

SÉMINAIRE "SOPHUS LIE"

P. CARTIER

Hyperalgèbres et groupes formels

Séminaire "Sophus Lie", tome 2 (1955-1956), exp. n° 2, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SSL_1955-1956__2__A4_0

© Séminaire "Sophus Lie"
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire "Sophus Lie" » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

Séminaire "Sophus LIE"
Année 1955/1956Exposé n° 2

-:-:-:-

HYPERALGÈBRES ET GROUPES FORMELS

(Exposé de P. CARTIER, le 27.1.56)

1.- Hyperalgèbres.Dans cet exposé, K désigne un anneau commutatif unitaire.Définition 1 : On appelle hyperalgèbre sur K une K -algèbre U associative, unitaire, augmentée, filtrée, munie d'une application diagonale vérifiant les axiomes suivants.(HA₁) L'augmentation $\varepsilon : U \longrightarrow K.1$ est un K -homomorphisme unitaire ; on a donc $U = U^+ \oplus K.1$, U^+ désignant le noyau de ε .(HA₂) L'application diagonale $\Delta : U \longrightarrow U \otimes_K U$ est un homomorphisme unitaire de U dans $U \otimes U$ possédant les propriétés suivantes :a) I désignant l'automorphisme identique de Δ , on a :

$$(1) \quad (I \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes I) \circ \Delta$$

L'égalité des 2 applications de U dans $U \otimes U \otimes U$ exprimée par (1) s'énoncera en disant que Δ est associatif.b) S désignant l'involution $a \otimes b \longrightarrow b \otimes a$ de $U \otimes U$, on a :

$$(2) \quad S \circ \Delta = \Delta.$$

Autrement dit, Δ est commutative.c) $P : U \otimes U \longrightarrow U$ désignant l'application $a \otimes b \longrightarrow ab$ déduite du produit, on a :

$$(3) \quad P \circ (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta = P \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = I$$

Autrement dit, Δ est compatible avec l'augmentation.(HA₃) Il existe une filtration d'algèbre croissante de U par des sous-modules $U_{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$, qui vérifie :

$$(4) \quad U_{(0)} = K.1$$

$$(5) \quad \Delta U_{(n)} \subset \sum_{0 \leq p \leq n} U_{(p)} \otimes U_{(n-p)}, \text{ pour tout } n \geq 0, \text{ où}$$

$U_{(p)} \otimes U_{(n-p)}$ est un abus d'écriture pour désigner l'image canonique de $U_{(p)} \otimes U_{(n-p)}$ dans $U \otimes U$.

Rappelons que, pour définir une filtration d'algèbre croissante, les sous-modules $U_{(n)}$ doivent vérifier :

$$(6) \quad U_{(0)} \subset U_{(1)} \subset \dots \subset U_{(n)} \subset U_{(n+1)} \subset \dots$$

$$(7) \quad U = \bigcup_{n \geq 0} U_{(n)}$$

$$(8) \quad U_{(m)} U_{(n)} \subset U_{(m+n)} \quad \text{pour tous } m, n.$$

Lemme 1 :

a) Δ est un monomorphisme.

b) si $u \in U^+$, $\delta u = \Delta u - u \otimes 1 - 1 \otimes u \in U^+ \otimes U^+$

Démonstration :

a) résulte immédiatement de (3).

(HA₁) entraîne la décomposition en somme directe :

$$U \otimes U = U^+ \otimes \bar{U}^+ + U^+ \otimes 1 + 1 \otimes U^+ + K. 1 \otimes 1.$$

Soit $u \in U^+$; posons $\Delta u = u_1 \otimes 1 + 1 \otimes u_2 + k. 1 \otimes 1 + u'$, avec $u_1, u_2 \in U^+$, $k \in K$, $u' \in U^+ \otimes U^+$. Nous avons :

$$P \circ (I \otimes \mathcal{E}) \circ \Delta u = u_1 + k.1, \text{ et, de même,}$$

$$P \circ (\mathcal{E} \otimes I) \circ \Delta u = u_2 + k.1.$$

D'où, d'après (3), $u_1 = u_2 = u$, $k = 0$, ce qui équivaut à b).

