

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

P. CARTIER

Sur l'acyclicité du complexe des formes différentielles

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 16, n° 1 (1962), p. 45-74

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_1_45_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ACYCLICITE DU COMPLEXE DES FORMES DIFFERENTIELLES

par P. CARTIER (Strasbourg)⁽¹⁾

1. — Introduction.

Un résultat fameux de H. Poincaré affirme qu'une forme différentielle ω qui satisfait à $d\omega = 0$ dans l'espace⁽²⁾ euclidien $\mathbf{R}^n$ est de la forme $\omega = d\varphi$ si elle est de degré > 0 , ou une constante si elle est de degré 0. L. Schwartz [6], dans sa théorie des distributions, donne des cas particuliers d'un résultat analogue portant sur les courants (i. e. les formes différentielles à coefficients distributions) (Cf. [6], tome I, p. 59). Par ailleurs, on doit à Grothendieck l'extension du résultat précédent aux formes différentielles sur l'espace $\mathbf{C}^n$ et à l'opérateur de différentiation extérieure par rapport aux variables complexes conjuguées ; il n'est pas difficile d'étendre le résultat de Grothendieck aux courants. La démonstration de Grothendieck utilise sa théorie des produits tensoriels topologiques, et une variante du théorème de Künneth. Dans sa thèse, Dolbeault [4] donne une autre démonstration du résultat de Grothendieck qui s'appuie sur la théorie du potentiel ; enfin, on doit à Serre [1] un principe de démonstration du même théorème fondé sur l'emploi de la convolution.

Notre but dans cette Note est de donner une démonstration de tous ces théorèmes basée sur un principe algébrique unique ; la source de ces démonstrations se trouve dans deux lemmes, découverts séparément par de Rham [3] et Koszul [5] à propos de problèmes assez différents de ceux traités ici. Ces lemmes seront démontrés en détail dans les n^{os} 2 à 4, puis appliqués à divers problèmes de formes différentielles. Nous terminerons par un cas particulier du théorème de dualité de Serre [7] sur les

⁽¹⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie située à la fin de l'article.

⁽²⁾ On note $\mathbf{Z}$ l'ensemble des nombres entiers, $\mathbf{R}$ celui des nombres réels et $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes.

faisceaux analytiques cohérents (prop. 5). Comme notre intention est essentiellement didactique, nous avons en général insisté sur les détails de démonstration.

Une fois acquis les résultats locaux de cette note, on démontre sans peine les théorèmes globaux de de Rham et Dolbeault en utilisant la théorie générale des faisceaux.

2. — On considère un groupe abélien M , muni de n opérateurs D_i ($1 \leq i \leq n$) commutant deux à deux. La base canonique du $\mathbf{Z}$ -module $\mathbf{Z}^n$ sera notée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et l'algèbre extérieure de ce module sera notée E ; c'est une algèbre graduée par les puissances extérieures p^e de $\mathbf{Z}^n$, notées respectivement E_p . Lorsque $0 \leq p \leq n$, le $\mathbf{Z}$ -module E_p admet pour base les éléments :

$$(1) \quad u_{i_1, \dots, i_p} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

$(i_1, \dots, i_p)$ parcourant l'ensemble des suites strictement croissantes de p entiers compris entre 1 et n ; on a $E_p = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$.

Le groupe abélien $C = M(\otimes) E$ sera muni de la graduation définie par les sous-groupes $C_p = M(\otimes) E_p$ et de la structure de E -module à droite définie par la condition :

$$(2) \quad (m(\otimes) u) \cdot v = m(\otimes) (u \wedge v) \quad m \in M, \quad u, v \in E$$

De plus, sur C , on définit des opérateurs θ_i et d_i , respectivement homogènes de degré 0 et 1 par les formules :

$$(3) \quad \theta_i(m(\otimes) u) = D_i m(\otimes) u$$

$$(4) \quad d_i(m(\otimes) u) = D_i m(\otimes) (e_i \wedge u).$$

Les opérateurs θ_i et d_i sont E -linéaires; de plus, de la formule :

$$(5) \quad d_i d_j(m(\otimes) u) = D_i D_j m(\otimes) e_i \wedge e_j \wedge u$$

et de la relation de commutation des D_i , on déduit $d_i d_i = 0$ et $d_i d_j = -d_j d_i$. Si l'on pose $d = d_1 + \dots + d_n$, on déduit des relations précédentes que l'on a $dd = 0$, de sorte que (C, d) est un complexe de cochaînes. Explicitant la définition de d , on voit tout de suite que pour $\omega \in C_p$ de la forme :

$$(6) \quad \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} m_{i_1 \dots i_p}(\otimes) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

on aura :

$$(7) \quad d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_{p+1}} \left(\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} D_{i_k} m_{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}} \right) (\otimes) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{p+1}}$$

où le symbole $\hat{}$ au-dessus de l'indice i_k signifie comme d'habitude que l'on doit l'omettre. En particulier, si l'on identifie M et C_0 par l'isomorphisme $m \rightarrow m (\otimes) 1$, on aura :

$$(8) \quad dm = \sum_{i=1}^n D_i m (\otimes) e_i$$

pour $m \in M$, de sorte que $dm = 0$ équivaut à $D_i m = 0$ pour $1 \leq i \leq n$.

3. — Venons-en au premier lemme sur la cohomologie du complexe (C, d) .

LEMME 1 : Pour $1 \leq i \leq n$, soit M_i le sous-groupe de M , somme des images des opérateurs $D_1, \dots, D_i$, et soit $M_0 = 0$; si, pour tout i tel que $0 \leq i < n$ la relation $D_{i+1} m \in M_i$ implique $m \in M_i$, on a $H^p(C, d) = 0$ pour $p \neq n$ et $H^n(C, d)$ est isomorphe à M/M_n .

Nous raisonnerons par récurrence sur le nombre entier n . Lorsque $n = 0$, on a $C_p = 0$ pour $p \neq 0$ et $C_0 = M$, tandis que $M_n = 0$; le lemme est alors immédiat dans ce cas. Supposons donc $n > 0$ et le lemme démontré pour $n - 1$ opérateurs; comme $D_1 m = 0$ implique $m = 0$, on a $H^0(C, d) = 0$ puisque $dm = 0$ implique $D_1 m = 0$. Il est clair que les opérateurs $D_1, \dots, D_{n-1}$ vérifient les hypothèses du lemme pour le cas de $n - 1$ opérateurs, et de plus que l'algèbre extérieure du module $\mathbb{Z}^{n-1}$ s'identifie à la sous-algèbre de E engendrée par $e_1, \dots, e_{n-1}$; on notera E' cette algèbre, E'_p l'intersection de E' et de E_p , C' le produit tensoriel $M (\otimes) E'$ et C'_p le produit tensoriel $M (\otimes) E'_p$. Si l'on pose $d' = d_1 + \dots + d_{n-1}$, l'hypothèse de récurrence implique que $H^p(C', d') = 0$ pour $p \neq n - 1$ et que $H^{n-1}(C', d')$ est isomorphe à M/M_{n-1} .

De plus, tout élément de C_p s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme :

$$(9) \quad \omega = \alpha + \beta \cdot e_n \quad \alpha \in C'_p, \beta \in C'_{p-1}$$

et l'opérateur d est donné par la formule suivante :

$$(10) \quad d\omega = d'\omega + (-1)^p \theta_n(\omega) \cdot e_n = d'\alpha + ((-1)^p \theta_n(\alpha) + d'\beta) \cdot e_n$$

Soit alors $\omega \in C_p$ tel que $d\omega = 0$, c'est-à-dire, avec les notations précédentes :

$$(11) \quad d'\alpha = 0 \quad (-1)^{p-1} \theta_n(\alpha) = d'\beta$$

Nous distinguerons alors plusieurs cas :

a) $0 < p < n - 1$: de $d'\alpha = 0$ et de la relation $H^p(C', d') = 0$, on déduit l'existence d'un $\alpha' \in C'_{p-1}$ tel que $\alpha = d'\alpha'$; comme les opérateurs θ_n et d' commutent, la deuxième formule (11) s'écrit :

$$(12) \quad d'(\beta + (-1)^p \theta_n(\alpha')) = 0$$

Comme $\beta + (-1)^p \theta_n(\alpha')$ appartient à C'_{p-1} et que $H^{p-1}(C', d') = 0$, on en déduit l'existence d'un $\beta' \in C'_{p-2}$ tel que $\beta + (-1)^p \theta_n(\alpha') = d'\beta'$, soit :

$$\alpha = d'\alpha'$$

$$\beta = (-1)^{p-1} \theta_n(\alpha') + d'\beta'$$

Autrement dit, d'après la formule (10), on a $\omega = d(\alpha' + \beta' \cdot e_n)$, ce qui prouve que $H^p(C, d) = 0$.

b) $p = n - 1$: comme $\beta \in C'_{n-2}$, on a :

$$(13) \quad \beta = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} u_i (\otimes) e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e_i} \wedge \dots \wedge e_{n-1}$$

où les u_i sont dans M ; on en déduit :

$$(14) \quad d'\beta = \left(\sum_{i=1}^{n-1} D_i u_i \right) (\otimes) e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1}$$

Autrement dit, on a $d'\beta = u (\otimes) e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1}$ avec $u \in M_{n-1}$; comme d'autre part, on a $\alpha \in C'_{n-1}$, on a $\alpha = v (\otimes) e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1}$ avec $v \in M$ et la deuxième relation (11) s'écrit $u = (-1)^n D_n(v)$. Or, d'après les hypothèses faites, la relation $D_n(v) \in M_{n-1}$ implique $v \in M_{n-1}$; on peut donc écrire $v = \sum_{i=1}^{n-1} D_i v_i$;

d'où $\alpha = d'\alpha'$ avec $\alpha' = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} v_i (\otimes) e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e_i} \wedge \dots \wedge e_{n-1}$. Ayant déterminé $\alpha' \in C'_{n-2}$ tel que $\alpha = d'\alpha'$, on achève la démonstration comme dans le cas a) ; ceci prouve la relation $H^{n-1}(C, d) = 0$.

c) $p = n$: les éléments de C_n sont les éléments de la forme $m (\otimes) e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ avec $m \in M$, tandis que les éléments de C_{n-1} sont de la forme :

$$(15) \quad \omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} m_i (\otimes) e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e_i} \wedge \dots \wedge e_n$$

et l'on a :

$$(16) \quad d\omega = \left(\sum_{i=1}^n D_i m_i \right) (\otimes) e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Il en résulte que l'application $m \rightarrow m \otimes e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ détermine un isomorphisme de M/M_n sur $H^n(C, d)$.

$d) p > n$: on a $C_p = 0$, d'où $H^p(C, d) = 0$. cqfd

COROLLAIRE: Supposons qu'il existe dans le groupe M des opérateurs $T_i (1 \leq i \leq n)$ vérifiant les relations suivantes:

$$(17) \quad T_i D_i = 1 \quad T_i D_j = D_j T_i$$

pour $i > j$. Alors $H^p(C, d) = 0$ pour $p \neq n$; si, de plus, les T_i commutent deux à deux et si T_i commute à D_j pour $j \neq i$, alors M est somme directe de M_n et de l'image de l'opérateur $J = \prod_{i=1}^n (1 - D_i T_i)$, de sorte que l'on peut identifier $H^n(C, d)$ et $J(M)$.

