Über die Existenz eines Kernes für funktionale Operatoren

Von

P. Cartier

1. Einleitung. Es sei $\mathbf{K}$ ein linearer funktionaler Operator; wenn möglich, ist es manchmal vorteilhaft, diesen Operator durch einen Integral-Ausdruck darzustellen:

$$\mathbf{K} g(x) = \int \mathbf{K}(x, y) g(y) \, dy . \tag{1}$$

Dabei wird die Funktion $\mathbf{K}(x, y)$ zweier Variablen der Kern des Operators $\mathbf{K}$ genannt. Wenn man anstatt dieses Operators die Bilinearform $B(f, g) = \int f(x) \cdot \mathbf{K} g(x) dx$ einführt, so ist die Darstellbarkeit von $\mathbf{K}$ durch (1) mit der der Form B mittels der Formel:

$$B(f, g) = \int \int \mathbf{K}(x, y) f(x) g(y) \, dx \, dy \tag{2}$$

gleichbedeutend. Leider ist die Darstellbarkeit (1) nur für eine sehr enge Klasse von Operatoren möglich, und es existieren einfache Operatoren, z. B. der identische Operator, die keiner solchen Umformung fähig sind. Es wurde von Grothendieck [4] gezeigt, daß jede stetige Bilinearform B über L^1-Räumen durch (2) mit einem meßbaren Kern darstellbar ist. Es ist unser Ziel, einen einfachen und elementaren Beweis dafür zu geben.

2. Wir beginnen mit einigen elementaren Betrachtungen über Tensorprodukte funktionaler Räume. Wir betrachten nur reellwertige Funktionen; der Fall komplexwertiger Funktionen ist ganz ähnlich. Es sei X bzw. Y eine beliebige Menge, und F bzw. G ein aus Funktionen auf X bzw. Y bestehender linearer Raum. Für f in F und g in G definieren wir die Funktion $f \otimes g$ auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ durch die Formel:

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x) \cdot g(y) . \tag{3}$$

Wir bezeichnen mit $F \otimes G$ den durch alle diese Funktionen aufgespannten linearen Raum. Es sei $\{f_\alpha\}$ eine Basis für F: dann besteht $F \otimes G$ aus allen Funktionen der Form

$$h = \sum_\alpha f_\alpha \otimes g_\alpha \tag{4}$$

mit beliebigen, bis auf endlich viele verschwindenden, Funktionen g_α aus G; in der Tat ist die Menge dieser Funktionen ein linearer Unterraum von $F \otimes G$ und für $f = \sum_\alpha c_\alpha \cdot f_\alpha$ aus F (c_α beliebige reelle Zahlen) und g aus G ist $f \otimes g = \sum_\alpha f_\alpha \otimes (c_\alpha g)$ von der Form (4).

Die Darstellung (4) einer Funktion h aus $F \otimes G$ ist eindeutig; denn aus $\sum_\alpha f_\alpha \otimes g_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha \otimes g'_\alpha$ folgt

$$\sum_\alpha f_\alpha(x) \cdot (g_\alpha(y) - g'_\alpha(y)) = 0 \qquad (x \in X)$$

für alle y aus Y, also $\sum_\alpha f_\alpha \cdot (g_\alpha(y) - g'_\alpha(y)) = 0$ und endlich $g_\alpha(y) = g'_\alpha(y)$ wegen der linearen Unabhängigkeit der f_α.

Es sei nun B eine Bilinearform auf $F \times G$; wir definieren:

$$\varphi(h) = \sum_\alpha B(f_\alpha, g_\alpha) \tag{5}$$

für h von der Form (4). Es ist klar, daß φ eine Linearform auf $F \otimes G$ ist, die durch die folgende Bedingung gekennzeichnet wird:

$$\varphi(f \otimes g) = B(f, g). \tag{6}$$

3. Ein Annäherungssatz. Wir setzen nun voraus, daß X und Y lokalkompakte (Hausdorffsche) Räume sind. Der lineare Raum F bestehe dann aus allen stetigen Funktionen f auf X, für die die Menge der Punkte x mit $f(x) \neq 0$ relativkompakt sei. Wir definieren in ähnlicher Weise die linearen Räume G bzw. H aus Funktionen auf Y bzw. $X \times Y$. Mit diesen Bezeichnungen gilt das folgende Lemma (siehe [2], S. 89).

