P. Cartier

Extensions régulières

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. nº 14, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A14_0>

Séminaire E.N.S., 1955/56
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

EXTENSIONS RÉGULIÈRES

(Exposé de P. CARTIER, le 5.3.1956)

Dans cet exposé, K est un corps fixé ; p désigne le nombre 1 si K est de caractéristique 0 et la caractéristique de K dans le cas contraire. $K^{p^{-\infty}}$ est l'ensemble des x dans une clôture algébrique de K tels que $x^{p^f} \in K$ pour un entier $f \geq 0$ assez grand.

1.- Extensions composées.

On appellera <u>extension composée de deux extensions</u> L_1 <u>et</u> L_2 <u>de</u> K la donnée $\mathcal{C} = (E, u_1, u_2)$

a) <u>d'une extension</u> E <u>de</u> K <u>engendrée par deux sous-extensions</u> L'_1 <u>et</u> L'_2 <u>algébriquement disjointes</u>.

b) pour $i = 1, 2$, <u>d'un</u> K-<u>isomorphisme</u> u_i <u>de</u> L_i <u>sur</u> L'_i .

Deux extensions composées (E', u'_1, u'_2) et (E'', u''_1, u''_2) de L_1 et L_2 sont <u>dites équivalentes</u> (ou de même type) s'il existe un K-isomorphisme j de E' sur E'' tel que $u''_i = j \circ u'_i$, autrement dit s'il existe un K-isomorphisme j (nécessairement unique) de E' sur E'' prolongeant les isomorphismes $f_i = u''_i \circ u'^{-1}_i$ de L'_i sur L''_i .

Rappelons que deux extensions L et L' de K contenues dans une même extension sont <u>algébriquement disjointes</u> si toute partie B de L algébriquement libre sur K l'est encore sur L' et que cette propriété est symétrique en L et L' .

L'équivalence des extensions composées est visiblement transitive, symétrique et réflexive. On définit de la manière suivante des extensions composées de L_1 et L_2 : soit B une base de transcendance de L_2 sur K , Ω une clôture algébrique du corps $L_1(X_i)_{i \in I}$ des fractions rationnelles par rapport à des indéterminées X_i en correspondance biunivoque avec les éléments $x_i \in B$. On identifie $K(B) \subset L_2$ à un sous-corps de Ω par la correspondance $x_i \rightleftarrows X_i$; si 1 est l'application identique de L_1 dans Ω et v un $K(B)$-isomorphisme de L_2 dans Ω , alors $(L_1(v(L_2)), 1, v) = \mathcal{C}(v)$ est une extension composée de L_1 et L_2, car B est une base de transcendance de $v(L_2)$ sur K qui est algébriquement libre sur L_1 .

De plus pour que $\mathcal{C}(v)$ et $\mathcal{C}(v')$ soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe un K-isomorphisme de $L_1(v(L_2))$ sur $L_1(v'(L_2))$ qui soit l'identité sur L_1 et tel que $v' = j \circ v$, ou encore puisque v et v' sont l'identité sur $K(B)$ et que Ω est une clôture algébrique de $L_1(B)$, qu'il existe un $L_1(B)$-automorphisme f de Ω tel que $v' = f \circ v$.

Enfin nous allons montrer que toute extension composée $\mathcal{C} = (E , u_1 , u_2)$ de L_1 et L_2 est équivalente à une extension $\mathcal{C}(v)$: en effet comme les extensions $L_i' = u_i(L_i)$ contenues dans E sont algébriquement disjointes, $B' = u_2(B)$ est algébriquement libre sur L_1 et E est algébrique sur $L_1'(B')$; comme B est algébriquement libre sur L_1, il existe un K-isomorphisme j de $L_1'(B')$ sur $L_1(B)$ qui coïncide avec u_1^{-1} sur L_1' et est tel que $j(u_2(x)) = x$ pour $x \in B$. Comme Ω est algébriquement close, j se prolonge en un K-isomorphisme j' de E dans Ω coïncidant avec u_1^{-1} sur L_1' et avec u_2^{-1} sur $K(B')$, autrement dit j' est une équivalence de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}(j' \circ u_2)$. On a donc démontré :