Il suffit, pour démontrer la première assertion, de vérifier les hypothèses du lemme 1; or si $m \in M$ est tel que $D_{i+1} m = D_1 m_1 + \dots + D_i m_i$, on en déduit:

$$m = T_{i+1} D_{i+1} m = \sum_{k=1}^i T_{i+1} D_k m = \sum_{k=1}^i D_k T_{i+1} m$$

d'où $m \in M_i$. De plus, si les T_i commutent entre eux et si T_i commute à D_j pour $i \neq j$, les opérateurs $1 - D_i T_i$ commutent entre eux, et comme l'on a:

$$(1 - D_i T_i)^2 = 1 - 2 D_i T_i + D_i T_i D_i T_i = 1 - 2 D_i T_i + D_i T_i = 1 - D_i T_i$$

puisque $T_i D_i = 1$, on voit que J est un projecteur. La formule $(1 - D_i T_i) D_i = 0$ qui résulte immédiatement de $T_i D_i = 1$, montre alors que J s'annule sur M_n ; mais la formule:

$$1 - J = \sum_{p=1}^n (-1)^p \sum_{i_1 < \dots < i_p} D_{i_1} \dots D_{i_p} T_{i_1} \dots T_{i_p}$$

montre que l'image de $1 - J$ est contenue dans M_n . Le corollaire résulte immédiatement de là.

4. — Voici maintenant le second lemme sur la cohomologie du complexe (C, d) :

LEMME 2: Soit M'_i l'intersection dans M des noyaux des opérateurs $D_1, \dots, D_i$, pour $1 \leq i \leq n$ et soit $M'_0 = M$; si, pour tout i tel que $0 \leq i < n$, on a $M'_i = D_{i+1}(M'_i)$, on a $H^p(C, d) = 0$ pour $p \neq 0$ et $H^0(C, d) = M'_n$.

La remarque à la fin du n° 2 montre que $H^0(C, d) = M'_n$; pour démontrer que $H^p(C, d) = 0$ pour $p \neq 0$, nous raisonnerons par récurrence sur n ,

comme dans la démonstration du lemme 1 et nous garderons les notations introduites à ce propos. Le début de la démonstration est inchangé, jusqu'à la formule (10).

Soit donc $\omega \in C_p$ telle que $d\omega = 0$ et posons $\omega = \alpha + \beta \cdot e_n$ avec $\alpha \in C'_p$ et $\beta \in C'_{p-1}$; les relations (11) seront alors vérifiées. On peut supposer $p > 0$, puisque $C_p = 0$ pour $p < 0$; la relation $d'\alpha = 0$, jointe à l'hypothèse de récurrence $H^p(C', d') = 0$, démontre l'existence de $\alpha' \in C'_{p-1}$ tel que $\alpha = d'\alpha'$. La formule (12) sera encore valable. Nous distinguerons alors deux cas :

a) $p > 1$: comme $u = \beta + (-1)^p \theta_n(\alpha')$ appartient à C'_{p-1} et que $H^{p-1}(C', d') = 0$, il existe $\beta' \in C'_{p-2}$ tel que $\beta + (-1)^p \theta_n(\alpha') = d'\beta'$, et comme dans la démonstration du lemme 1, on voit que ceci implique $\omega = d(\alpha' + \beta' \cdot e_n)$.

b) $p = 1$: Comme u appartient à $C_0 = M$ et que $d'u = 0$, on a $u \in M'_{n-1}$; mais les hypothèses faites entraînent que $D_n(M'_{n-1}) = M'_{n-1}$, et par suite, il existe $v \in M'_{n-1}$ avec $u = D_n(v)$. La relation $v \in M'_{n-1}$ entraîne $d'v = 0$, et de plus, on a $\beta = D_n(\alpha' + v)$ puisque $u = D_n(v)$; il en résulte :

$$\omega = d'\alpha' + D_n(\alpha' + v) \cdot e_n = d(\alpha' + v).$$

On a donc bien prouvé dans tous les cas que $H^p(C, d) = 0$ pour $p > 0$.

cqfd

COROLLAIRE : Supposons qu'il existe dans le groupe M des opérateurs T'_i ($1 \leq i \leq n$) vérifiant les relations suivantes :

$$(18) \quad D_i T'_i = 1 \quad T'_i D_j = D_j T'_i$$

pour $i > j$. On a alors $H^p(C, d) = 0$ pour $p \neq 0$; si, de plus, les T'_i commutent deux à deux et si T'_i commute à D_j pour $j \neq i$, l'opérateur $J' = \prod_{i=1}^n (1 - T'_i D_i)$ est un projecteur de M sur $H^0(C, d)$.

Pour démontrer la nullité de $H^p(C, d)$ pour $p \neq 0$, il suffit d'après le lemme 2 de montrer que D_{i+1} est surjectif dans M'_i . Or, pour $m \in M'_i$, on a $m = D_{i+1} T'_{i+1} m$ et $D_j(T'_{i+1} m) = T'_{i+1} D_j m = 0$ pour $j \leq i$, ce qui prouve que m est l'image par D_{i+1} de l'élément $T'_{i+1} m$ de M'_i . La relation $D_i T'_i = 1$ montre immédiatement que $D_i(1 - T'_i D_i) = 0$ et que $1 - T'_i D_i$ est un projecteur. Si T'_i et D_j commutent pour $i \neq j$ et si les T'_i commutent deux à deux, les opérateurs $1 - T'_i D_i$ commutent deux à deux, J' est un projecteur et $D_i J' = 0$ pour tout i . Cette dernière relation signifie que J' applique M dans M'_n ; comme il est clair que J' induit l'identité sur M'_n , on a bien prouvé que J' est un projecteur de M sur M'_n .

cqfd

5. — Comme première application du lemme 2, considérons le complexe Ω des formes différentielles sur l'algèbre des séries formelles en n indéterminées X_i ($1 \leq i \leq n$) à coefficients dans un corps K de caractéristique 0. Si l'on pose $A = K[[X_1, \dots, X_n]]$ et si l'on note D_i la dérivation partielle par rapport à X_i , il est bien connu que les D_i commutent deux à deux. De plus, toute forme différentielle de degré p s'écrit de manière unique sous la forme :

$$(19) \quad \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_p}$$

et l'on a :

$$(20) \quad \begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} df_{i_1 \dots i_p} \wedge dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_p} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_{p+1}} \left(\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} D_{i_k} f_{i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_{p+1}} \right) dX_{i_1} \wedge \dots \wedge dX_{i_{p+1}}. \end{aligned}$$

Une comparaison immédiate avec la formule (7) montre que l'application $\omega \rightarrow \sum_{(i)} f_{i_1 \dots i_p} \otimes e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ est un isomorphisme du complexe (Ω, d) sur le complexe (U, d) défini comme au n° 1.

De plus, pour toute série formelle $f = \sum_{(a)} f_{a_1 \dots a_n} X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n}$, nous poserons :

$$(21) \quad T'_i f = \sum_{(a)} f_{a_1 \dots a_n} (a_i + 1)^{-1} X_1^{a_1} \dots X_{i-1}^{a_{i-1}} X_i^{a_i+1} X_{i+1}^{a_{i+1}} \dots X_n^{a_n}$$

On vérifie immédiatement que les T'_i commutent entre eux et que T'_i commute à D_j , que $D_i T'_i f = f$ et que :

$$(22) \quad f - T'_i D_i f = \sum_{a_1 \dots \widehat{a_i} \dots a_n} f_{a_1 \dots a_{i-1} 0 a_{i+1} \dots a_n} X_1^{a_1} \dots X_{i-1}^{a_{i-1}} X_{i+1}^{a_{i+1}} \dots X_n^{a_n}$$

et par conséquent $J'f = f_{0,0,\dots,0}$. On peut appliquer alors le corollaire du lemme 2, et l'on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 1 : Soit A l'algèbre des séries formelles à n indéterminées X_i ($1 \leq i \leq n$) à coefficients dans un corps K de caractéristique 0, et soit (Ω, d) le complexe des formes différentielles de A . On a alors $H^p(\Omega, d) = 0$ pour $p \neq 0$ et $H^0(\Omega, d) = K$.

On notera que les opérateurs D_i et T'_i précédents transforment un polynome en un polynome ; il en résulte que la proposition 1 reste valable si

l'on y remplace l'algèbre A des séries formelles en les X_i par l'algèbre des polynômes en les X_i . Il en est de même si l'on remplace les séries formelles par les séries convergentes sur un corps valué complet non discret.

6. — Soit n un entier > 0 ; pour tout ouvert U de $\mathbf{R}^n$, on notera $\mathcal{C}(U)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables dans l'ouvert U , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des dérivées partielles de tous ordres (on omettra désormais l'adverbe « indéfiniment » devant « différentiable »). Pour tout compact K de U , on note $\mathcal{D}_K(U)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(U)$ formé des fonctions nulles en dehors de K , muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{C}(U)$; enfin, on notera $\mathcal{D}(U)$ la réunion des sous-espaces $\mathcal{D}_K(U)$, et on le munira de la topologie limite inductive de celle des sous-espaces $\mathcal{D}_K(U)$. Le dual topologique de $\mathcal{C}(U)$ sera noté $\mathcal{C}'(U)$, celui de $\mathcal{D}(U)$ sera noté $\mathcal{D}'(U)$. On identifie $\mathcal{D}(U)$ à un sous-espace de $\mathcal{C}'(U)$ en associant à $f \in \mathcal{D}(U)$ la forme linéaire $\varphi \rightarrow \int_U f \varphi dx$ sur $\mathcal{C}(U)$.

De la même manière, on identifie $\mathcal{C}(U)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(U)$. Pour toutes ces notions, on pourra consulter le livre de Schwartz [6]. On rappelle que les éléments de $\mathcal{D}'(U)$ s'appellent des distributions.

Nous allons d'abord étudier certains opérateurs fonctionnels dans le cas $n = 1$; on notera D la dérivation, Df étant la dérivée usuelle de f . Soit alors $I =]\alpha, \beta[$ un intervalle ouvert fini ou non de $\mathbf{R}$, a un point de I ; pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$, nous poserons :

$$(23) \quad (T'f)(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (x \in I)$$

On a alors :

$$(24) \quad DT'f = f \quad f - T'Df = f(a) \cdot 1$$

et l'opérateur T' est continu dans $\mathcal{C}(I)$ puisque $D^n T'f = D^{n-1}f$ pour $n \geq 1$, ce qui prouve que si les dérivées de f convergent uniformément vers 0 dans un ensemble, il en est de même de celles de $T'f$.

Pour tout $f \in \mathcal{D}(I)$, on posera :

$$(25) \quad Pf = f - \varphi \cdot \int_I f dt$$

où la fonction φ est un élément fixe de $\mathcal{D}(I)$ tel que $\int_I \varphi dt = 1$; l'opéra-

teur P est un projecteur continu de $\mathcal{D}(I)$ sur l'hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{D}(I)$ défini par la condition $\int_I f dt = 0$; comme on a $\int_I Df dt = 0$, on a $PD = D$.