Lemma 1. *Es seien $h^{(j)}$ $(1 \leqq j \leqq m)$ endlich viele stetige Funktionen auf $X \times Y$, die außerhalb $K \times L$ null sind, wo K bzw. L eine kompakte Untermenge von X bzw. Y ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n$ aus K und endlich viele positive Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ aus F, so daß*

$$\left| h^{(j)}(x, y) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot h^{(j)}(x_i, y) \right| \leqq \varepsilon \tag{7}$$

für alle x in X, y in Y, $1 \leqq j \leqq m$, gilt.

Es sei a ein Punkt aus K. Da die Funktionen $h^{(j)}$ stetig sind, können wir für einen beliebigen Punkt y aus L offene relativkompakte Umgebungen M_y von a bzw. N_y von y so wählen, daß

$$\left| h^{(j)}(x, y') - h^{(j)}(a, y) \right| \leqq \varepsilon/2 \tag{8}$$

für alle x in M_y, y' in N_y und $1 \leqq j \leqq m$ gilt. Da L kompakt ist, ist diese Menge durch endlich viele offene Mengen N_{y_α} $(1 \leqq \alpha \leqq k)$ überdeckbar; setzen wir:

$$U = \bigcap_{\alpha=1}^{k} M_{y_\alpha},$$

dann ist U eine Umgebung von a, und es gilt:

$$\left| h^{(j)}(x, y) - h^{(j)}(a, y) \right| \leqq \left| h^{(j)}(x, y) - h^{(j)}(a, y_\alpha) \right| + \left| h^{(j)}(a, y) - h^{(j)}(a, y_\alpha) \right| \leqq \varepsilon$$

für x in $U \subset M_{y_\alpha}$ und y in N_{y_α}. Da $h^{(j)}(x,y) = 0$ für $y \notin L$, haben wir für $j = 1, 2, \ldots, m$:

$$\left| h^{(j)}(x, y) - h^{(j)}(a, y) \right| \leqq \varepsilon \qquad (x \in U,\ y \in Y). \tag{9}$$

Da K relativkompakt ist, können wir endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n$ aus K und für jeden Punkt x_i eine relativkompakte Umgebung U_i so wählen, daß K durch die U_i überdeckt wird und

$$(10) \qquad |h^{(j)}(x, y) - h^{(j)}(x_i, y)| \leqq \varepsilon \qquad (x \in U_i,\ y \in Y)$$

für $j = 1, 2, \dots, m$ gilt. Da die offenen Mengen $U_1, \dots, U_n$ die kompakte Menge K überdecken, so existiert bekanntlich ([1], S. 89) eine Einheitszerlegung, nämlich positive stetige Funktionen $f_1, \dots, f_n$, deren Summe auf K identisch gleich eins ist, mit der Eigenschaft, daß f_i außerhalb U_i verschwindet für $i = 1, 2, \dots, n$ und daß $f_1 + \cdots + f_n \leqq 1$ auf X. Durch Multiplizieren mit $f_i(x)$ ergibt die Ungleichung (10)

$$(11) \qquad |f_i(x) \cdot h^{(j)}(x, y) - f_i(x) \cdot h^{(j)}(x_i, y)| \leqq \varepsilon \cdot f_i(x)$$

für alle (x, y) in $X \times Y$. Die Formel (7) folgt aus dieser Ungleichung durch Summieren über $i = 1, 2, \dots, n$, w.z.b.w.