<u>Proposition 1</u>.- <u>Soient</u> L_1 <u>et</u> L_2 <u>deux extensions de</u> K, B <u>une base de transcendance de</u> L_2 <u>sur</u> K, <u>et</u> Ω <u>une clôture algébrique de</u> $L_1(B)$. <u>Toute extension composée de</u> L_1 <u>et</u> L_2 <u>est équivalente à une extension</u> $\mathcal{C}(v) = (L_1(v(L_2)) , 1 , v)$ <u>où</u> v <u>est un</u> $K(B)$-<u>isomorphisme de</u> L_2 <u>dans</u> Ω ; $\mathcal{C}(v)$ <u>est équivalente à</u> $\mathcal{C}(v')$ <u>si et seulement si on peut trouver un automorphisme</u> f <u>de</u> Ω <u>sur</u> $L_1(B)$ <u>tel que</u> $v' = f \circ v$.

<u>Corollaire 1</u> : <u>Si</u> L_2 <u>est une extension de type fini, il n'existe qu'un nombre fini de types d'extensions composées de</u> L_1 <u>et</u> L_2.

En effet L_2 est alors algébrique de degré fini n sur $K(B)$, et il n'y a par suite qu'un nombre fini $\leq n$ d'isomorphismes distincts de L_2 dans qui soient l'identité sur $K(B)$.

<u>Corollaire 2</u> : <u>il y a correspondance biunivoque entre les types d'extensions composées de</u> L_1/K <u>et</u> L_2/K <u>et les types d'extensions composées de</u> $L_1(B)/K(B)$ <u>et</u> $L_2(B)/K(B)$.

Soit maintenant une extension composée $\mathcal{C} = (E , u_1 , u_2)$ de L_1 et L_2. On définit un homomorphisme h de $L_1 \otimes L_2$ dans E en posant $h(x_1 \otimes x_2) = u_1(x_1)u_2(x_2)$; le noyau de h est un idéal premier $\underline{p}$. Comme L_1 et L_2 engendrent E, on voit que h définit un isomorphisme h' du corps des fractions F de $(L_1 \otimes L_2)/\underline{p}$ sur E, tel que, en appelant v_i l'homomorphisme naturel de L_i dans F, on ait $u_i = h' \circ v_i$. Autrement dit $\mathcal{C}$ est équivalente à l'extension composée (F , v_1 , v_2) .

Réciproquement, si $\underline{p}$ est un idéal premier de $L_1 \otimes L_2$, on peut former le corps F des fractions de $(L_1 \otimes L_2)/\underline{p}$ et l'homomorphisme naturel v_i de L_i dans F $(i = 1 , 2)$. Pour que (F , v_1 , v_2) soit une extension composée, i.e. que $v_1(L_1)$ et $v_2(L_2)$ soient algébriquement disjoints, il faut et il suffit que les monômes par rapport aux éléments de $v_2(B)$ soient linéairement indépendants sur $v_1(L_1)$, i.e. que $\underline{p} \cap (L_1 \otimes K[B]) = (0)$. Or comme $A = L_1 \otimes_K L_2 \simeq (L_1 \otimes_K K(B)) \otimes_{K(B)} L_2$, on peut plonger $L_1 \otimes_K L_2$ dans $A' = L_1(B) \otimes_{K(B)} L_2$ (car $L_1 \otimes_K K(B)$ se plonge dans $L_1(B)$, cf. lemme 4 plus loin), et A' s'obtient en adjoignant à A les inverses des éléments de $S = (L_1 \otimes K(B)) \cap \complement\, 0$; les raisonnements de l'exposé 1 montrent qu'il y a correspondance biunivoque entre les idéaux premiers $\underline{p}'$ de A' et les idéaux premiers $\underline{p}$ de A tels que $\underline{p} \cap S = \emptyset$, par les formules $\underline{p}' \cap A = \underline{p}$, $\underline{p}' = \underline{p}A'$.