On peut alors définir l'opérateur T dans $\mathcal{D}(I)$ par la formule

$$(26) \quad (Tf)(x) = \int_{\alpha}^x (Pf)(t) dt = - \int_x^{\beta} (Pf)(t) dt.$$

Supposons φ nulle en dehors de l'intervalle compact J de I ; on voit alors immédiatement que pour tout intervalle compact K de I , l'opérateur T applique $\mathcal{D}_K(I)$ dans $\mathcal{D}_{J \cup K}(I)$, et qu'il est continu dans $\mathcal{D}(I)$. On a de plus le formulaire suivant:

$$(27) \quad T Df = f \quad f - D T f = \varphi \cdot \int_I f dt.$$

Soit alors U un pavé ouvert de $\mathbb{R}^n$, produit des n intervalles ouverts finis ou non $I_i (1 \leq i \leq n)$; pour toute fonction f sur U , on définit une famille de fonctions sur I_i par la formule:

$$(28) \quad f_{x_1 \dots \widehat{x_i} \dots x_n}(x_i) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Si f appartient à $\mathcal{C}(U)$, les fonctions $f_{x_1 \dots \widehat{x_i} \dots x_n}$ sont dans $\mathcal{C}(I_i)$; si $f \in \mathcal{D}(U)$, ces mêmes fonctions sont nulles en dehors d'un intervalle compact fixe K de I_i . Il résulte de ceci que, pour tout opérateur continu H dans $\mathcal{C}(I_i)$, on peut définir un opérateur H_i dans $\mathcal{C}(U)$ par la formule:

$$(29) \quad (H_i f)(x_1, \dots, x_n) = (H f_{x_1 \dots \widehat{x_i} \dots x_n})(x_i)$$

Si H est un opérateur continu dans $\mathcal{D}(I_i)$, tel que pour tout compact K de I_i , il existe un compact K' avec $H(\mathcal{D}_K(I_i)) \subset \mathcal{D}_{K'}(I_i)$ ⁽³⁾, alors la même formule définit un opérateur dans $\mathcal{D}(U)$ que l'on notera aussi H_i . La définition (29) entraîne immédiatement les formules:-

$$(30) \quad H_i \cdot H'_i = (H H')_i \quad (H + H')_i = H_i + H'_i$$

⁽³⁾ Cette dernière condition est toujours satisfaite car l'on suppose l'opérateur H continu; cela résulte de ce qu'un ensemble borné dans $\mathcal{D}(U)$ est contenu dans l'un des sous-espaces $\mathcal{D}_K(U)$.

Appliquant ceci aux opérateurs définis précédemment pour un intervalle ouvert, on définit dans $\mathcal{C}(U)$ des opérateurs continus D_i, T'_i et dans $\mathcal{D}(U)$ des opérateurs continus D_i, T_i vérifiant les conditions suivantes⁽⁴⁾ :

$$(31) \quad D_i D_j = D_j D_i \quad T_i D_i = 1 \quad T_i T_j = T_j T_i \quad T_i D_j = D_j T_i \quad (i \neq j)$$

$$(32) \quad D_i D_j = D_j D_i \quad D_i T'_i = 1 \quad T'_i T'_j = T'_j T'_i \quad T'_i D_j = D_j T'_i \quad (i \neq j)$$

les premières se rapportant à $\mathcal{D}(U)$ et les secondes à $\mathcal{C}(U)$. Les relations de commutation valables pour $i \neq j$ ne font que traduire les propriétés connues des fonctions de deux variables :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy, \text{ etc. ...}$$

De plus, par définition, les D_i ne sont autres que les opérateurs de dérivation partielle du premier ordre ; enfin, dans $\mathcal{D}(U)$, le projecteur $J = \prod_{i=1}^n (1 - D_i T_i)$ est l'application $f \rightarrow \varphi_1 \dots \varphi_n \int_U f dx$, et dans $\mathcal{C}(U)$, le projecteur $J' = \prod_{i=1}^n (1 - T'_i D_i)$ est l'application $f \rightarrow f(a) \cdot 1$.

On sait que toute forme différentielle de degré p dans U s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme :

$$(33) \quad \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1} \dots i_p dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

les x_i étant les fonctions coordonnées dans U , et que l'on a :

$$(34) \quad d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_{p+1}} \left(\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} D_{i_k} f_{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}} \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p+1}}$$

En appliquant les corollaires des lemmes 1 et 2, on en déduit immédiatement la proposition :

(4) Pour faire cette construction, on a choisi un point $a = (a_i)$ de U et pour chaque intervalle I_i une fonction $\varphi_i \in \mathcal{D}(I_i)$ telle que $\int_{I_i} \varphi_i(t) dt = 1$. On note aussi par abus φ_i la fonction $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \varphi_i(x_i)$ sur U .

PROPOSITION 2 : Soient U un pavé ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $(\Omega(U), d)$ le complexe des formes différentielles différentiables dans U ; on a $H^p(\Omega(U), d) = 0$ pour $p \neq 0$ et $H^0(\Omega(U), d)$ se compose des constantes. De plus, si $\Omega_c(U)$ est le sous-espace de $\Omega(U)$ formé des formes différentielles nulles en dehors d'un compact de U , on a $H^p(\Omega_c(U), d) = 0$ pour $p \neq n$ et l'application $\omega \mapsto \int_U \omega$ de Ω_c^n dans

$\mathbf{R}$ définit un isomorphisme de $H^n(\Omega_c(U), d)$ sur $\mathbf{R}$.

Dans le dual $\mathcal{C}'(U)$ de $\mathcal{C}(U)$ nous définirons l'opérateur D_i comme le transposé de l'opérateur $-D_i$ de $\mathcal{C}(U)$ et l'opérateur $\bar{T}_i$ comme le transposé de l'opérateur $-T'_i$ de $\mathcal{C}(U)$; de même, dans le dual $\mathcal{D}'(U)$ de $\mathcal{D}(U)$, on posera $D_i = -{}^t D_i$ et $\bar{T}_i = -{}^t T_i$. Les formules (31) et (32) ont alors des analogues respectivement valables dans $\mathcal{C}'(U)$ et dans $\mathcal{D}'(U)$. L'opérateur $\prod_{i=1}^n (1 - D_i \bar{T}_i)$ dans $\mathcal{C}'(U)$ est le transposé de J' , donc est l'application $\mu \mapsto \mu(1) \cdot \delta_a$ en désignant par δ_a la masse 1 au point a . De même, l'opérateur $\prod_{i=1}^n (1 - \bar{T}_i D_i)$ dans $\mathcal{D}'(U)$ est le transposé de l'opérateur J de $\mathcal{D}(U)$, donc est l'application $\mu \mapsto \mu(\varphi_1 \dots \varphi_n) \cdot 1$. Appliquant alors les corollaires des lemmes 1 et 2 au complexe $\Omega'(U)$ des courants dans U (c'est-à-dire des expressions de la forme (33) avec $f_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{D}'(U)$), on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 3 : Soient U un pavé ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $(\Omega'(U), d)$ le complexe des courants dans U ; on a alors $H^p(\Omega'(U), d) = 0$ pour $p \neq 0$ et $H^0(\Omega'(U), d)$ se compose des constantes⁽⁵⁾. Si $(\Omega'_c(U), d)$ est le complexe des courants à support compact (i. e. les expressions de la forme (33) avec $f_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{C}'(U)$), on a $H^p(\Omega'_c(U), d) = 0$ pour $p \neq n$, tandis que l'application $I : \mu dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \mapsto \mu(1)$ définit un isomorphisme de $H^n(\Omega'_c(U), d)$ sur $\mathbf{R}$ ⁽⁶⁾.

⁽⁵⁾ On rappelle qu'on a identifié $\mathcal{S}(U)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(U)$. Noter que l'opérateur D_i défini dans $\mathcal{D}'(U)$ prolonge l'opérateur du même nom défini dans $\mathcal{S}(U)$, mais que $\bar{T}'_i$ ne prolonge pas T'_i .

⁽⁶⁾ Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et si $\mu \in \mathcal{S}'(U)$, on notera le nombre $\mu(1)$ sous l'une des formes :

$$\int_U \mu dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \int_U \mu(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

On peut donc écrire $I(\omega) = \int_U \omega$ pour $\omega \in \Omega_c'^n(U)$. De plus, la dualité entre $\mathcal{D}(U)$ et $\mathcal{D}'(U)$ (ou $\mathcal{S}(U)$ et $\mathcal{S}'(U)$) s'exprime par la formule :

$$\mu(f) = \int_U f \cdot \mu dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

REMARQUES: 1) Par passage à la limite inductive, la proposition 2 montre que le complexe des germes de formes différentielles différentiables en un point $a \in \mathbb{R}^n$ est acyclique. Il en est de même du complexe des germes de courants en un point $a \in \mathbb{R}^n$; le même énoncé est donc aussi valable pour les germes de formes différentielles et de courants en un point d'une variété de classe C^∞ .

2) La démonstration des propositions 2 et 3 reposant par l'intermédiaire des lemmes 1 et 2 uniquement sur les identités (31) et (32), on déduit immédiatement l'acyclicité des complexes de formes différentielles ou de courants à valeurs dans un espace vectoriel topologique, ou des complexes d'applications continues (resp. différentiables, analytiques réelles, holomorphes, etc...) d'un espace topologique (resp. d'une variété différentiable, ...) dans l'espace des formes différentielles sur U .

7. — Nous allons maintenant examiner le « lemme de Poincaré » relatif aux fonctions de variables complexes.

Sur l'espace complexe à n dimensions $\mathbb{C}^n$, on note $z_1, \dots, z_n$ les fonctions coordonnées; pour $1 \leq j \leq n$, on posera $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$, de sorte que les fonctions réelles $x_1, \dots, x_{2n}$ définissent une bijection de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{R}^{2n}$; lorsqu'on parlera d'une fonction différentiable sur $\mathbb{C}^n$, il s'agira d'une fonction différentiable des $2n$ variables réelles $x_1, \dots, x_{2n}$, et l'on fait la même convention pour les courants ou les formes différentielles.

On a $dz_j = dx_{2j-1} + i dx_{2j}$ et $\bar{dz}_j = dx_{2j-1} - i dx_{2j}$. Il s'ensuit immédiatement que toute forme différentielle de degré 1 sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des différentielles dz_j et $\bar{dz}_j$; en particulier, pour toute fonction différentiable f , on peut poser :

$$(35) \quad df = \sum_{j=1}^n (\partial_j f \cdot dz_j + \bar{\partial}_j f \cdot \bar{dz}_j)$$

On a en fait :

$$(36) \quad \partial_j = (D_{2j-1} - i D_{2j})/2 \quad \bar{\partial}_j = (D_{2j-1} + i D_{2j})/2$$

ce qui prouve que les opérateurs ∂_j et $\bar{\partial}_j$ commutent dans leur ensemble. On dira qu'une forme différentielle est de type (p, q) si elle est de la forme :

$$(37) \quad \omega = \sum_{(i)} \sum_{(j)} \omega_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge \bar{dz}_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{dz}_{j_q}$$

avec une sommation étendue à tous les systèmes (i) strictement croissants de p entiers et les systèmes (j) strictement croissants de q entiers; on notera $\Omega^{p,q}(U)$ l'ensemble des formes différentielles de type (p, q) sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, de sorte que l'espace $\Omega(U)$ des formes différentielles sur U est

somme directe des sous-espaces $\Omega^{p,q}(U)$ pour $p \geq 0$ et $q \geq 0$. Enfin, si ω est de type (p, q) , on a $d\omega = \partial\omega + (-1)^p \bar{\partial}\omega$ avec $\partial\omega$ de type $(p+1, q)$ et $\bar{\partial}\omega$ de type $(p, q+1)$ données respectivement par les formules :

$$(38) \quad (\partial\omega)_{i_1 \dots i_{p+1} j_1 \dots j_q} = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} \partial_{i_k} \omega_{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1} j_1 \dots j_q}$$

$$(39) \quad (\bar{\partial}\omega)_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{q+1}} = \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^{k-1} \bar{\partial}_{j_k} \omega_{i_1 \dots i_p j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_{q+1}}$$

Dans $\mathcal{D}'(U)$, on notera respectivement ∂_j et $\bar{\partial}_j$ les transposés de $-\partial_j$ et $-\bar{\partial}_j$; si l'on identifie $\mathcal{C}(U)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(U)$, l'opérateur ∂_j sur $\mathcal{D}'(U)$ prolonge l'opérateur ∂_j défini sur $\mathcal{C}(U)$, et il en est de même pour $\bar{\partial}_j$; les assertions démontrées pour les formes différentielles restent valables pour les courants, en remplaçant dans les formules précédentes toutes les fonctions par des éléments de $\mathcal{D}'(U)$.