4. Wir wollen eine Linearform φ auf einem Funktionenraum T *positiv* nennen, wenn $\varphi(f) \geqq 0$ aus $f \geqq 0$ folgt. Es seien nun positive Linearformen μ auf F und ν auf G gegeben. Das folgende Lemma ist wohlbekannt und beruht auf dem Annäherungssatz (Integration auf einem Produktraum):

Lemma 2. *Es existiert auf H eine und nur eine positive Linearform π mit der Eigenschaft*

$$(12) \qquad \pi(f \otimes g) = \mu(f)\nu(g) \qquad (f \in F,\ g \in G).$$

Es sei h aus H, null außerhalb $K \times L$ (Bezeichnungen wie im Lemma 1). Für x aus X definieren wir die Funktion h_x aus G durch $h_x(y) = h(x, y)$; es existiert nach dem Urysohnschen Satz eine positive Funktion v aus G mit $v(y) = 1$ für y aus L. Aus dem Lemma 1 folgt die Ungleichung:

$$(13) \qquad \Big| h_x(y) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot h_{x_i}(y) \Big| \leqq \varepsilon \cdot v(y) \qquad (y \in Y),$$

und, da die Linearform ν positiv ist, folgt sofort

$$(14) \qquad \Big| \nu(h_x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot \nu(h_{x_i}) \Big| \leqq \varepsilon \cdot \nu(v).$$

Wir setzen $(\zeta h)(x) = \nu(h_x)$ für x aus X; da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt aus (14), daß ζh ein gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist; folglich ist ζh stetig. Für x aus $X - K$ ist $h_x = 0$ und folglich $(\zeta h)(x) = 0$; die Funktion ζh ist in F enthalten, und die Zahl $\pi(h) = \mu(\zeta h)$ ist definiert. Es ist klar, daß π eine positive Linearform auf H ist; für $h = f \otimes g$ ist $h_x = f(x) \cdot g$, dann gilt $(\zeta h)(x) = \nu(h_x) = f(x) \cdot \nu(g)$, und endlich $\pi(h) = \mu(\zeta h) = \mu(f) \cdot \nu(g)$. Damit ist der Existenzbeweis vollendet.

Es seien nun zwei positive Linearformen π_1 und π_2 auf H gegeben, die der Bedingung

$$\pi_i(f \otimes g) = \mu(f) \cdot \nu(g) \qquad (i = 1, 2)$$

genügen. Sei h aus H, null außerhalb $K \times L$, wo K und L relativkompakt sind; es existieren (Urysohnscher Satz) eine Funktion u bzw. v aus F bzw. G mit $u(x) = v(y) = 1$ für alle (x, y) in $K \times L$. Aus dem Lemma 1 folgt die Existenz einer

Funktion h' aus $F \otimes G$ mit $|h-h'| \leqq \varepsilon \cdot (u \otimes v)$, wo $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt ist. Damit gilt:

$$\pi_1(h') = \pi_2(h'), \quad |\pi_i(h) - \pi_i(h')| \leqq \varepsilon \mu(u) \cdot \nu(v) \qquad (i = 1, 2).$$

Es folgt

$$|\pi_1(h) - \pi_2(h)| \leqq 2 \varepsilon \mu(u) \nu(v),$$

und da ε beliebig klein ist, haben wir endlich $\pi_1(h) = \pi_2(h)$, w. z. b. w.

5. Der Hauptsatz.

Satz 1. *Es sei eine Bilinearform B auf $F \times G$ gegeben, die der folgenden Einschränkung genügt:*

$$|B(f, g)| \leqq c \mu(|f|) \nu(|g|) \qquad (f \in F, g \in G), \tag{15}$$

wo $c \geqq 0$ eine passende Konstante ist. Für die Linearform φ auf $F \otimes G$, die $\varphi(f \otimes g) = B(f, g)$ erfüllt, gilt die Ungleichung:

$$|\varphi(h)| \leqq c \cdot \pi(|h|) \qquad (h \in F \otimes G), \tag{16}$$

wo π wie im Lemma 2 bestimmt ist.