Enfin comme L_2 est algébrique sur $K(B)$, A' est réunion de sous-algèbres de rang fini sur $L_1(B)$, donc si $\underline{p}'$ est un idéal premier de A' , $A'/\underline{p}'$ est réunion d'algèbres de rang fini sur $L_1(B)$. Or une algèbre de rang fini sur un corps qui n'a pas de diviseurs de 0 est un corps, et il en est donc de même de $A'/\underline{p}'$. On a donc prouvé ceci :

<u>Proposition 3</u>.- <u>Soient</u> L_1 <u>et</u> L_2 <u>deux extensions de</u> K , B <u>une base de transcendance de</u> L_2 <u>sur</u> K ; <u>dans</u> $L_1(B) \otimes_{K(B)} L_2$, <u>tout idéal premier est maximal, et il y a correspondance biunivoque entre les idéaux premiers de</u> $L_1(B) \otimes_{K(B)} L_2$ <u>et les types d'extensions composées de</u> L_1 <u>et</u> L_2 .

2.- Extensions primaires.

Nous dirons que l'extension L de K est primaire si la fermeture algébrique de K dans L est purement inséparable, autrement dit si pour tout $x \in L$ algébrique sur K , on peut trouver un entier $f \geq 0$ tel que $x^{p^f} \in K$.

L'introduction des extensions primaires et leur dénomination sont justifiées par le théorème suivant :

<u>Théorème 1</u>.- <u>Si</u> L <u>est une extension du corps</u> K , <u>les trois conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) L <u>est extension primaire de</u> K ;

b) <u>si</u> L' <u>est une extension quelconque de</u> K , <u>il y a un seul type d'extension composée de</u> L <u>et</u> L' ;

c) L' étant comme en b) , dans l'algèbre $L \otimes_K L'$, tout diviseur de 0 est nilpotent ;

c') dans $L \otimes \bar{K}$ ($\bar{K}$ étant une clôture algébrique de K) , tout diviseur de 0 est nilpotent.

Nous démontrerons d'abord deux lemmes :

Lemme 1 : Si L est une extension primaire de K , et si les X_i sont des indéterminées, le corps $L(X_i)_{i \in I}$ est une extension primaire de $K(X_i)_{i \in I}$.

Il faut démontrer ceci : si $z \in L(X_i)_{i \in I}$ et si $a_k \in K(X_i)_{i \in I}$ $(1 \leq k \leq n)$ sont tels que $z^n + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{n-k} = 0$, alors on peut trouver un entier $f \geq 0$ tel que $z^{p^f} = u \in K(X_i)_{i \in I}$; or l'expression de z et des a_k ne fait intervenir qu'un nombre fini des X_i , et on peut donc se contenter de démontrer le lemme lorsque I est fini ; mais l'hypothèse du lemme étant récurrente, il suffit d'adjoindre les X_i une à une et donc de démontrer le lemme lorsque $I = \{1\}$, $X_1 = X$.

Soit f un entier ≥ 0 tel que $u = z^{p^f}$ soit algébrique séparable sur $K(X)$ et supposons $u \notin K$. On peut alors poser $u = P(X)/Q(X)$, où P et Q sont des polynomes premiers entre eux, et où Q est unitaire, i.e. le coefficient de son terme de plus haut degré vaut 1 . Soit $F \not\subset K$ la partie finie de L formée des coefficients de P et Q . On peut alors trouver une K-dérivation D non nulle de $K(F) \neq K$, sinon, comme $K(F)$ est de type fini sur K , elle serait algébrique séparable sur K (Exposé 13, corollaire du théorème 2) ce qui contredirait le fait que L est primaire sur K .

D se prolonge de manière bien définie en une dérivation, encore notée D , de $K(F)(X)$, nulle sur X donc sur $K(X)$. Or comme u est algébrique séparable sur $K(X)$, on aura $Du = 0$ (Exposé 13) , d'où immédiatement :

$$(1) \qquad D(P).Q - P.D(Q) = 0 \ .$$

Comme $DX = 0$, $D(P)$ et $D(Q)$ s'obtiennent en appliquant D aux coefficients de P et Q , ce qui comme Q est unitaire, montre que $D(Q)$ est de degré strictement plus petit que le degré de Q . De (1) résulte que Q divise $P.D(Q)$, donc comme il est premier à P , Q divise $D(Q)$, ce qui implique $Q = 0$ pour raison de degré. On est donc parvenu à une contradiction, ce qui prouve que $u \in K(X)$.