Soit p un entier ≥ 0 ; on notera $A^p(U)$ l'espace des formes différentielles sur U dont toutes les composantes de type (p', q) pour $p' \neq p$ sont nulles; la formule (39) montre que $A^p(U)$ est stable par $\bar{\partial}$, et l'analogie avec la formule (7) montre immédiatement que l'on a $\bar{\partial} \bar{\partial} = 0$, de sorte que $(A^p(U), \bar{\partial})$ est un complexe. Ce complexe est en fait formé par le procédé du n° 2 au moyen du groupe abélien $A^{p,0}(U)$ et des opérateurs $\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_n$ sur ce groupe; comme le groupe $A^{p,0}(U)$ est somme directe de $\binom{n}{p}$ sous-groupes isomorphes à $A^{0,0}(U) = \mathcal{C}(U)$, le complexe $(A^p(U), \bar{\partial})$ est somme directe de $\binom{n}{p}$ complexes isomorphes à $(A^0(U), \bar{\partial})$. La correspondance entre une forme ω de type (p, q) et un système de $\binom{n}{p}$ formes $\omega_{i_1 \dots i_p}$ de type $(0, q)$ s'exprime par la formule :

$$(40) \quad \omega = \sum_{(i)} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge \omega_{i_1 \dots i_p}$$

qui entraîne :

$$(41) \quad \bar{\partial}\omega = \sum_{(i)} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge \bar{\partial}\omega_{i_1 \dots i_p}$$

En remplaçant les formes différentielles par des courants, on définit de manière analogue le complexe $(A^p(U), \bar{\partial})$, et les formules (40) et (41) restent valables.

PROPOSITION 4: Soit P un polydisque ⁽⁷⁾ ouvert dans $\mathbb{C}^n$, produit des disques $U_1, \dots, U_n$ de $\mathbb{C}$. Alors $H^q(A^p(P), \bar{\partial})$ et $H^q(A^p(P), \partial)$ sont nuls pour $q \neq 0$ et se composent pour $q = 0$, des formes différentielles de type $(p, 0)$ dans P , dont les coefficients sont des fonctions holomorphes.

Les remarques précédant l'énoncé montrent que l'on peut se limiter au cas $p = 0$ pour démontrer la proposition 4.

A) Nous définirons d'abord des opérateurs T_j transformant une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ en une fonction de $\mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$.

Soit donc $f \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, et soit j un entier avec $1 \leq j \leq n$. Nous définirons une fonction $T_j f$ sur $\mathbb{C}^n$ par la formule :

$$(42) \quad T_j f(z_1, \dots, z_n) = -\pi^{-1} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} f(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j + re^{i\theta}, z_{j+1}, \dots, z_n) e^{-i\theta} d\theta.$$

Supposons que la fonction f soit nulle en dehors de l'ensemble des points de $\mathbb{C}^n$ où $|z| = \sup |z_j|$ est inférieur à R ; si l'on calcule la valeur de la fonction $T_j f$ dans l'ensemble des points de $\mathbb{C}^n$ vérifiant l'inégalité $|z| \leq R'$, l'intégrale portant sur r peut être prise entre 0 et $R + R'$, en particulier dans un intervalle fini. Il en résulte que la fonction $T_j f$ est indéfiniment différentiable, et que l'opérateur T_j commute aux opérateurs de dérivation $D_1, \dots, D_{2n}$, donc aussi à $\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_n$; de plus, l'inégalité $\sup_{|z| \leq R'} |f(z)| \leq M$ entraîne $\sup_{|z| \leq R'} |T_j f(z)| \leq M_0(R + R')$, de sorte que l'application linéaire T_j de $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$ est continue.

Nous allons prouver que l'on a $T_j \bar{\partial}_j f = f$ pour f dans $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$; on en déduira $\bar{\partial}_j T_j f = f$ puisque $\bar{\partial}_j$ et T_j commutent. D'après la formule (4), notre assertion est une conséquence immédiate de la formule :

$$(43) \quad \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \bar{\partial} f(re^{i\theta}) e^{-i\theta} dr d\theta = -\pi f(0) \quad (f \in \mathcal{D}(\mathbb{C}))$$

que nous allons maintenant prouver. Si l'on pose $g(r, \theta) = f(re^{i\theta})$, on aura :

$$\begin{aligned} D_1 g(r, \theta) &= \partial f(re^{i\theta}) \partial z / \partial r + \bar{\partial} f(re^{i\theta}) \bar{\partial} z / \partial r = \partial f(re^{i\theta}) e^{i\theta} + \bar{\partial} f(re^{i\theta}) e^{-i\theta} \\ D_2 g(r, \theta) &= \partial f(re^{i\theta}) \partial z / \partial \theta + \bar{\partial} f(re^{i\theta}) \bar{\partial} z / \partial \theta = i \partial f(re^{i\theta}) re^{i\theta} - i \bar{\partial} f(re^{i\theta}) re^{-i\theta} \end{aligned}$$

(7) On appelle disque ouvert de centre a et de rayon R dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - a| < R$; le disque fermé correspondant est défini par l'inégalité $|z - a| \leq R$; on n'exclut pas le cas $R = \infty$ de sorte que $\mathbb{C}$ est considéré comme un disque ouvert et fermé, et par conséquent, $\mathbb{C}^n$ est un polydisque ouvert et fermé.

d'où l'on déduit :

$$(44) \quad \bar{\partial} f(r e^{i\theta}) e^{-i\theta} = (D_1 g(r, \theta) + i r^{-1} D_2 g(r, \theta))/2.$$

Comme on a par ailleurs :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty D_1 g(r, \theta) dr &= -g(0, \theta) = -f(\theta) \\ \int_0^{2\pi} D_2 g(r, \theta) d\theta &= g(r, 2\pi) - g(r, 0) = f(r) - f(r) = 0 \end{aligned}$$

on déduit de (44) la formule :

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \bar{\partial} f(r e^{i\theta}) e^{-i\theta} dr d\theta = -1/2 \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = -\pi f(0).$$

Comme l'application T_j de $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$ est continue, on définit une application linéaire T'_j de $\mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$ par la formule

$$(45) \quad T'_j \mu(f) = -\mu(T_j f) \quad (f \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n), \mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n))$$

et des propriétés de T_j , on déduit :

$$(46) \quad T'_j \bar{\partial}_k \mu = \bar{\partial}_k T'_j \mu \quad T'_j \bar{\partial}_j \mu = \bar{\partial}_j T'_j \mu = \mu.$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ de la forme $U_1 \times \dots \times U_{j-1} \times \mathbb{C} \times U_{j+1} \times \dots \times U_n$; la formule (42) montre que si une fonction f dans $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ est nulle dans U , il en est de même de la fonction $T_j f$; elle montre aussi que si le support de f est contenu dans U , il en est de même du support de $T_j f$. Comme une distribution μ est dite nulle dans U si l'on a $\mu(h) = 0$ pour toute fonction h différentiable ayant un support compact contenu dans U , il résulte immédiatement de ce qui précède et de la formule (45) que si la distribution μ à support compact est nulle dans U , il en est de même de $T'_j \mu$. Le support d'une distribution étant le complémentaire du plus grand ensemble ouvert dans lequel elle est nulle, on montre de manière analogue que si la distribution μ a un support compact contenu dans U , la distribution $T'_j \mu$ a son support dans U .

B) Pour démontrer l'assertion de la proposition 4 relative au cas $q = 0$ il suffit de prouver que les fonctions holomorphes dans un ouvert

U de $\mathbb{C}^n$ ne sont autres que les distributions μ telles que $\bar{\partial}_j \mu = 0$ pour $1 \leq j \leq n$.

Supposons d'abord que f soit une fonction holomorphe dans U ; pour tout a dans U , il existe une suite de polynômes $P_r(z)$, respectivement homogènes de degré r , et telle que la série $\sum_{r \geq 0} P_r(z - a)$ converge uniformément dans un voisinage de a et ait une somme égale à $f(z)$ dans ce voisinage. La série précédente peut donc être dérivée terme à terme d'après le lemme d'Abel, et l'on a en particulier :

$$\bar{\partial}_j f(a) = \sum_{r \geq 0} \bar{\partial}_j P_r(a - a) = \bar{\partial}_j P_1(0)$$

ce qui est nul puisque P_1 est combinaison linéaire des z_k et que $\bar{\partial}_j z_k = 0$.

Réciproquement, considérons un élément μ de $\mathcal{D}'(U)$ vérifiant $\bar{\partial}_j \mu = 0$ pour $1 \leq j \leq n$. Nous orienterons l'espace $\mathbb{C}^n$ au moyen du système de coordonnées réelles $x_1, \dots, x_{2n}$; puis, nous définirons une forme différentielle ω de type (n, n) sur $\mathbb{C}^n$ par $\omega(z) = \bigwedge_{j=1}^n dz_j \wedge \bar{dz}_j$; enfin, sur l'espace $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, nous noterons $z_1, \dots, z_n, u_1, \dots, u_n$ les coordonnées complexes, et nous définirons les fonctions réelles y_k par $u_k = y_{2k-1} + i y_{2k}$.