Die Existenz von φ wurde in 2. bewiesen. Es sei nun h beliebig aus H; wir benutzen das Lemma 1 im Fall $h^{(1)} = h$ und $h^{(2)} = |h|$; wenn wir $h_i(y) = h(x_i, y)$ setzen, folgt die Ungleichung:

$$\Big| |h| - \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot |h_i| \Big| \leqq \varepsilon \tag{17}$$

aus dem Lemma 1 (Bezeichnungen wie dort). Ist u eine positive Funktion aus F, $u \equiv 1$ auf K, und v eine positive Funktion aus G, $v \equiv 1$ auf L, so können wir die Formel (17) mit $u \otimes v$ multiplizieren und dann π ausüben; es ergibt sich

$$\Big|\pi(|h|) - \sum_{i=1}^{n} \mu(u f_i) \cdot \nu(|h_i|)\Big| \leqq \varepsilon \cdot \mu(u) \cdot \nu(v). \tag{18}$$

Es sei nun h aus $F \otimes G$ vorausgesetzt; wir können $h = \sum_{j=1}^{p} a_j \otimes b_j$ mit a_j aus F und b_j aus G schreiben. Wir wenden nun auf die b_j einen bekannten „Orthogonalisierungsprozeß" an; der Beweis verläuft folgendermaßen. Es seien $b'_1, \ldots, b'_r$ aus G und $y_1, \ldots, y_r$ aus Y mit der Eigenschaft:

$$b'_k(y_l) = \delta_{kl} \quad \text{(Kroneckersymbol)} \qquad (1 \leqq k, l \leqq r) \tag{19}$$

konstruiert, und es seien $b_1, \ldots, b_q$ Linearkombinationen der b'_k. Es sei $q < p$; dann setzen wir

$$d = b_{q+1} - \sum_{k=1}^{q} b_{q+1}(y_k) \cdot b'_k;$$

es gilt $d(y_1) = \cdots = d(y_r) = 0$ und wenn $d = 0$, so ist b_{q+1} eine Linearkombination der Funktionen $b'_1, \ldots, b'_r$; wenn $d \neq 0$, so existiert y_{r+1} in Y mit $d(y_{r+1}) \neq 0$, und in diesem Falle setzen wir $b'_{r+1} = d/d(y_{r+1})$; dann ist b_{q+1} eine Linearkombination der Funktionen $b'_1, \ldots, b'_r, b'_{r+1}$. Durch diesen Induktionsprozeß erhalten wir endlich $q = p$. Damit wird

$$h = \sum_{k=1}^{r} a_k' \otimes b_k'$$

und

$$h(x, y_l) = \sum_k a_k'(x) \cdot b_k'(y_l) = \sum_k a_k'(x) \cdot \delta_{kl} = a_l'(x).$$

Wir können diese Ergebnisse so zusammenfassen:

$$h(x, y) = \sum_{k=1}^{r} h(x, y_k) b_k'(y). \tag{20}$$

Für $j = 1$ (wir erinnern an $h^{(1)} = h$ und $h^{(2)} = |h|$) können wir die Formel (7) mit $u(x)$ multiplizieren; wir können schreiben:

$$h(x, y) = \sum_{k=1}^{r} (u f_i)(x) \cdot h(x_i, y) + h'(x, y), \tag{21}$$

wo $|h'(x, y)| \leqq \varepsilon u(x)$ überall auf $X \times Y$ gilt. Offenbar ist h' eine Funktion in $F \otimes G$ von der Form $h' = \sum_k a_k'' \otimes b_k'$, und, wie in der Formel (20), beweisen wir:

$$h'(x, y) = \sum_{k=1}^{r} h'(x, y_k) \cdot b_k'(y).$$

Wir setzen $h_k'(x) = h'(x, y_k)$, so daß $|h_k'| \leqq \varepsilon \cdot u$ für $k = 1, 2, \ldots, r$ gilt. Dann ist

$$|\varphi(h')| = |\sum_k B(h_k', b_k')| \leqq c \cdot \sum_k \mu(|h_k'|) \cdot \nu(|b_k'|) \leqq \varepsilon c \cdot \sum_k \mu(u) \cdot \nu(b_k').$$

Andererseits:

$$|\varphi(h)| = |\sum_k B(u f_i, h_i) + \varphi(h')| \leqq c \cdot \sum_k \mu(u f_i) \cdot \nu(|h_i|) + \varepsilon c \mu(u) \cdot \sum_k \nu(b_k'),$$

und nach (18) gilt endlich

$$|\varphi(h)| \leqq c \cdot \pi(|h|) + c \cdot \varepsilon \mu(u)[\nu(v) + \sum_k \nu(b_k')].$$

Da nun die Funktionen u, v, b_k' nur von h und nicht von ε abhängen und $\varepsilon > 0$ beliebig klein ist, folgt $|\varphi(h)| \leqq c \cdot \pi(|h|)$, w. z. b. w.