Lemme 2 : Soient L une extension de K , $\bar{L}$ une clôture algébrique de L , $\bar{K}$ la fermeture algébrique de K dans $\bar{L}$ ($\bar{K}$ est algébriquement close). Tout K-automorphisme u de $\bar{K}$ qui induit l'identité sur $L \cap \bar{K}$ se prolonge en un L-automorphisme de $\bar{L}$.

Si $x \in L^{p^{-\infty}} \cap \bar{K}$, on a $x^{p^f} \in L \cap \bar{K}$ et par suite x^{p^f} est invariant par u , donc aussi x ; on va montrer que $L^{p^{-\infty}}$ et $\bar{K}$ sont linéairement disjointes sur leur intersection, ce qui prouvera que u se prolonge de manière unique en un automorphisme u' de $\bar{K}(L^{p^{-\infty}})$ sur $L^{p^{-\infty}}$ puisque u est l'identité sur $L^{p^{-\infty}} \cap \bar{K}$; comme $\bar{L}$ est une clôture algébrique de $\bar{K}(L^{p^{-\infty}})$, u' se prolongera en un automorphisme u'' de $\bar{L}$ sur L . Soit alors $\{x_i\}$ une base de $L^{p^{-\infty}}$ sur $\bar{K} \cap L^{p^{-\infty}}$; s'il n'y avait pas linéaire disjonction, il existerait une relation linéaire primordiale à coefficients dans $\bar{K}$, soit $\sum_i a_i x_i = 0$, l'un des a_i étant égal à 1 . Si v est un L-automorphisme quelconque de $\bar{L}$ sur L , on a $v(x_i) = x_i$ d'où la relation linéaire $\sum_i v(a_i) x_i = 0$. Comme la relation écrite plus haut est primordiale, on peut trouver $a \in \bar{K}$ avec $v(a_i) = a a_i$ pour tout i ; mais comme l'un des a_i vaut 1 , on a $a = 1$ et $v(a_i) = a_i$. Ceci ayant lieu pour tout v , on a alors $a_i \in L^{p^{-\infty}} \cap \bar{K}$, et les x_i ne seraient pas linéairement indépendants sur $L^{p^{-\infty}} \cap \bar{K}$, ce qui est contradictoire.

Venons-en à la démonstration du théorème 1 :

a) implique b) : Soient B une base de transcendance de L' sur K , Ω une clôture algébrique de $L(B)$; d'après la proposition 1 il suffit de montrer que $\mathcal{C}(v)$ et $\mathcal{C}(v')$ sont toujours équivalentes, ou encore que l'isomorphisme $v' \circ v^{-1} = u$ de $v(L')$ dans Ω se prolonge en un L-automorphisme de Ω ; or $v(L')$ est algébrique sur $K(B)$ et u se prolonge donc en un automorphisme u' de $\overline{K(B)}$ sur $K(B)$. D'après le lemme 1 , $L(B)$ est primaire sur $K(B)$, donc $L(B) \cap \overline{K(B)}$ est purement inséparable sur $K(B)$, donc invariant par u' . Le lemme 2 achève alors la démonstration. b) implique c) : On a vu que les types d'extensions composées de L et L' correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de $L(B) \otimes_{K(B)} L' = A_i$ donc s'il n'y a qu'un seul type d'extension composée de L et L' , l'anneau A n'a qu'un seul idéal premier ; mais on a alors le lemme :

Lemme 3 : *si l'anneau commutatif* A *ne possède qu'un seul idéal premier* $\underline{p}$, *tout diviseur de* 0 *dans* A *est nilpotent*.

En effet, dans tout anneau, l'ensemble des éléments nilpotents est l'intersection de tous les idéaux premiers, donc ici $\underline{p}$ est l'ensemble des éléments nilpotents de A . Or $\underline{p}$ est aussi le seul idéal maximal de A , qui est donc un anneau local, et par suite tout $a \in \underline{p}$ est inversible, donc non diviseur de 0 .