Soit Q un polydisque ouvert dont l'adhérence $\bar{Q}$ soit compacte et contenue dans U . Pour simplifier, nous supposerons que Q est le produit de disques $Q_1, \dots, Q_n$ centrés en O dans $\mathbb{C}$; nous noterons R_j le rayon de Q_j . Comme $\bar{Q}$ est compact et contenu dans l'ouvert U , on peut trouver R'_j et R''_j finis tels que $R_j < R'_j < R''_j$ et que U contienne l'adhérence (compacte) du polydisque Q'' défini par les inégalités $|z_j| < R''_j$ pour $1 \leq j \leq n$. Nous noterons C_j la couronne dans $\mathbb{C}$, ensemble des points u tels que $R'_j - \varepsilon < |u| < R''_j + \varepsilon$, le nombre ε étant choisi très petit; enfin, nous choisirons $f_j \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ vérifiant les relations :

$$f_j(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } |u| \leq R'_j \\ 0 & \text{si } |u| \geq R''_j. \end{cases}$$

Nous conviendrons que dans un produit de facteurs, le produit de 0 par un terme non défini est nul. Comme le support de la fonction $\prod_{j=1}^n f_j(z_j)$ est contenu dans $C_1 \times \dots \times C_n$ et que $Q = Q_1 \times \dots \times Q_n$ et $Q_j \cap C_j = \emptyset$, on définit une fonction différentiable h sur $Q \times \mathbb{C}^n$ par la formule :

$$(47) \quad h(z; u) = \prod_{j=1}^n \bar{\partial} f_j(u_j) / (u_j - z_j)$$

De plus, dans $Q_j \times C_j$, on a l'inégalité $|u_j| > (R_j + R'_j)/2 > |z_j|$, de sorte que l'on peut développer la fonction $(u_j - z_j)^{-1}$ par la série géométrique, et qu'il vient :

$$(48) \quad h(z; u) = \bar{\partial} f_1(u_1) \dots \bar{\partial} f_n(u_n) \sum_{(j)} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} / u_1^{j_1+1} \dots u_n^{j_n+1}$$

et cette série converge uniformément sur $Q \times \mathbb{C}^n$, ainsi que toutes les séries qu'on en déduit par application d'un produit de dérivations par rapport aux variables réelles y_k . Comme h est à support compact, on en déduit que la fonction M définie sur Q par :

$$(49) \quad M(z) = \int_{\mathbb{C}^n} h(z; u) \mu(u) \omega(u)$$

est développable en une série de puissances convergeant uniformément dans Q , de la forme :

$$M(z) = \sum_{(j)} z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n} \int_{\mathbb{C}^n} \mu(u) \omega(u) \prod_{k=1}^n \bar{\partial} f_k(u_k) u_k^{-j_k-1}$$

Soit g une fonction différentiable sur U ayant son support dans Q ; le théorème de Fubini a été généralisé par Schwartz aux distributions (cf. [6], tome I, p. 109) et implique :

$$\begin{aligned} \int_Q M(z) g(z) \omega(z) &= \int_{\mathbb{C}^n} \mu(u) \omega(u) \int_Q h(z; u) g(z) \omega(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} \mu(u) \omega(u) \bar{\partial} f_1(u_1) \dots \bar{\partial} f_n(u_n) G(u) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} G(u) &= \int g(z) \prod_{j=1}^n (u_j - z_j)^{-1} \omega(z) \\ &= (-1)^n \int g(u + v) \prod_{j=1}^n v_j^{-1} dv_j \wedge \bar{dv}_j. \end{aligned}$$

Or, si l'on fait le changement de variable $v_j \rightarrow r_j e^{i\theta_j}$, les variables r_j et θ_j étant réelles, la forme différentielle $v_j^{-1} dv_j \wedge \bar{dv}_j$ se transforme en $-2ie^{i\theta_j} dr_j \wedge d\theta_j$

comme le montre un calcul facile ; on en déduit :

$$(50) \quad G(u) = (2i)^n \int_0^\infty \dots \int_0^{2\pi} g(u_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \dots, u_n + r_n e^{i\theta_n}) e^{-i(\theta_1 + \dots + \theta_n)} dr_1 d\theta_1 \dots dr_n d\theta_n.$$

Si nous utilisons maintenant l'hypothèse $\bar{\partial}_j \mu = 0$, on voit que μ est nulle sur les produits $\bar{\partial}_j(vw)$, d'où la formule d'intégration par parties :

$$(51) \quad \mu(\bar{\partial}_j v \cdot w) = - \mu(v \cdot \bar{\partial}_j w).$$

On définit la fonction $s \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ par :

$$(52) \quad s(z_1, \dots, z_n) = f_1(z_1) \dots f_n(z_n)$$

et l'on a alors :

$$\begin{aligned} \int_Q M(z) g(z) \omega(z) &= \int_{\mathbb{C}^n} \mu(u) \omega(u) \bar{\partial}_1 \dots \bar{\partial}_n s(u) G(u) \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{C}^n} \mu(u) \omega(u) s(u) \bar{\partial}_1 \dots \bar{\partial}_n G(u). \end{aligned}$$

Mais on peut calculer $\bar{\partial}_1 \dots \bar{\partial}_n G(u)$ en remplaçant dans l'intégrale (50) la fonction à intégrer g par $\bar{\partial}_1 \dots \bar{\partial}_n g$; en appliquant n fois la formule (43), on obtient finalement :

$$(53) \quad (-1)^n \bar{\partial}_1 \dots \bar{\partial}_n G(u) = (2\pi i)^n g(u).$$

Comme s est égale à 1 sur Q , et que g est nulle en dehors de Q , on a $sg = g$, et les calculs précédents donnent la conclusion :

$$\int_Q M(z) g(z) \omega(z) = (2\pi i)^n \int_{\mathbb{C}^n} \mu(u) g(u) \omega(u).$$

Par suite, μ est égal à la fonction $(2\pi i)^{-n} M$ dans Q ⁽⁸⁾. Le principe de

(8) Rappelons qu'une distribution $\mu \in \mathcal{D}'(U)$ est dite nulle dans un ouvert $V \subset U$ si l'on a $\mu(h) = 0$ pour toute fonction $h \in \mathcal{D}(U)$ nulle en dehors d'un sous-ensemble compact de V . Au moyen d'une partition de l'unité, on montre que si U est réunion des ouverts

localisation des distributions⁽⁸⁾ montre que l'on a $\mu \in \mathcal{C}(U)$, et l'on vient de prouver que dans tout polydisque dont l'adhérence est compacte et contenue dans U , la fonction μ est égale à la somme d'une série de puissances. Autrement dit, μ est une fonction holomorphe dans U .

C) Soit Q un polydisque ouvert, concentrique à P , et donc l'adhérence soit compacte et contenue dans P ; les fonctions nulles au voisinage de $\bar{Q}$ forment un sous-espace N_Q de $\mathcal{C}(P)$ stable par les opérateurs $\bar{\partial}_j$. Dans l'espace quotient $G_Q = \mathcal{C}(P)/N_Q$, on a donc n opérateurs notés encore $\bar{\partial}_j$ et obtenus par passage au quotient. Les opérateurs $\bar{\partial}_j$ dans G_Q commutent à deux, et nous allons prouver que les hypothèses du lemme 2 sont satisfaites.

Soit $\hat{f}$ un élément de G_Q tel que l'on ait $\bar{\partial}_1 \hat{f} = \dots = \bar{\partial}_j \hat{f} = 0$. Choisissons une fonction f dans la classe $\hat{f}$; il existe donc par définition un ouvert U tel que $\bar{Q} \subset U \subset P$ et $\bar{\partial}_1 f = \dots = \bar{\partial}_j f = 0$ dans U . On introduit alors les objets $R_j, R'_j, R''_j, Q'', f_j, C_j, Q_j$ comme en B), et l'on note Q'_j le disque de centre O et de rayon R'_j ; la fonction s est définie par (52). Comme s est égale à 1 dans le voisinage $Q' = Q'_1 \times \dots \times Q'_n$ de $\bar{Q}$, la fonction $f' = fs$ est dans la classe $\hat{f}$, et appartient à $\mathcal{D}(P)$; nous considérerons f' comme fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ en la prolongeant par 0 en dehors de P . Par ailleurs, le support de s est contenu dans $Q'' \subset U$, et la fonction $\bar{\partial}_k f$ est nulle sur Q'' pour $1 \leq k \leq j$; dans ces conditions, on a donc $\bar{\partial}_k f \cdot s = 0$ dans P . De plus, on a :

$$\bar{\partial}_k s(z) = f_1(z_1) \dots f_{k-1}(z_{k-1}) \bar{\partial} f_k(z_k) f_{k+1}(z_{k+1}) \dots f_n(z_n)$$

d'où résulte immédiatement que $\bar{\partial}_k s$ est nulle sur $Q'_1 \times \dots \times Q'_j \times \mathbb{C}^{n-j} = V_j$. Il en résulte que $\bar{\partial}_k f' = \bar{\partial}_k f \cdot s + f \cdot \bar{\partial}_k s$ est nulle sur V_j ; nous poserons alors $g = T_{j+1} f'$. On a $\bar{\partial}_k g = T_{j+1} \bar{\partial}_k f'$, d'où explicitement :

$$\bar{\partial}_k g(z) = -\pi^{-1} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} \bar{\partial}_k f'(z_1, \dots, z_j, z_{j+1} + re^{i\theta}, z_{j+2}, \dots, z_n) e^{-i\theta} d\theta$$

U_α et si μ est nulle dans chacun des ouverts U_α , on a $\mu = 0$. Supposons alors que pour tout α , il existe une fonction f_α sur U_α , différentiable dans cet ouvert et telle que

$$\mu(h) = \int_{U_\alpha} f_\alpha h \cdot dx \text{ pour } h \in \mathcal{D}(U) \text{ nulle en dehors d'un compact de } U_\alpha. \text{ Il en résulte que } f_\alpha$$

et f_β coïncident sur $U_\alpha \cap U_\beta$, d'où l'existence d'une fonction f sur U induisant f_α sur U_α pour tout α . Le résultat rappelé précédemment montre que l'on a $\mu = f$ (cf. [6], tome I, p. 27).

et cette formule montre immédiatement que $\bar{\partial}_k g$ est nulle sur V_j pour $1 \leq k \leq j$. Si l'on note $\hat{g}$ la classe de g modulo N_Q , on a donc $\bar{\partial}_1 \hat{g} = \dots = \bar{\partial} \hat{g} = 0$, et comme on a $\bar{\partial}_{j+1} T_{j+1} f' = f'$, on a $\bar{\partial}_{j+1} \hat{g} = \hat{f}$.

Les considérations précédentes s'appliquent à peu près sans changement aux distributions. On notera N'_Q le sous-espace de $\mathcal{D}'(P)$ formé des distributions nulles dans un voisinage de $\bar{Q}$, et l'on posera $G'_Q = \mathcal{D}'(P)/N'_Q$. Les opérateurs $\bar{\partial}_j$ laissent stable l'espace N'_Q puisque la dérivation des distributions est une opération de type local (cf. [6], tome 1, p. 36). Pour démontrer que G'_Q satisfait aux hypothèses du lemme 2, on procède comme pour le cas des fonctions; deux points seulement méritent éclaircissement:

a) Le produit de la fonction $s \in \mathcal{D}(P)$ par la distribution $f \in \mathcal{D}'(P)$ est définie par $(fs)(h) = f(sh)$ pour $h \in \mathcal{C}(P)$; c'est un élément de $\mathcal{C}'(P)$; si f ou s est nulle dans un ouvert V , il en est évidemment de même du produit $fs = f'$.

b) La distribution $f' \in \mathcal{C}'(P)$ se prolonge en un élément de $\mathcal{C}'(\mathbb{C}^n)$ nul dans l'ouvert complémentaire de $\bar{Q}''$; on peut alors former $g = T'_{j+1} f'$. On montre comme dans le cas des fonctions que $\bar{\partial}_k f'$ est nul dans V_j , et pour toute fonction $h \in \mathcal{D}(P)$ à support dans V_j , on aura :

$$\bar{\partial}_k g(h) = -g(\bar{\partial}_k h) = f'(T_{j+1} \bar{\partial}_k h) = f'(\bar{\partial}_k T_{j+1} h) = -\bar{\partial}_k f'(T_{j+1} h)$$

Mais h ayant son support dans V_j , la formule (42) (où l'on remplace j par $j+1$ et f par h) montre que $T_{j+1} h$ a son support dans V_j , et comme $\bar{\partial}_k f'$ est nul dans V_j , on a $\bar{\partial}_k f'(T_{j+1} h) = 0$, d'où $\bar{\partial}_k g(h) = 0$, et $\bar{\partial}_k g$ est nul dans V_j .

