P}A$ est différent de A et $A/\mathcal{P}A$ est une algèbre de dimension finie sur K .

puisque A est module de type fini sur A^H et $A^H/\mathfrak{P} = K$. Si \mathfrak{P}' est un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{P}A$, A/\mathfrak{P}' est un corps et une algèbre de dimension finie sur K , i.e. une extension algébrique de degré fini de K , donc isomorphe à K puisque K est un corps algébriquement clos. Autrement dit, il existe un homomorphisme non nul de A dans K nul sur \mathfrak{P} , qui induit par conséquent f sur A^H .

Soient f_1 et f_2 deux homomorphismes de A dans K qui coïncident sur A^H ; si f est un homomorphisme de A dans K , $a \rightarrow f(g.a)$ en est un autre : f^g , pour tout $g \in G$. Pour tout $a \in A$, on a $\sum_g g.a \in A^H$, donc $f_1(\sum_{g \in G} g.a) = f_2(\sum_{g \in G} g.a)$ i.e. $\sum_{g \in G} f_1^g - \sum_{g \in G} f_2^g = 0$; si n_i est l'ordre du sous-groupe H_i de G laissant invariant f_i ($i = 1, 2$) on a donc $n_1 \sum_{\alpha} f_{1,\alpha} - n_2 \sum_{\beta} f_{2,\beta} = 0$, tous les termes de chacune des sommes partielles étant distincts. Or, des homomorphismes distincts h_k de A dans K sont linéairement indépendants : il existe en effet $a \in A$ tel que les scalaires $h_k(a)$ soient distincts, et si l'on pose

$$a_m = \prod_{k \neq m} \frac{a - h_k(a)}{h_m(a) - h_k(a)}, \quad \text{on a } h_k(a_m) = \delta_{km} \text{ ce qui prouve que les } h_k$$

sont des formes linéaires linéairement indépendantes sur A . Revenant aux f_i , il résulte de l'indépendance des homomorphismes distincts que l'un des $f_{1,\alpha}$ doit être égal à l'un des $f_{2,\beta}$ donc que f_1 et f_2 doivent être conjugués. Réciproquement si $f_2 = f_1^g$, il est clair que f_1 et f_2 coïncident sur A^H .

C.Q.F.D.