Ceci étant démontré, $L \otimes K(B)$ se plonge dans $L(B)$ et par suite $L \otimes_K L' \simeq (L \otimes_K K(B)) \otimes_{K(B)} L'$ peut s'identifier à un sous-anneau de A ; si a est diviseur de 0 dans $L \otimes L'$, il l'est a fortiori dans A , donc nilpotent.

c) implique c') trivialement.

c') implique a) : soit $x \in L$ algébrique sur K de polynome minimal $P(X)$; comme $L[X]/(P(X))$ est isomorphe à $L \otimes K(x)$ dans cet anneau tout diviseur de 0 est nilpotent ; autrement dit, si un polynome $Q(X) \in L[X]$ divise P , P divise une certaine puissance de Q ; utilisant une décomposition de P en facteurs premiers dans $L[X]$, on voit que $P(X)$ est égal dans $L[X]$ à une puissance d'un polynome irréductible, d'où résulte que x est purement inséparable.
C.Q.F.D.

Corollaire 1 : *Soient pour* $i = 1 , 2$, L_i *une extension de* K , *et* S_i *la plus grande extension algébrique séparable de* K *contenue dans* L_i . *Alors le type d'une extension composée* $\mathcal{C}$ *de* L_1 *et* L_2 , *ne dépend que du type de l'extension composée* $\mathcal{S}$ *de* S_1 *et* S_2 *induite par* $\mathcal{C}$.

Soit (E , u_1 , u_2) une extension composée de L_1 et L_2 ; nous identifierons L_i à son image dans E par u_i $(i = 1 , 2)$ et nous appellerons F le sous-corps engendré par S_1 et S_2 . Soit alors (E' , u'_1 , u'_2) une extension composée de L_1 et L_2 , induisant une extension composée de S_1 et S_2 équivalente à $(F , 1 , 1)$; il existe alors un isomorphisme f de F dans E' se réduisant à u'_i sur S_i . Comme L_1 est extension primaire de S_1 , il y a un seul type d'extension composée de L_1/S_1 et F/S_1 , donc f se prolonge en un isomorphisme f' de $F(L_1) = S_2(L_1)$ dans E qui se réduit à u'_1 sur L_1 . Enfin comme L_2 est primaire sur S_2 , il existe un isomorphisme f'' de E sur E' se réduisant à f' sur $S_2(L_1)$ et à u'_2 sur L_2 , ce qui prouve l'équivalence cherchée :

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r] & F(L_1) \arrow[r] & E \\
S_1 \arrow[u] \arrow[r] & F \arrow[u] & \\
K \arrow[u] \arrow[r] & S_2 \arrow[u] \arrow[r] & L_2 \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

<u>Corollaire 2 : Si</u> L/K <u>est une extension primaire, et si</u> L' <u>est une extension composée de</u> L/K <u>et</u> K'/K , <u>l'extension</u> L'/K' <u>est primaire</u>.

Soit M une extension quelconque de K' , et $\mathcal{C} = (E , u_1 , u_2)$ une extension composée de L'/K' et M/K' ; on peut identifier L et K' à des sous-corps de L' , et L' et M à des sous-corps de E , donc tous les corps envisagés seront des sous-corps de E . Si B est une base de transcendance de L/K , c'est encore une base de transcendance de L'/K' puisque L et K' sont algébriquement disjoints sur K ; pour une raison analogue, B est encore une base de transcendance de E sur M , donc E est extension composée de L/K et M/K . Si alors $\mathcal{C}' = (E' , u_1' , u_2')$ est une autre extension composée de L'/K' et M/K' , elle définit une extension composée de L/K , et M/K qui est équivalente à l'extension composée E de L/K et M/K par le théorème 2 . Autrement dit, il existe un isomorphisme f de E sur E' , prolongeant u_1' sur L et u_2' sur M ; comme $L' = L(K')$ et que f et u_1' induisent l'identité sur K' , $f = u_1'$ sur L' , et $\mathcal{C}'$ est équivalente à $\mathcal{C}$, ce qui, en appliquant à nouveau le théorème 2 , prouve que L'/K' est une extension primaire.