En appliquant le lemme 2 à l'espace G_Q (resp. G'_Q), on voit que pour toute forme (resp. courant) φ de type $(0, q)$ avec $q \geq 1$, et $\bar{\partial}\varphi = 0$ dans P , il existe une forme (resp. un courant) ψ de type $(0, q-1)$ dans P tel que $\varphi = \bar{\partial}\psi$ dans Q .

D) Il est immédiat qu'il existe une suite croissante de polydisques P_r dont chacun soit ouvert, de même centre que P , et d'adhérence compacte, et qui vérifient les relations :

$$(54) \quad P = \bigcup_{r \geq 1} P_r \quad \bar{P}_r \subset P_{r+1}.$$

Soit φ un courant de type $(0, q)$ dans P tel que $\bar{\partial}\varphi = 0$. Supposons d'abord $q \geq 2$. D'après la fin de C), il existe un courant ψ_1 de type $(0, q-1)$ dans P tel que $\bar{\partial}\psi_1 = \varphi$ dans P_1 . Soit r un entier avec $r \geq 1$; supposons qu'il existe un courant ψ_r dans P , de type $(0, q-1)$ et tel que $\bar{\partial}\psi_r = \varphi$ dans P_r ; d'après C), il existe un courant α de type $(0, q-1)$ dans P tel que $\bar{\partial}\alpha = \varphi$ dans P_{r+1} ; mais alors, on aura $\bar{\partial}(\psi_r - \alpha) = \bar{\partial}\psi_r - \bar{\partial}\alpha = 0$

dans P_r , et d'après C), il existe un courant β de type $(0, q-2)$ dans P tel que $\psi_r - \alpha = \bar{\partial}\beta$ dans P_r (c'est ici qu'intervient l'hypothèse $q \geq 2$). Posons $\psi_{r+1} = \alpha + \bar{\partial}\beta$; on a donc $\bar{\partial}\psi_{r+1} = \bar{\partial}\alpha$, et par suite $\bar{\partial}\psi_{r+1}$ coïncide avec φ dans P_{r+1} et ce qui précède montre que ψ_{r+1} coïncide avec ψ_r dans P_r . En résumé, on a construit par récurrence sur r une suite de courants ψ_r de type $(0, q-1)$ dans P tels que l'on ait

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\partial}\psi_r = \varphi \\ \psi_r = \psi_{r+1} \end{array} \right\} \text{ dans } P_r.$$

D'après le principe de localisation des distributions⁽⁸⁾, il existe donc dans P un courant ψ de type $(0, q-1)$ tel que $\psi = \psi_r$ sur P_r pour tout $r \geq 1$, et l'on en déduit $\bar{\partial}\psi = \varphi$ sur P .

Supposons maintenant que l'on ait $q = 1$. D'après C), il existe une distribution ψ_1 sur P telle que $\bar{\partial}\psi_1 = \varphi$ sur P_1 . Supposons que pour un entier $r \geq 1$, on connaisse une distribution ψ_r sur P telle que $\varphi = \bar{\partial}\psi_r$ dans P_r . D'après C), il existe une distribution α sur P telle que $\varphi = \bar{\partial}\alpha$ dans P_{r+1} ; on a donc $\bar{\partial}(\psi_r - \alpha) = 0$ dans P_r , et par suite, $\psi_r - \alpha$ est égal dans P_r à la somme d'une série convergente de puissances; il existe donc un polynome $F(z_1, \dots, z_n)$ tel que $\psi_r - \alpha - F$ soit égal sur P_{r-1} à une fonction différentielle de module $\leq 2^{-r}$ (noter que $\bar{P}_{r-1}$ est compact et contenu dans P_r). Nous poserons $\psi_{r+1} = \alpha + F$. On a donc construit par récurrence une suite de distributions ψ_r sur P vérifiant les conditions :

$$\bar{\partial}\psi_r = \varphi \text{ sur } P_r ; \quad \psi_{r+1} - \psi_r = f_r ; \quad |f_r| \leq 2^{-r} \text{ sur } P_{r-1}.$$

Soit s un entier ≥ 1 ; pour tout entier r avec $r \geq s+1$, nous noterons ψ'_r la restriction à l'ouvert P_s de la distribution ψ_r sur P ; dans ces conditions, $f'_r = \psi'_{r+1} - \psi'_r$ est une fonction différentiable de module $\leq 2^{-r}$ sur P_s . La série $\sum_{r \geq s} f'_r$ converge alors uniformément dans P_s vers une fonction f' ; cette série converge alors dans $\mathcal{D}'(P_s)$, autrement dit⁽⁹⁾, pour toute fonction $h \in \mathcal{D}(P_s)$, on a $\sum_{r \geq s} \int_{P_s} f'_r(z) h(z) \omega(z) = \int_{P_s} f'(z) h(z) \omega(z)$. De plus, la

⁽⁹⁾ Parmi les nombreuses définitions équivalentes de la limite d'une suite de distributions, nous rappellerons la suivante: soit $(\mu_r)_{r \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(U)$; si, pour toute fonction $h \in \mathcal{D}(U)$, la suite de nombres $\mu_r(h)$ a une limite pour r tendant vers l'infini, il existe une distribution μ sur U telle que $\mu(h) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mu_r(h)$ pour tout $h \in \mathcal{D}(U)$ et l'on dit que μ est limite des μ_r (cf. [5], tome I, p. 74, thm. XIII).

dérivation étant continue dans $\mathcal{D}'(P_s)$, on aura $\bar{\partial}f' = 0$. Si l'on note χ_s la distribution $\psi_s + f'$ sur P_s , on aura

$$\chi_s(h) = \lim_{r \rightarrow \infty} \psi'_r(h) = \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_r(h) \quad h \in \mathcal{D}(P_s)$$

et $\bar{\partial}\chi_s = \bar{\partial}\psi_s$. Comme tout compact de P est contenu dans l'un des ensembles P_s , la suite des nombres $\psi_r(h)$ a une limite pour tout $h \in \mathcal{D}(P)$; si l'on note $\chi(h)$ cette limite, χ est l'unique distribution sur P qui coïncide avec χ_s sur P_s quel que soit $s \geq 1$; on a donc $\bar{\partial}\chi = \bar{\partial}\chi_s = \varphi$ sur P_s , d'où finalement $\bar{\partial}\chi = \varphi$ sur P .

Supposons que φ soit une forme différentielle différentiable; lorsque $q \geq 2$, il suffit de remplacer partout le mot « courant » par les mots « forme différentielle différentiable » pour démontrer l'existence d'une forme ψ de type $(0, q-1)$ telle que $\varphi = \bar{\partial}\psi$.

Supposons maintenant que φ soit une forme de type $(0, 1)$ telle que $\bar{\partial}\varphi = 0$ sur P ; d'après ce qui précède, il existe une distribution ψ sur P telle que $\bar{\partial}\psi = \varphi$. Nous allons montrer qu'une telle distribution est nécessairement une fonction différentiable (« lemme de Weyl »). Pour tout $r \geq 1$, il existe d'après C), une fonction $f \in \mathcal{C}(P)$ telle que $\bar{\partial}f = \varphi$ sur P_r ; on a donc $\bar{\partial}(f - \psi)$ dans P_r et $f - \psi$ est donc une fonction holomorphe dans P_r d'après B); ceci prouve que ψ est une fonction différentiable dans P_r , et comme r est arbitraire et P réunion des P_r , on a la conclusion cherchée.

Ceci termine la démonstration de la proposition 4.

REMARQUES : 1) On peut faire tout d'abord les remarques analogues à celles de la fin du n° 6.

2) La méthode utilisée pour montrer que toute distribution μ telle que $\bar{\partial}\mu = 0$ est une fonction est un procédé classique de la théorie des équations elliptiques. Il repose sur l'existence des « inverses bilatères » T_j pour les opérateurs $\bar{\partial}_j$ et leurs propriétés de régularité. Notons que l'intégrale

$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-i\theta} dr d\theta$ pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ est une distribution, égale dans

le complémentaire de 0 à la fonction $1/z$; la formule (43) est donc équivalente à la formule

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\pi z} \right) = \delta(z)$ de Schwartz (cf. [6], tome I, p. 49). Notons

enfin que le résultat dont nous nous occupons implique le résultat classique que toute fonction continue de n variables complexes qui est holomorphe par rapport à chacune de ces variables est holomorphe dans $\mathbb{C}^n$.

3) La méthode employée dans D) est un artifice classique pour passer d'une solution locale d'une équation aux dérivées partielles à une solution

globale et utilise l'existence d'une suite croissante d'ouverts relativement compacts, dont chacun contient l'adhérence du précédent et dont la réunion est égale au domaine étudié. C'est une adaptation du procédé de Mittag-Leffler pour la recherche d'une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ ayant des parties polaires données; ce dernier problème peut d'ailleurs se ramener à la recherche d'une distribution f telle que $\bar{\partial}f = S$, le courant S étant déterminé de manière simple par les parties polaires de f (cf. [6], tome I, p. 48).

8. — Pour terminer ce mémoire, nous allons examiner les groupes de cohomologie que l'on peut définir au moyen de l'opérateur $\bar{\partial}$ pour les formes et les courants à support compact.

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et p un entier avec $p \geq 0$. Nous noterons $A_c^p(U)$ l'espace des formes différentielles différentiables à support compact dans U , dont toutes les composantes de type (p', q) pour $p' \neq p$ sont nulles. Comme l'opérateur $\bar{\partial}$ transforme une forme à support compact en une forme à support compact, on a donc défini un complexe $(A_c^p(U), \bar{\partial})$, qui se construit d'ailleurs par le procédé du n° 1 à partir des opérateurs $\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_n$ sur le groupe $\mathcal{D}(U)$. En remplaçant $\mathcal{D}(U)$ par $\mathcal{E}'(U)$, on obtient le complexe $(A_c^p(U), \bar{\partial})$ de courants à support compact; comme $\mathcal{D}(U)$ est identifié à un sous-espace de $\mathcal{E}'(U)$, le complexe $(A_c^p(U), \bar{\partial})$ est en fait un sous-complexe de $(A_c^p(U), \bar{\partial})$. Nous allons montrer que ces deux complexes ont la même cohomologie pour un polydisque, et nous déterminerons cette cohomologie.