Lemme 2 : Posons, pour tout $n \geq 0$, $U_{(n)}^+ = U_{(n)} \cap U^+$. Alors :

a) pour tout $n \geq 0$, $U_{(n)} = U_{(n)}^+ \oplus K.1$.

b) si $u \in U_{(n)}^+$, $\delta u = \Delta u - u \otimes 1 - 1 \otimes u \in \sum_{1 \leq p \leq n-1} U_{(p)}^+ \otimes U_{(n-p)}^+$.

Démonstration : a) résulte de $U_{(n)} \supset U_{(0)} = K.1$ et de (HA₁).

D'autre part, il résulte de (HA₃) et de a) que :

$$\Delta U_{(n)} \subset 1 \otimes U_{(n)} + U_{(n)} \otimes 1 + \sum_{1 \leq p \leq n-1} U_{(p)}^+ \otimes U_{(n-p)}^+.$$

Le lemme 1, b) entraîne b). Ce dernier résultat va nous permettre de définir une filtration (U_n) qui vérifiera (HA₃) et sera maximale en ce sens que $U_{(n)} \subset U_n$ pour tout $n \geq 0$, quelle que soit la filtration $(U_{(n)})$ vérifiant l'axiome (HA₃).

Posons, comme définition par récurrence :

$$(9) \begin{cases} U_0^+ = (0) \\ u \in U_n^+ \iff u \in U^+ \quad \text{et} \quad \delta u \in \sum_{1 \leq p \leq n-1} U_p^+ \otimes U_{n-p}^+ \\ U_n = K.1 + U_n^+, \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

Le lemme 2,b entraîne, par récurrence $U_{(n)} \subset U_n$.

Les relations $U_0 = K.1 \subset U_1 \subset \dots \subset U_n \subset \dots$ s'établissent immédiatement, ainsi que

$$\Delta U_n \subset \sum_{0 \leq p \leq n} U_p \otimes U_{n-p}.$$

Réciproquement, soit $u \in U^+$, tel que $\delta u \in \sum_{1 \leq p \leq n-1} U_p \otimes U_{n-p}$.

On déduit immédiatement du lemme 1,b que $\delta u \in \sum_{1 \leq p \leq n-1} U_p^+ \otimes U_{n-p}^+$, donc $u \in U_n^+$.

Démontrons par récurrence que $U_m U_n \subset U_{m+n}$, en supposant cette propriété exacte pour $m \leq j$, $n \leq k$, $m+n \neq j+k$ (elle est évidente pour m ou $n=0$). Si $u \in U_j^+$, $v \in U_k^+$,

$$\Delta uv = (\Delta u)(\Delta v) \in \left(\sum_{0 \leq m \leq j} U_m^+ \otimes U_{j-m}^+ \right) \left(\sum_{0 \leq n \leq k} U_n^+ \otimes U_{k-n}^+ \right).$$

On déduit de l'hypothèse de récurrence que

$$\Delta uv \subset \sum_{1 \leq p \leq i+j-1} U_p^+ \otimes U_{i+j-p}^+ + U_j^+ U_k^+ \otimes 1 + 1 \otimes U_j^+ U_k^+,$$

d'où (lemme 1), $\delta uv \subset \sum_{1 \leq p \leq i+j-1} U_p^+ \otimes U_{i+j-p}^+$, et $uv \in U_{i+j}^+$.

Il en résulte $U_i U_j = U_i^+ U_j^+ + U_i^+ + U_j^+ + K1 \subset U_{i+j}$.

Nous voyons donc que les (U_n) constituent une filtration de U . L'axiome (HA_2) pourrait donc être remplacé par le suivant : $\bigcup_{n \geq 0} U_n = U$. Nous ne considérerons désormais que la filtration (U_n) .

2.- Dualité des hyperalgèbres.

Pour éviter des complications inutiles, nous imposerons à une hyperalgèbre U la condition suivante :

(HA₄) U est un K-module libre de base $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$; chacun des sous-modules U_n de la filtration canonique est engendré par une partie de la base $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Cet axiome appliqué à $U_0 = K.1$, implique que l'un des e_α est un scalaire inversible.