<u>Remarques</u> : 1) Supposons que L soit le corps des fractions d'un anneau d'intégrité A contenant K ; comme dans $L \otimes L'$ tout élément est le produit d'un élément inversible et d'un élément de $A \otimes L'$, la condition c) équivaut au fait que, dans $A \otimes L'$, tout diviseur de 0 est nilpotent.

2) le lemme 1 implique le résultat suivant qui a son intérêt :

<u>Si</u> L <u>est une extension de</u> K <u>et si</u> K' <u>est la fermeture algébrique de</u> K <u>dans</u> L , <u>la fermeture algébrique de</u> $K(X_i)_{i \in I}$ <u>dans</u> $L(X_i)_{i \in I}$ <u>est égale à</u> $K'(X_i)_{i \in I}$ <u>lorsque les</u> X_i <u>sont des indéterminées</u>.

$K'(X_i)_{i \in I}$ étant algébrique sur $K(X_i)_{i \in I}$, il suffit de démontrer qu'il est algébriquement fermé dans $L(X_i)_{i \in I}$, et il suffit donc de démontrer notre assertion lorsque $K = K'$. Comme dans la démonstration du lemme 1 , on se ramène au cas d'une seule indéterminée X ; enfin comme L/K est primaire (car K est algébriquement fermée dans L), il suffit de montrer que si $z^{p^f} \in K(X)$, alors $z \in K(X)$. Posons $z = P/Q$ et $z^{p^f} = P'/Q'$ avec $P , Q \in L[X]$ premiers entre eux, Q unitaire, et $P' , Q' \in K[X]$ premiers entre eux et Q' unitaire ; l'identité de Bezout montre que P' et Q' sont premiers entre eux dans $L[X]$, et comme $P'/Q' = P^{p^f}/Q^{p^f}$ et que P^{p^f} et Q^{p^f} sont premiers entre eux et Q^{p^f} unitaire, on en déduit $P' = P^{p^f}$ et $Q' = Q^{p^f}$, ce qui prouve que les coefficients de P et Q sont purement inséparables sur K donc sont dans K .

3.- Extensions régulières.

Nous dirons qu'une extension L/K est régulière si elle est séparable et primaire ; puisque toute sous-extension d'une extension séparable l'est aussi, et comme une extension algébrique $\neq K$ de K ne peut être à la fois séparable et purement inséparable, la condition s'exprime aussi comme suit : une extension L/K est régulière si K est algébriquement fermé dans L , et si L est séparable sur K .

Nous allons d'abord donner un certain nombre de formes équivalentes de cette définition.

Théorème 2.- Si L est une extension du corps K , les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L est extension régulière de K ;

b) si L' est une extension quelconque de K , l'algèbre $L \otimes L'$ est sans diviseurs de 0 ;

b') si $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K , $L \otimes \overline{K}$ est une algèbre sans diviseurs de 0 ;

c) si M est un surcorps quelconque de L , tout sous-corps L' de M contenant K et algébriquement disjoint de L sur K , en est linéairement disjoint ;

c') si $\overline{L}$ est une clôture algébrique de L , L est linéairement disjoint de la clôture algébrique $\overline{K}$ de K contenue dans L .

c) implique c') trivialement (prendre $M = \overline{L}$, $L' = \overline{K}$) ;

b) implique b') trivialement de la même manière ;

c) implique b) : si L' est une extension de K , soit (M , 1 , 1) une extension composée de L et L' , 1 étant l'identité. L et L' étant algébriquement disjoints dans M , sont linéairement disjoints, et par suite le sous-anneau de M engendré par L et L' est isomorphe à $L \otimes L'$ qui est donc sans diviseurs de 0 .

c') implique b') : même raisonnement que dans le cas précédent en prenant $L' = \overline{K}$ et en plongeant M dans $\overline{L}$, ce qui est possible.

a) implique c) : supposons L/K régulière et L algébriquement disjoint sur K d'un sous-corps L' de M ; comme L/K est séparable, $L \otimes L'$ n'a pas d'éléments nilpotents et comme L/K est aussi primaire, on déduit du théorème 1 que $L \otimes L'$ n'a pas de diviseurs de 0 . Or si F est le corps des quotients de $L \otimes L'$, F est de manière évidente une extension composée de L et L' dans laquelle L et L' sont linéairement disjoints. Mais L/K étant primaire, il n'y a qu'un seul type d'extension composée de L et L' , donc L et L' sont linéairement disjoints dans toute extension composée.