6. Bilinearformen über L^1-Räumen. Wir werden im folgenden die Bourbakische Integrationstheorie benutzen. Wir erinnern nur an einige Punkte; für Einzelheiten vgl. [2] und [3]. Eine positive Linearform μ auf F heißt ein Radonsches Maß; die numerischen meßbaren Funktionen sind durch das Lusinsche Kriterium definiert; die beschränkten meßbaren Funktionen bilden den Vektorraum $\mathscr{L}^\infty = \mathscr{L}^\infty(X, \mu)$, der mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ versehen wird; dabei wird $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ ein Banachscher Raum. Man definiert den Vektorraum $\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(X, \mu)$ der integrierbaren Funktionen; für f in $\mathscr{L}^1$ ist das Integral $\int f(x)\, d\mu(x)$ definiert; der Raum F ist in $\mathscr{L}^1$ enthalten und $\mu(f) = \int f(x)\, d\mu(x)$ für f aus F; man setzt

$$\|f\|_1 = \int |f(x)|\, d\mu(x) \text{ für } f \text{ aus } \mathscr{L}^1;$$

mit dieser Bezeichnung existiert für jedes f aus $\mathscr{L}^1$ eine Folge $\{f_n\}$ aus F mit $\lim \|f - f_n\|_1 = 0$. Für f in $\mathscr{L}^1$ und g in $\mathscr{L}^\infty$ ist fg in $\mathscr{L}^1$; in diesem Fall setzen wir

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)\, g(x)\, d\mu(x).$$

Dann gilt die Ungleichung:

$$|\langle f, g\rangle| \leqq \|f\|_1 \|g\|_\infty. \tag{22}$$

Es sei umgekehrt λ eine Linearform auf $\mathscr{L}^1$, die der Ungleichung $|\lambda(f)| \leqq c \cdot \|f\|_1$ für eine passende Konstante c und alle f in $\mathscr{L}^1$ genügt; dann existiert eine Funktion g aus $\mathscr{L}^\infty$, so daß $\lambda(f) = \langle f, g\rangle$ für alle f in $\mathscr{L}^1$ und $\|g\|_\infty \leqq c$. Man hat den folgenden Eindeutigkeitssatz: es sei $\lambda(f) = \langle f, g'\rangle$ mit g' in $\mathscr{L}^\infty$, dann ist die Menge $N = \{x \in K \mid g(x) \neq g'(x)\}$ vom Maße $\mu(N)$ gleich Null für alle kompakten Untermengen K aus X; wir sagen in diesem Falle, daß g und g' ungefähr überall gleich sind. Dieselben Bezeichnungen gelten für Y bzw. $X \times Y$ mit dem Radonschen Maß ν bzw. π.

Satz 2. *Es sei B eine Bilinearform auf $\mathscr{L}^1(X, \mu) \times \mathscr{L}^1(Y, \nu)$, die der Bedingung $|B(f, g)| \leqq c \cdot \|f\|_1 \|g\|_1$ für eine passende Konstante c und alle f in $\mathscr{L}^1(X, \mu)$ bzw. g in $\mathscr{L}^1(Y, \nu)$ genügt. Dann gibt es eine Funktion $\mathbf{K}$ in $\mathscr{L}^\infty(X \times Y, \pi)$ mit den Eigenschaften:*

a) *Es gilt $|\mathbf{K}(x, y)| \leqq c$ überall auf $X \times Y$.*

b) *Es gilt die Formel:*

$$B(f, g) = \iint \mathbf{K}(x, y)\, f(x)\, g(y)\, d\pi(x, y) \tag{23}$$

für alle f in $\mathscr{L}^1(X, \mu)$ und g in $\mathscr{L}^1(Y, \nu)$.