Nous désignerons par V le dual du K-module U . La valeur de $v \in V$ pour $u \in U$ sera notée $\langle v, u \rangle (\in K)$. Soit $e_\alpha^* \in V$ défini par $\langle e_\alpha^*, e_\beta \rangle = 0$ si $\beta \neq \alpha$, $\langle e_\alpha^*, e_\alpha \rangle = 1$. Le module V s'identifie au produit direct $\prod_{\alpha \in A} K.e_\alpha^*$. Nous introduisons sur V la topologie produit des topologies discrètes sur les facteurs $K.e_\alpha^*$. On vérifie que cette topologie n'est autre que la topologie de la convergence simple $\sigma(V, U)$, avec la topologie discrète sur K . Le module V est évidemment complet, et ses éléments s'écrivent univoquement $\sum_{\alpha \in A} k_\alpha e_\alpha^*$, où les $k_\alpha \in K$ sont quelconques.

Réciproquement, soit u' une forme K-linéaire continue sur V . Elle est entièrement définie par ses valeurs sur les e_α^* qui constituent un ensemble total dans V . Elle est continue si et seulement si u' s'annule sur tous les e_α^* à l'exception d'un nombre fini d'entre eux. Les remarques montrent que le dual de V s'identifie à U .

Le produit tensoriel $U \otimes U$ admet la base $(e_\alpha \otimes e_\beta)_{(\alpha, \beta) \in A^2}$.

Nous avons, comme dans le cas général, un homomorphisme naturel de $V \otimes V$ dans le dual de $U \otimes U$. Les considérations précédentes montrent que cet homomorphisme est injectif ; nous identifierons $V \otimes V$ à un sous-module du dual de $U \otimes U$; ce dernier sera noté $V \hat{\otimes} V$. Le module $V \hat{\otimes} V$, muni de sa topologie de convergence simple peut-être considéré comme le complété de $V \otimes V$. La topologie induite sur $V \otimes V$ se définit directement par le système fondamental de voisinages de 0 : $V \otimes J + J \otimes V$, J parcourant un système fondamental de voisinages de 0 dans V . Le dual de $V \hat{\otimes} V$ est $U \otimes U$.

Nous pouvons alors transposer les applications $\Delta, P, \mathcal{E}, S$.

$$\begin{array}{ll}
 P : U \otimes U \longrightarrow U & \text{a comme transposé} \quad \Delta' : V \longrightarrow V \hat{\otimes} V \\
 \Delta : U \longrightarrow U \otimes U & \text{a comme transposé} \quad P' : V \hat{\otimes} V \longrightarrow V \\
 \mathcal{E} : U \longrightarrow U & \text{a comme transposé} \quad \mathcal{E}' : V \longrightarrow V \\
 S : U \otimes U \longrightarrow U \otimes U & \text{a comme transposé} \quad S' : V \hat{\otimes} V \longrightarrow V \hat{\otimes} V
 \end{array}$$

Nous noterons I' l'application identique de V (transposée de I).

L'associativité de P se traduit par :

$$(9) \quad P \circ (I \otimes P) = P \circ (P \otimes I)$$

D'où, par transposition :⁽¹⁾

$$(10) \quad (I' \otimes \Delta') \circ \Delta' = (\Delta' \otimes I') \circ \Delta' ,$$

c'est-à-dire l'associativité de l'application diagonale Δ' (Cf. (1)) .

De même, transposant (1), nous obtenons :

$$(11) \quad P' \circ (P' \otimes I') = P' \circ (P' \otimes I') ,$$

c'est-à-dire l'associativité du produit P' ; V devient ainsi une algèbre associative. Transposant (2), nous avons :

$$(12) \quad P' \circ S' = P' ,$$

ce qui signifie que l'algèbre V est commutative.

Désignons par e l'élément de V défini par $\xi u = \langle e, u \rangle 1$ pour $u \in U$.

Nous avons, pour tous $v \in V$, et $u, u' \in U$:

$$\langle e \otimes v, u \otimes u' \rangle = \langle e, u \rangle \langle v, u' \rangle = \langle v, P \circ (\xi \otimes I)(u \otimes u') \rangle$$

D'où $\langle e \otimes v, \Delta u \rangle = \langle v, u \rangle$, d'après (3) , et $P'(e \otimes v) = v$.