C.Q.F.D.

Pour terminer, nous allons indiquer quelques propriétés de permanence des extensions régulières :

Proposition 3 : a) si L/K est une extension régulière, toute sous-extension L'/K de L/K est régulière ;

b) une extension transcendante pure est régulière ;

c) si L/K est une extension régulière et si L' est une extension composée de L et K' , L'/K' est une extension régulière ;

d) si L/K est une extension composée de deux extensions régulières L_1 et L_2 , c'est une extension régulière ;

e) si K est algébriquement clos, toute extension L/K est régulière.

a) résulte de ce que les propriétés d'extension primaire ou séparable se transmettent aux sous-extensions, comme il résulte de la définition de ces notions.

Avant de poursuivre la démonstration, prouvons un lemme :

Lemme 4 : Si E/K est une extension contenant une sous-extension L/K , et si L est linéairement disjoint d'un sous-anneau $A \subset K$ de E , L est linéairement disjoint du corps F des fractions de A .

Supposons les $x_i \in L$ linéairement indépendants sur K ; si l'on a $\sum_i f_i x_i = 0$ $(f_i \in F)$, on peut trouver $a \in A$ tel que $af_i \in A$ pour tout i ; on aura alors $\sum_i (af_i)x_i = 0$, d'où $af_i = 0$ puisque L et A sont linéairement disjoints, et par suite $f_i = 0$ pour tout i , d'où le lemme .

b) soit $L = K(B)$ une extension pure de K , B une base de transcendance de L ; si L est contenu dans le corps M et algébriquement disjoint de L' tel que $K \subset L' \subset M$, les monômes des éléments de B forment une base de $K[B]$

sur K , et aussi de $L'[B]$ sur L' puisque les éléments de B sont algébriquement indépendants sur L' ; donc L' et $K[B]$ sont linéairement disjoints sur K , donc aussi L' et $K(B)$ par le lemme 4 . Ceci prouve que L/K est régulière.

c) si $\bar{L}'$ est clôture algébrique de L' , L et K' sont algébriquement disjoints donc aussi L et la clôture $\bar{K}'$ de K' ; comme L/K est régulière, L et $\bar{K}'$ sont linéairement disjoints, et l'homomorphisme naturel de $L \otimes_K \bar{K}'$ dans $\bar{L}'$ est injectif. Comme $L \otimes_K \bar{K}' \simeq (L \otimes_K K') \otimes_{K'} \bar{K}'$, il en résulte que $\bar{K}'$ est linéairement disjoint de $L[K']$ sur K' , donc aussi de $L(K')$ par le lemme 4. Ceci prouve que L'/K' est régulière.

d) soit M un surcorps de L , et supposons L algébriquement disjoint de L' sur K ; comme L est engendré par L_1 et L_2 qui sont algébriquement disjoints, L_1 est algébriquement disjoint de $K(L' , L_2)$ donc en est linéairement disjoint (L_1/K régulière), donc L_1 est linéairement disjoint de $K[L' , L_2]$; comme L_2/K est régulière, L' et L_2 sont linéairement disjoints sur K , et l'homomorphisme naturel de $L_2 \otimes L'$ sur $K[L' , L_2]$ est injectif ; l'associativité du produit tensoriel et ce qu'on vient de démontrer prouvent que l'homomorphisme naturel de $L_1 \otimes L_2 \otimes L'$ dans M est injectif, donc que L' est linéairement disjoint de $K[L_1 , L_2]$ et donc aussi de L par le lemme 4 .

e) si K est algébriquement clos, toute extension L/K est séparable, et K est évidemment algébriquement fermé dans L , donc L/K est régulière.

Remarque finale : on met facilement la condition c') du théorème 2 sous la forme suivante :

Si L est engendré sur K par des éléments x_i , l'idéal des relations algébriques entre les x_i à coefficients dans $\bar{K}$, a une base formée de polynomes à coefficients dans K .