Da $F \subset \mathscr{L}^1(X, \mu)$ und $G \subset \mathscr{L}^1(Y, \nu)$ ist, gibt es eine Linearform φ auf $F \otimes G$ mit den folgenden Eigenschaften (siehe Satz 1):

$$B(f, g) = \varphi(f \otimes g) \qquad (f \in F, g \in G), \tag{24}$$

$$|\varphi(h)| \leqq c \cdot \pi(|h|) \qquad (h \in F \otimes G). \tag{25}$$

Es sei h aus $\mathscr{L}^1(X \times Y, \pi)$, und es sei $\bar{\varepsilon} > 0$ beliebig. Dann gibt es ein h_1 in H mit $\|h - h_1\|_1 \leqq \bar{\varepsilon}/2$; wir wählen kompakte Mengen $K \subset X$ und $L \subset Y$, so daß h_1 außerhalb $K \times L$ gleich Null ist; wir wählen außerdem positive Funktionen u aus F bzw. v aus G, so daß $u \equiv 1$ auf K bzw. $v \equiv 1$ auf L gilt. Wir können nun den Satz 1 in dem Falle $m = 1$, $h^{(1)} = h_1$ und $\varepsilon = \bar{\varepsilon}/2\, \mu(u)\, \nu(v)$ anwenden; wenn wir $h_1(x_i, y) = g_i(y)$ setzen, und die Formel (7) mit $u(x)\, v(y)$ multiplizieren, ergibt sich:

$$\left| h_1'(x, y) - \sum_{i=1}^{n} (u f_i)(x) \cdot (v g_i)(y) \right| \leqq \varepsilon \cdot u(x)\, v(y) \tag{26}$$

(es ist $h_1'(x, y)\, u(x)\, v(y) = h_1'(x, y)$ überall auf $X \times Y$, da h_1' null außerhalb $K \times L$ und $u \otimes v \equiv 1$ auf $K \times L$ ist). Die Funktion $h' = \sum_{i=1}^{n} (u f_i) \otimes (v g_i)$ ist aus $F \otimes G$, und nach (26) ergibt sich:

$$\|h_1' - h'\|_1 = \pi(|h_1' - h'|) \leqq \varepsilon \cdot \pi(u \otimes v) = \varepsilon \cdot \mu(u) \cdot \nu(v) = \bar{\varepsilon}/2.$$

Endlich gilt $h' \in F \otimes G$, $\|h - h'\|_1 \leqq \bar{\varepsilon}$.

Für jede Funktion h aus $\mathscr{L}^1(X \times Y, \pi)$ existiert also eine Folge $\{h_n\}$ aus $F \otimes G$ mit der Eigenschaft $\lim \| h - h_n \|_1 = 0$; dann folgt

$$\lim_{m,n \to \infty} \pi(|h_m - h_n|) = \lim_{m,n \to \infty} \| h_m - h_n \|_1 = 0,$$

und nach (25) gilt:

$$\lim_{m,n \to \infty} |\varphi(h_m) - \varphi(h_n)| = 0.$$

Nach dem Cauchyschen Konvergenzsatz existiert der Limes $a = \lim \varphi(h_n)$. Unter Benutzung von (25) ergibt sich sofort, daß a nur von h und nicht von der speziellen Folge $\{h_n\}$ abhängt; setzen wir $\varphi'(h) = a$, so ist eine Linearform φ' auf $\mathscr{L}^1(X \times Y, \pi)$ als Fortsetzung von φ definiert, die $|\varphi'(h)| \leqq c \cdot \pi(|h|) = c \cdot \| h \|_1$ erfüllt. Es gibt dann eine Funktion K aus $\mathscr{L}^\infty(X \times Y, \pi)$, so daß $\varphi'(h) = \langle h, \mathbf{K} \rangle$ für alle h in $\mathscr{L}^1(X \times Y, \pi)$ gilt. Setzen wir nun $h = f_0 \otimes g_0$ mit f_0 in F und g_0 in G, so ergibt sich:

$$B(f_0, g_0) = \varphi(f_0 \otimes g_0) = \varphi'(f_0 \otimes g_0) = \langle f_0 \otimes g_0, \mathbf{K} \rangle.$$