On démontre de même que e est unité à droite. L'algèbre V est donc unitaire; l'unité e sera notée (abusivement) 1 .

L'application $\xi' : V \rightarrow V$ est un projecteur ($\xi \circ \xi = \xi$ se transpose en $\xi' \circ \xi' = \xi'$). Pour $v \in V$, $u \in U$, on a :

$$\langle \xi' v, u \rangle = \langle v, \xi u \rangle = \langle v, \langle 1, u \rangle \cdot 1 \rangle = \langle 1, u \rangle \langle v, 1 \rangle$$

d'où $\xi' v = \langle v, 1 \rangle \cdot 1$, ce qui montre que ξ' est une augmentation.

Nous définissons les sous-modules V_n de V ($n = 0, 1, \dots$) en posant $v \in V_n$ si et seulement si $\langle v, U_{n-1} \rangle = (0)$; par convention, $U_{-1} = (0)$.

$$\text{Ainsi } V_0 = V \supset V_1 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$$

$$\text{Comme } \bigcup_{n \geq 0} U_n = U, \quad \bigcap_{n \geq 0} V_n = (0) .$$

(1) Nous laissons au lecteur le soin de formuler plus précisément les énoncés concernant le module $V \hat{\otimes} V \hat{\otimes} V$.

La relation (4) signifie que V_1 est le noyau de ξ' .

Soient $v \in V_m$, $v' \in V_n$. Nous avons

$$\langle P'(v \otimes v'), u \rangle = \langle v \otimes v' , \Delta u \rangle .$$

Si $u \in U_{m+n-1}$, $\Delta u \in \sum_{j+k=m+n-1} U_j \otimes U_k$; comme $j + k = m + n - 1$,

$j \leq m - 1$ ou $k \leq n - 1$; il en résulte :

$$(13) \quad V_m V_n \subset V_{m+n} \quad , \text{ pour tous } m , n \geq 0 .$$

En particulier, les V_n sont des idéaux bilatères. Il est clair que les V_n sont engendrés (en tant que sous-modules fermés) par des parties de l'ensemble $(e_\alpha^*)_{\alpha \in A}$.

La topologie de V n'est pas définie, en général, par les V_n . Elle admet comme système fondamental de voisinages de 0 les orthogonaux des sous-espaces de type fini de U . Or tout sous-espace de type fini M de U est contenu dans un sous-espace M engendré par un nombre fini d'éléments basiques (e_α) , et vérifiant de plus : $\Delta M \subset M \otimes M$.

Démontrons ce résultat par récurrence sur n , n étant le plus petit entier tel que $M_0 \subset U_n$ (un tel entier existe parce que M_0 est de type fini). Nous pouvons supposer, en remplaçant éventuellement M_0 par un sous-module de type fini qui le contient, que M_0 est engendré par $M_0 \cap U_{n-1}$ et par un nombre fini de $e_\alpha \in U_n - U_{n-1}$, soit l'ensemble $(e_\beta)_{\beta \in B}$, $B \subset A$. Supposons également que $1 \in M_0$. Soit $M_1 \subset U_{n-1}$ un sous-module de type fini de U_{n-1} , contenant $M_0 \cap U_{n-1}$, et tel que $\sum e_\beta \in M_1 \otimes M$, pour $\beta \in B$. Soit M_2 un sous-module de type fini contenant M_1 engendré par des éléments basiques et tel que $\Delta M_2 \subset M_2 \otimes M_2$ (un tel module existe, par l'hypothèse de récurrence). Il suffit de prendre M engendré par M_2 et les $(e_\beta)_{\beta \in B}$.

Soit M^* l'orthogonal de M ; M^* est un idéal. En effet, si $v \in M^*$, $v' \in V$, $u \in M$, on a $\langle vv' , u \rangle = \langle v \otimes v' , \Delta u \rangle = 0$, car $\Delta u \in M \otimes M$.

Ainsi la topologie de V est définie par un système fondamental de voisinage de 0 , constituée par des idéaux bilatères de codimension finie, engendré par des éléments basiques e_α^* . Soit J un tel idéal ; son orthogonal est contenu dans un U_{n-1} ; donc $V_n \subset J$, et, a fortiori, $(V_1)^n \subset J$.