Le produit extérieur d'une forme et d'un courant se définit par les mêmes formules que le produit extérieur de deux formes; il suffit de remarquer que les coefficients d'un produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ s'expriment comme combinaisons linéaires à coefficients entiers universels de produits d'un coefficient de α par un coefficient de β ; comme le produit d'une fonction et d'une distribution est défini (cf. [6], tome I, p. 117), le même formule garde un sens si les coefficients de α sont des fonctions différentiables, et ceux de β des distributions. En particulier, soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et α un courant à support compact sur U de type (p, n) ; si φ est une forme de type $(n-p, 0)$ sur U dont les coefficients sont des fonctions holomorphes (on dira: une $(n-p)$ -forme holomorphe, pour abréger), le produit $\varphi \wedge \alpha$ est un courant de type (n, n) , donc de degré $2n$ et l'intégrale $\int_U \varphi \wedge \alpha$ a un sens. Si β est un courant à support compact de type $(p, n-1)$, on a :

$$\varphi \wedge (\alpha + \bar{\partial}\beta) = \varphi \wedge \alpha + \varphi \wedge \bar{\partial}\beta = \varphi \wedge \alpha + \bar{\partial}(\varphi \wedge \beta) = \varphi \wedge \alpha + d(\varphi \wedge \beta)$$

puisque l'on a $\partial(\varphi \wedge \beta) = 0$ pour le courant $\varphi \wedge \beta$ de type

$(n, n-1)$. Comme on a $\int_U d\psi = 0$ pour tout courant à support compact ψ sur U , on en conclut que l'on a $\int_U \varphi \wedge \alpha = \int_U \varphi \wedge \alpha'$ si $\alpha' = \alpha + \bar{\partial}\beta$. Autrement dit, la forme linéaire $\varphi \rightarrow \int_U \varphi \wedge \alpha$ sur l'espace des $(n-p)$ -formes holomorphes ne dépend que de la classe de cohomologie $\mathbf{a} \in H^n(A_c^p(U), \bar{\partial})$ de α ; on notera $t_{\mathbf{a}}$ cette forme linéaire.

Les intégrales précédentes s'explicitent comme suit. La forme générale d'une $(n-p)$ -forme holomorphe est donnée par la formule :

$$\varphi = \sum \varepsilon(s) \varphi_{s(1), \dots, s(p)} dz_{s(p+1)} \wedge \dots \wedge dz_{s(n)}$$

où les coefficients sont des fonctions holomorphes dans U , où la sommation est étendue à toutes les permutations s de n lettres telles que

$$s(1) < s(2) < \dots < s(p) \quad s(p+1) < s(p+2) < \dots < s(n)$$

et où $\varepsilon(s)$ représente la signature de la permutation s . Si, de plus, le courant α de type (p, n) s'exprime sous la forme :

$$\alpha = \sum_{(k)} \alpha_{k_1, \dots, k_p} dz_{k_1} \wedge \dots \wedge dz_{k_p} \wedge \bar{dz}_1 \wedge \dots \wedge \bar{dz}_n$$

avec des distributions $\alpha_{k_1, \dots, k_p}$ à support compact dans U , et une sommation portant sur toutes les suites strictement croissantes de p entiers, on aura :

$$(55) \quad \int_U \varphi \wedge \alpha = (-1)^d \sum_{(k)} \int_U \varphi_{k_1, \dots, k_p}(z) \alpha_{k_1, \dots, k_p}(z) \omega(z).$$

L'entier d est égal à $(n-1)(p+n/2)$.

PROPOSITION 5 : *Soit P un polydisque ouvert dans $\mathbb{C}^n$. Les groupes de cohomologie $H^q(A_c^p(P), \bar{\partial})$ et $H^q(A_c^p(P), \bar{\partial})$ sont nuls si $q \neq n$. Pour $q = n$, l'injection de $A_c^p(P)$ dans $A_c^p(P)$ définit un isomorphisme des deux groupes de cohomologie. De plus, l'application $\mathbf{a} \rightarrow t_{\mathbf{a}}$ est un isomorphisme de $H^n(A_c^p(P), \bar{\partial})$ sur le dual topologique de l'espace des $(n-p)$ -formes holomorphes sur P muni de la convergence uniforme sur tout compact des coefficients et de leurs dérivées.*

Comme dans le cas de la proposition 4, on peut se limiter à faire la démonstration lorsque $p=0$.

A) Pour démontrer la proposition lorsque $q \neq n$, nous appliquerons le lemme 1 à l'espace $\mathcal{C}'(P)$ muni des opérateurs $\bar{\partial}_j$ et à l'espace $\mathcal{D}(P)$ muni des mêmes opérateurs. Tout d'abord, il résulte de la formule (42) que si la fonction $s \in \mathcal{D}(P)$ est produit d'une fonction s' ne dépendant que de z_i et d'une fonction s'' ne dépendant que des variables z_j pour $j \neq i$, on a :

$$(56) \quad T_i(sf) = s'' \cdot T_i(s'f) \quad f \in \mathcal{C}(P)$$

Par transposition, on en déduit immédiatement :

$$(56') \quad T_i'(s\mu) = s'' \cdot T_i'(s'\mu) \quad \mu \in \mathcal{D}'(P)$$

Soit $f \in \mathcal{D}(P)$; si l'on a $\bar{\partial}_1 f = 0$, on en déduit $f = T_1 \bar{\partial}_1 f = 0$. Soit maintenant j un entier avec $1 \leq j < n$, et supposons que l'on ait une relation :

$$(57) \quad \bar{\partial}_{j+1} g = \bar{\partial}_1 f_1 + \dots + \bar{\partial}_j f_j$$

où $g, f_1, \dots, f_j$ sont dans $\mathcal{D}(P)$. Considérons un polydisque $Q = Q_1 \times \dots \times Q_n$ d'adhérence compacte contenue dans $P = P_1 \times \dots \times P_n$ et contenant les supports des fonctions g et $f_1, \dots, f_n$. Choisissons pour tout i une fonction $u_i \in \mathcal{D}(P_i)$ égale à 1 sur Q_i et posons $s_i(z) = u_i(z_i)$ et $s = s_1 \dots s_n$. Nous poserons $f'_k = s_{j+1} \cdot T_{j+1}(f'_k)$ pour $1 \leq k \leq j$; d'après (56), on a $f'_k = s \cdot T_{j+1}(f'_k)$, donc la fonction f'_k est à support compact tout comme s . Par ailleurs, pour $1 \leq k \leq j$, l'opérateur de dérivation $\bar{\partial}_k$ commute à T_{j+1} , et annule s_{j+1} ; on déduit alors de (57) :

$$\begin{aligned} g &= s_{j+1}g = s_{j+1} \cdot T_{j+1} \bar{\partial}_{j+1}g = \sum_{k=1}^j s_{j+1} \cdot T_{j+1} \bar{\partial}_k f_k \\ &= \sum_{k=1}^j \bar{\partial}_k (s_{j+1} \cdot T_{j+1} f_k) = \sum_{k=1}^j \bar{\partial}_k f'_k. \end{aligned}$$

Les hypothèses du lemme 1 sont donc satisfaites pour les opérateurs $\bar{\partial}_j$ sur $\mathcal{D}(P)$. Le cas de $\mathcal{C}'(P)$ requiert seulement de remplacer dans la démonstration précédente T_{j+1} par T'_{j+1} et d'interpréter $g, f_1, \dots, f_n$ comme des éléments de $\mathcal{C}'(P)$.

B) Le lemme 1 implique que le groupe $H^n(A_c^0(P), \bar{\partial})$ est isomorphe au quotient de $\mathcal{C}'(P)$ par le sous-espace N formé des distributions de la forme $\sum_{k=1}^n \bar{\partial}_k f_k$ avec des f_k convenables dans $\mathcal{C}'(P)$; l'isomorphisme de ces espaces s'obtient en associant à la classe de cohomologie de $\alpha d\bar{z}_1 \dots d\bar{z}_n$ la classe de α modulo N . Introduisons l'espace $\mathcal{H}(P)$ des fonctions holomor-

phes sur P ; c'est un sous-espace de $\mathcal{C}(P)$ et cet espace est fermé puisque les fonctions holomorphes f sont les solutions du système d'équations différentielles $\bar{\partial}_1 f = \dots = \bar{\partial}_n f = 0$; nous munirons $\mathcal{H}(P)$ de la topologie induite par celle de $\mathcal{C}(P)$. D'après la formule (55), l'assertion que $a \rightarrow t_a$ est un isomorphisme équivaut aux deux propositions suivantes :

a) Pour toute forme linéaire continue t sur $\mathcal{H}(P)$, il existe une distribution $\alpha \in \mathcal{C}'(P)$ avec $t(f) = \alpha(f)$ pour $f \in \mathcal{H}(P)$.

b) Si une distribution $\alpha \in \mathcal{C}'(P)$ est telle que $\alpha(f) = 0$ pour toute fonction holomorphe f dans P , il existe des distributions $\alpha_k \in \mathcal{C}'(P)$ telles que :

$$(58) \quad \alpha = \bar{\partial}_1 \alpha_1 + \dots + \bar{\partial}_n \alpha_n.$$

Comme $\mathcal{H}(P)$ est un sous-espace de l'espace vectoriel topologique localement convexe $\mathcal{C}(P)$, toute forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(P)$ est la restriction d'une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(P)$ d'après le théorème de Hahn-Banach. Ceci prouve a).

Démontrons b). Nous choisirons deux polydisques ouverts $Q = Q_1 \times \dots \times Q_n$ et $Q' = Q'_1 \times \dots \times Q'_n$ d'adhérences compactes, et tels que $Q \subset \bar{Q} \subset Q' \subset \bar{Q}' \subset P$. De plus, nous choisirons pour tout j une fonction différentiable u_j d'une variable complexe égale à 1 sur Q_j et à 0 en dehors de Q'_j , et nous poserons $s_j(z) = u_j(z_j)$ et $s = s_1 \dots s_n$. Enfin, pour $1 \leq j < n$, nous poserons :

$$V_j = Q_1 \times \dots \times Q_j \times Q'_{j+1} \times \dots \times Q'_n$$

on conviendra aussi que $Q' = V_0$ et $Q = V_n$. On a donc $V_j \subset V_{j-1}$ pour $1 \leq j \leq n$.

Etant donnée une distribution $\alpha \in \mathcal{C}'(P)$, nous considérerons les deux propriétés suivantes (pour $j = 1, 2, \dots, n$) :

(H_j) Le support de α est contenu dans V_j , et pour toute fonction f dans $\mathcal{C}(P)$ qui vérifie $\bar{\partial}_1 f = \dots = \bar{\partial}_j f = 0$ dans V_j , on a $\alpha(f) = 0$.

(C_j) Il existe des distributions $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ dans $\mathcal{C}'(P)$ telles que α_k ait son support dans V_{k-1} pour $1 \leq k \leq j$ et $\alpha = \sum_{k=1}^j \bar{\partial}_k \alpha_k$.

Supposons que la distribution α vérifie (H_j) et posons $\alpha_j = s_j \cdot T'_j \alpha$; d'après ce qu'on a vu sur l'effet de T'_j sur les supports (cf. fin du A) de la démonstration de la prop. 4), le support de α_j est contenu dans V_{j-1} . Posons $\beta = \alpha - \bar{\partial}_j \alpha_j$; on a donc :

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha - \bar{\partial}_j (s_j \cdot T'_j \alpha) = \alpha - s_j \cdot \bar{\partial}_j T'_j \alpha - \bar{\partial}_j s_j \cdot T'_j \alpha \\ &= \alpha - s_j \cdot \alpha - \bar{\partial}_j s_j \cdot T'_j \alpha \\ &= -\bar{\partial}_j s_j \cdot T'_j \alpha \end{aligned}$$

puisque $s_j = 1$ sur V_j et que α a son support dans V_j , d'où $\alpha = s_j \cdot \alpha$.