Es seien nun f aus $\mathscr{L}^1(X, \mu)$ bzw. g aus $\mathscr{L}^1(Y, \nu)$; dann ist $f \otimes g$ aus $\mathscr{L}^1(X \times Y, \pi)$ (Lebesgue-Fubinischer Satz), und man kann Folgen $\{f_n\}$ aus F, bzw. $\{g_n\}$ aus G wählen, so daß $\lim\limits_{n \to \infty} \| f - f_n \|_1 = 0$, bzw. $\lim\limits_{n \to \infty} \| g - g_n \| = 0$ gilt. Daraus folgt

$$\lim_{n \to \infty} \| f \otimes g - f_n \otimes g_n \| = 0$$

nach dem Lebesgue-Fubinischen Satz, und hieraus sofort

$$0 = \lim_{n \to \infty} [\varphi'(f \otimes g) - \varphi'(f_n \otimes g_n)] = \lim_{n \to \infty} [\langle f \otimes g, \mathbf{K} \rangle - B(f_n, g_n)].$$

Nach der Voraussetzung $|B(f, g)| \leqq c \cdot \| f \|_1 \, \| g \|_1$ gilt dann

$$\lim_{n \to \infty} [B(f_n, g_n) - B(f, g)] = 0,$$

und schließlich $\langle f \otimes g, \mathbf{K} \rangle = B(f, g)$, das heißt die Formel (23) in anderer Schreibweise, w. z. b. w.

7. Der Kernsatz. Die Bezeichnungen X, Y, μ, ν und π seien wie oben. Eine meßbare Funktion $\mathbf{K}$ aus $\mathscr{L}^\infty(X \times Y, \pi)$ heißt ein meßbarer Kern über $X \times Y$; für x in X definieren wir die Funktion $\mathbf{K}_x$ auf Y durch die Formel $\mathbf{K}_x(y) = \mathbf{K}(x, y)$. Aus dem Lusinschen Kriterium folgt, daß die Funktion $\mathbf{K}_x$ bezüglich ν meßbar ist; ferner ist die Ungleichung $\| \mathbf{K}_x \|_\infty \leqq \| \mathbf{K} \|_\infty$ klar. Für eine beliebige Funktion g aus $\mathscr{L}^1(Y, \nu)$ setzen wir:

$$\mathbf{K} g(x) = \langle \mathbf{K}_x, g \rangle = \int \mathbf{K}(x, y)\, g(y)\, d\nu(y). \tag{27}$$

Es sei K eine kompakte Menge in X; es sei u die Funktion, die identisch gleich eins auf K und gleich null außerhalb K ist; diese Funktion u ist in $\mathscr{L}^1(X, \mu)$ enthalten; nach dem Lebesgue-Fubinischen Satz ist die Funktion $u \otimes g$, und damit $h = (u \otimes g) \cdot \mathbf{K}$ aus $\mathscr{L}^1(X \times Y, \pi)$; ferner gilt:

$$u(x) \cdot \mathbf{K} g(x) = \int h(x, y)\, d\nu(y),$$

und nach demselben Satz ist $u \cdot \mathbf{K}g$ aus $\mathscr{L}^1(X, \mu)$; daraus folgt, daß die Funktion $u \cdot \mathbf{K}g$ meßbar ist, und, da $\mathbf{K}g$ mit $u \cdot \mathbf{K}g$ auf K identisch ist, ist die Funktion $\mathbf{K}g$ auf K meßbar; da sich das Lusinsche Meßbarkeitskriterium auf eine beliebige kompakte Menge K in X beruft, ist $\mathbf{K}g$ meßbar. Nach (27) gilt dann $\mathbf{K}g \in \mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ und $\|\mathbf{K}g\|_\infty \leqq \|K\|_\infty \|g\|_1$. Es ist klar, daß die Abbildung $g \to \mathbf{K}g$ von $\mathscr{L}^1(Y, \nu)$ nach $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ linear ist. Umgekehrt gilt der Kernsatz:

Satz 3. *Es sei T eine lineare Abbildung von $\mathscr{L}^1(Y, \nu)$ nach $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$, die der Ungleichung $\|T(g)\|_\infty \leqq c \cdot \|g\|_1$ für eine passende Konstante c und irgendein g aus $\mathscr{L}^1(Y, \nu)$ genügt. Dann gibt es einen meßbaren Kern $\mathbf{K}$ auf $X \times Y$, so daß $T(g)$ und $\mathbf{K}g$ für jedes g aus $\mathscr{L}^1(Y, \nu)$ ungefähr überall auf X übereinstimmen. Ferner können wir $\|K\|_\infty \leqq c$ annehmen.*

Wir definieren eine Bilinearform B auf $\mathscr{L}^1(X, \mu) \times \mathscr{L}^1(Y, \nu)$ durch $B(f, g) = \langle f, T(g)\rangle$; dann gilt $|B(f, g)| \leqq \|f\|_1 \|T(g)\|_\infty \leqq c \cdot \|f\|_1 \|g\|_1$. Nach dem Satz 2 existiert ein meßbarer Kern $\mathbf{K}$ auf $X \times Y$ mit $\|\mathbf{K}\|_\infty \leqq c$ und $B(f,g) = \langle f \otimes g, K\rangle$. Nach dem Lebesgue-Fubinischen Satz gilt dann:

$$\begin{aligned}\langle f, T(g)\rangle = B(f, g) &= \langle f \otimes g, K\rangle = \int f(x) \cdot K(x, y)\, g(y)\, d\pi(x, y) = \\ &= \int f(x)\, d\mu(x) \int K(x, y)\, g(y)\, d\nu(y) = \int f(x)\, \mathbf{K}g(x)\, d\mu(x) = \\ &= \langle f, \mathbf{K}g\rangle .\end{aligned}$$

Daraus folgt $T(g)(x) = \mathbf{K}g(x)$ ungefähr überall auf X, wie oben behauptet, w.z.b.w.

Bemerkung. Es sei $\mathscr{N}$ der Raum aller Funktionen f' in $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$, die $\langle f, f'\rangle = 0$ für alle f in $\mathscr{L}^1(X, \mu)$ erfüllen; wie gewöhnlich setzen wir $L^\infty = \mathscr{L}^\infty/\mathscr{N}$ (Banachscher Faktorraum); für eine Nebenklasse $\mathfrak{f}'$ in L^∞ hängt die Zahl $\langle f, f'\rangle$ für f in $\mathscr{L}^1(X, \mu)$ nicht von der speziellen Funktion f' in $\mathfrak{f}'$ ab; wir setzen in diesem Falle $\langle\langle f, \mathfrak{f}'\rangle\rangle = \langle f, f'\rangle$ und erhalten eine Bilinearform über $\mathscr{L}^1(X, \mu) \times L^\infty(X, \mu)$. Der oben gegebene Beweis ist für eine stetige lineare Abbildung T von $\mathscr{L}^1(Y, \nu)$ nach $L^\infty(X, \mu)$ gültig; es existiert dann ein meßbarer Kern $\mathbf{K}$, so daß $T(g)$ die Nebenklasse von $\mathbf{K}g$ für jedes g in $\mathscr{L}^1(Y, \nu)$ ist. Daraus folgt, daß jede stetige lineare Abbildung von $\mathscr{L}^1(X, \nu)$ nach $L^\infty(X, \mu)$ durch $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ faktorisiert werden kann.

Literaturverzeichnis

[1] N. Bourbaki, Topologie Générale, chapitre IX. Paris 1958.
[2] N. Bourbaki, Intégration, chapitres I à IV. Paris 1952.
[3] N. Bourbaki, Intégration, chapitre V. Paris 1956.
[4] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc., Nr. 16 (1955).

Eingegangen am 14. 11. 1962

Anschrift des Autors:
P. Cartier
25 Quai Rouget de l'Isle
Strasbourg (B.R.), Frankreich