Soit $g \in \mathcal{C}(P)$; si $j \geq 2$, on supposera que l'on a $\bar{\partial}_1 g = \dots = \bar{\partial}_{j-1} g = 0$ sur V_{j-1} et on ne fera aucune hypothèse sur g si $j = 1$. Posons alors $f = T_j(\bar{\partial}_j s_j \cdot g)$; on a :

$$\beta(g) = \alpha(T_j(\bar{\partial}_j s_j \cdot g)) = \alpha(f).$$

Par ailleurs, comme s_j vaut 1 sur V_j , on a $\bar{\partial}_j s_j = 0$ sur V_j , d'où $\bar{\partial}_j f = \bar{\partial}_j s_j \cdot g = 0$ sur V_j ; si $j \geq 2$, et si l'on a $1 \leq k < j$, on a :

$$\bar{\partial}_k f = \bar{\partial}_k T_j(\bar{\partial}_j s_j \cdot g) = T_j(\bar{\partial}_j s_j \cdot \bar{\partial}_k g)$$

puisque $\bar{\partial}_k$ commute à T_j et que $\bar{\partial}_k s_j = 0$. Mais comme $\bar{\partial}_k g$ est nulle sur $V_{j-1} = Q_1 \times \dots \times Q_{j-1} \times Q'_j \times \dots \times Q'_n$ et que l'on a $\bar{\partial}_j u_j(t) = 0$ pour $t \notin Q'_j$, on en conclut que le produit $\bar{\partial}_j s_j \cdot \bar{\partial}_k g$ est nul sur $Q_1 \times \dots \times Q_{j-1} \times \mathbb{C} \times Q'_{j+1} \times \dots \times Q'_n$, et d'après la formule (42), l'opérateur T_j transforme cette fonction en une fonction nulle sur le même ensemble et a fortiori sur V_j . On a donc prouvé que l'on a $\bar{\partial}_k f = 0$ sur V_j pour $1 \leq k \leq j$, d'où résulte $\beta(g) = \alpha(f) = 0$ puisque α satisfait à (H_j) . Si $j = 1$, on en conclut que l'on a $\beta = 0$ puisqu'il n'y a aucune restriction sur g , et par conséquent $\alpha = \bar{\partial}_1 \alpha_1$; si $j \geq 2$, on en conclut que β satisfait à (H_{j-1}) .

On a donc montré que (H_1) entraîne (C_1) , et que pour $j \geq 2$, toute distribution α satisfaisant à (H_j) est de la forme $\alpha = \beta + \bar{\partial}_j \alpha_j$ où β satisfait à (H_{j-1}) et où α_j a son support dans V_{j-1} . Supposons que l'on sache déjà que (H_{j-1}) entraîne (C_{j-1}) ; on peut alors écrire

$$\beta = \bar{\partial}_1 \alpha_1 + \dots + \bar{\partial}_{j-1} \alpha_{j-1}$$

et α_k a son support dans V_{k-1} pour $1 \leq k < j$; il en résulte immédiatement que α satisfait à (C_j) ; dans ce cas, la condition (H_j) entraîne (C_j) . De ce raisonnement, on conclut que (H_j) entraîne (C_j) pour $1 \leq j \leq n$.

Supposons maintenant que $\alpha \in \mathcal{C}'(P)$ ait son support dans Q et que l'on ait $\alpha(f) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{H}(P)$. On a donc $\alpha(f) = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(P)$ qui vérifie $\partial_1 f = \dots = \partial_n f = 0$ sur Q . Par suite, α vérifie (H_n) , donc aussi (C_n) , et elle peut donc s'écrire sous la forme $\alpha = \bar{\partial}_1 \alpha_1 + \dots + \bar{\partial}_n \alpha_n$, les distributions α_j ayant leur support dans Q' . Ceci achève la démonstration de b).

C) Pour montrer que l'injection de $A_c^0(P)$ dans $A_c^{\prime 0}(P)$ définit un isomorphisme des n -ièmes groupes de cohomologie pour l'opérateur $\bar{\partial}$, il suffit de prouver les deux assertions suivantes :

a') Pour toute forme linéaire continue t sur $\mathcal{H}(P)$, il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{D}(P)$ telle que $t(f) = \int \alpha(z) f(z) \omega(z)$ pour tout $f \in \mathcal{H}(P)$.

b') Si une fonction $\alpha \in \mathcal{D}(P)$ est telle que $\int \alpha(z) f(z) \omega(z) = 0$ pour tout f dans $\mathcal{H}(P)$, il existe des fonctions $\alpha_k \in \mathcal{D}(P)$ telles que :

$$\alpha = \bar{\partial}_1 \alpha_1 + \dots + \bar{\partial}_n \alpha_n.$$

Nous nous occuperons d'abord de b'). Supposons qu'une fonction de $\mathcal{D}(P)$, considérée comme élément de $\mathcal{C}'(P)$ satisfasse à (H_j) ; on définira alors une fonction différentiable à support dans V_{j-1} par la formule $\alpha_j = s_j \cdot T_j \alpha$. Comme en B), on prouvera que $\beta = \alpha - \bar{\partial}_j \alpha_j$ est égale à $-\bar{\partial}_j s_j \cdot T_j \alpha$; si g satisfait les mêmes hypothèses que dans la démonstration de b), on posera $f = T_j'(\bar{\partial}_j s_j \cdot g)$, chaque fonction étant identifiée à une distribution; on prouve comme plus haut que l'on a $\beta(g) = \alpha(f)$ puis que l'on a $\bar{\partial}_k f = 0$ sur V_j pour $1 \leq k \leq j$, d'où $\beta(g) = \alpha(f) = 0$. Ceci prouve que $\beta = 0$ si $j = 1$ et que β satisfait à (H_{j-1}) si $j \geq 2$. Par récurrence sur j , on voit donc que l'on a $\alpha = \bar{\partial}_1 \alpha_1 + \dots + \bar{\partial}_j \alpha_j$ avec des fonctions $\alpha_j \in \mathcal{D}(P)$. Le reste de la démonstration se fait comme dans b).

Passons à la démonstration de a'). D'après l'assertion a), il existe une distribution $\alpha \in \mathcal{C}'(P)$ telle que $\alpha(f) = t(f)$ pour tout f dans $\mathcal{H}(P)$. Nous choisirons un polydisque Q dont l'adhérence soit compacte et contenue dans P , et qui contienne le support de α . Ceci étant, nous reprendrons toutes les notations de la partie B) de la démonstration de la proposition 4. La conclusion de ce B) s'exprimait sous la forme $\mu = (2\pi i)^{-n} M$ dans Q ; si l'on tient compte des formules (47) et (49) et que l'on substitue f à g , on obtient le résultat suivant :

Pour toute fonction f holomorphe dans P , on a dans Q la formule intégrale :

$$(59) \quad f(z) = (2\pi i)^{-n} \int_T \left[\prod_{j=1}^n \bar{\partial} f_j(u_j) / (u_j - z_j) \right] f(u) \omega(u)$$

l'ensemble T étant défini comme le produit des couronnes C_j pour $1 \leq j \leq n$ (cette formule est la généralisation à n variables d'une formule de Schwartz pour les fonctions holomorphes d'une variable, formule qui est à peu près équivalente à la formule intégrale de Cauchy). Comme C_j ne rencontre pas

Q_j , on peut définir pour tout $u = (u_j)$ dans T une fonction N_u sur Q par la formule :

$$(60) \quad N_u(z) = (2\pi i)^{-n} \prod_{j=1}^n (u_j - z_j)^{-1}.$$

Comme la fonction $N_u(z)$ sur $Q \times T$ est différentiable et que α est une distribution à support compact contenu dans Q , on définit une fonction différentiable g sur T par la formule $g(u) = \alpha(N_u)$; si l'on tient compte de la formule (59) et que l'on applique le théorème de Fubini pour les distributions (cf. [6], tome I, p. 109), on obtient finalement :

$$(61) \quad t(f) = \int_T f(u) \left[g(u) \prod_{j=1}^n \bar{\partial} f_j(u_j) \right] \omega(u)$$

La fonction h sur T définie par $h(u) = g(u) \prod_{j=1}^n f_j(u_j)$ étant différentiable à support compact se prolonge en une fonction $h' \in \mathcal{D}(P)$ nulle en dehors de T , et l'on aura donc $t(f) = \int_P f(u) h'(u) \omega(u)$. Ceci achève de démontrer a' .

La proposition 5 est donc complètement démontrée.

REMARQUES: 1) Il résulte des propositions 4 et 5 que si un courant φ sur le polydisque P vérifie $\bar{\partial}\varphi = 0$, il existe une forme ψ et un courant χ tels que $\varphi = \psi + \bar{\partial}\chi$; de plus, si φ est à support compact, on peut choisir ψ et χ à support compact. En utilisant une partition de l'unité, on peut montrer que la même conclusion est valable sur toute variété analytique complexe paracompacte.

2) Si l'on examine la démonstration de l'assertion a' , on obtient le résultat suivant. Soit t une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(P)$; si $P = P_1 \times \dots \times P_n$ et si u_j n'appartient pas à P_j pour $1 \leq j \leq n$, la fonction $\prod_{j=1}^n 1/2\pi i (u_j - z_j)$ est définie et holomorphe sur P ; si l'on note $g(u)$ la valeur prise par t sur cette fonction holomorphe, la fonction g définie sur le produit $R = \prod_{j=1}^n (\mathbb{C} - \bar{P}_j)$ se développe en série de puissances des variables $1/u_j$, donc elle est holomorphe dans R . S'il existe une distribution α de support dans Q qui prolonge la forme linéaire t sur $\mathcal{H}(P)$ à l'espace $\mathcal{E}(P)$, la fonction g se prolonge analytiquement à l'ensemble $R' = \prod_{j=1}^n (\mathbb{C} - \bar{Q}_j)$ et la formule (61) est valable. Or l'existence d'un polydisque Q tel que g se

prolonge analytiquement à R' peut se démontrer facilement en utilisant le fait que t est continue sur $\mathcal{H}(P)$. Ceci permet de démontrer les assertions a) et a') sans utiliser le théorème de Hahn-Banach ; cette remarque permet d'étudier facilement des familles de formes linéaires continues sur $\mathcal{H}(P)$ dépendant continûment ou différentiablement de paramètres réels ou complexes.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] H. CARTAN, Séminaire 1953-54, exp. 18, Secrétariat Mathématique, Paris.
- [2] H. CARTAN-S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton Series, n° 19.
- [3] G. de RHAM, *Division de formes et de courants par une forme linéaire*, Commentarii Math. Helv., **28**, 1954, pp. 346-352.
- [4] P. DOLBEAULT, *Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe*, Ann. of Maths, **64**, 1956, pp. 83-130.
- [5] J. - L. KOSZUL, *Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression*, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950, pp. 73-81.
- [6] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, 2 tomes, Hermann, Paris, 1951.
- [7] J. - P. SERRE, *Un théorème de dualité*, Commentarii Math. Helv., **29**, 1955, pp. 9-26.