CARTIER, P.
Math. Zeitschr. 84, 93—100 (1964)

Über einige Integralformeln in der Theorie der quadratischen Formen

Von
P. CARTIER

1. Einleitung. In einer bald erscheinenden Arbeit [5] hat A. WEIL die Theorie der Jakobischen Thetafunktionen auf beliebige kommutative lokalkompakte Gruppen übertragen. Für diese verallgemeinerten Thetafunktionen gelten die üblichen Reziprozitätsformeln; als Korollar dieser Reziprozität ergibt sich ein Ausdruck für die Fourier-Transformierte eines Charakters zweiten Grades (diese Funktionen verallgemeinern die Exponentialfunktionen von imaginären quadratischen Formen). In der vorliegenden Note werden wir diese Fourier-Transformierten direkt berechnen. Zusammen mit dem zweiten Kapitel des Weilschen Berichtes liefert unsere Beweisführung einen vollständigen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes für beliebige Zahlkörper. Eine Ausdehnung der Weilschen Ergebnisse wird im Satz 3 geliefert.

2. Im folgenden sind G und G^* zwei (Hausdorffsche) lokalkompakte additive Gruppen; wir setzen voraus, daß G^* die Charaktergruppe von G (im Sinne PONTRJAGINS) sei, der Wert des Charakters $x^* \in G^*$ für das Element $x \in G$ wird als $\langle x, x^* \rangle$ geschrieben. Wir wählen die Haarschen Masse dx auf G und dx^* auf G^* so, daß die Fouriersche Umkehrungsformel mit dem Faktor 1 gilt; genauer sei $A(G)$ die lineare Klasse aller auf G stetigen und (absolut-) integrierbaren Funktionen u, deren Fourier-Transformierte

$$u^*(x^*) = \int_G \langle x, x^* \rangle \, u(x) \, dx \tag{1}$$

(die notwendigerweise auf G^* stetig ist) auch integrierbar ist; für u aus $A(G)$ gilt dann

$$u(x) = \int_{G^*} \overline{\langle x, x^* \rangle} \, u^*(x^*) \, dx^*. \tag{2}$$

Mit u gehört auch die Komplexkonjugierte $\bar{u}$ zu $A(G)$.

Es seien g und h auf G stetige Funktionen; wir nehmen an, daß entweder beide Funktionen integrierbar sind, oder die eine integrierbar und die andere beschränkt ist; das Faltungsprodukt $g*h$ ist dann durch die wohlbekannte Formel

$$(g*h)(x) = \int_G g(x-y) \cdot h(y) \, dy \tag{3}$$

definiert. Im ersten Falle ist $g*h$ stetig und integrierbar, im zweiten Falle dagegen stetig und beschränkt. Wir bezeichnen mit $A'(G)$ die Klasse der Funktionen $g*h$, wo g und h stetig mit kompaktem Träger sind; diese Klasse ist in $A(G)$ enthalten und läßt die Translationen zu. Für jeden Charakter χ auf G

gilt die Formel

$$\chi\cdot(g*h)=(\chi\cdot g)*(\chi\cdot h),$$

und daher ist die Klasse $A'(G)$ gegenüber Multiplikation mit χ invariant (siehe dafür [*2*], [*3*]).

3. Es sei f eine komplexwertige Funktion auf G. Nach A. WEIL [*5*] nennt man f einen *nichtausgearteten Charakter zweiten Grades*, wenn f stetig vom Betrag 1 ist und ein Isomorphismus ρ_f von G auf G^* mit der Eigenschaft [1])

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\cdot\langle x,\rho_f\, y\rangle$$

existiert. Ein solcher Isomorphismus ρ_f ist durch f eindeutig bestimmt. Mit der Definition

$$B_f(x,y)=\langle x,\rho_f\, y\rangle, \tag{4}$$

ist B_f eine stetige *symmetrische* Funktion auf $G\times G$, die den folgenden Gesetzen genügt

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)\cdot B_f(x,y), \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &B_f(x+x',y)=B_f(x,y)\cdot B_f(x',y) && (6)\\ &B_f(x,y+y')=B_f(x,y)\cdot B_f(x,y') && (7)\end{aligned}\right\}\ \text{„Bilinearität“}.$$

Da ρ_f ein Isomorphismus von G auf G^* ist, gibt es nach dem Eindeutigkeitssatz für das Haarsche Maß eine wohlbestimmte Konstante $|\rho_f|>0$, so daß

$$\int_{G^*} F(x^*)\,dx^*=|\rho_f|\int_G F(\rho_f\, x)\,dx \tag{8}$$

für jede auf G^* integrierbare Funktion F gilt. Man definiert auf G ein neues Haarsches Maß durch $d_f x=|\rho_f|^{\frac{1}{2}}dx$ und das modifizierte Faltungsprodukt $g*_f h$ durch Ersetzung von dx durch $d_f x$ in (3). Endlich definiert man für jedes u aus $A(G)$ die Funktion $T_f u$ durch

$$(T_f u)(y)=\int_G u(x)\cdot B_f(x,y)\,d_f x=|\rho_f|^{\frac{1}{2}}\,u^*(\rho_f\, y). \tag{9}$$

Da ρ_f ein Isomorphismus ist, ist die Funktion $T_f u$ auf G stetig und integrierbar; wir bestimmen nun die Fourier-Transformierte v von $T_f u$

$$\begin{aligned}
|\rho_f|^{\frac{1}{2}}\,v(\rho_f\, z)&=|\rho_f|^{\frac{1}{2}}\int_G (T_f u)(y)\,\langle y,\rho_f\, z\rangle\,dy\\
&=|\rho_f|\int_G u^*(\rho_f\, y)\,\langle y,\rho_f\, z\rangle\,dy && \text{nach (9)}\\
&=|\rho_f|\int_G u^*(\rho_f\, y)\,\langle z,\rho_f\, y\rangle\,dy && \text{(Symmetrie von } B_f)\\
&=\int_{G^*} u^*(y^*)\,\langle z,y^*\rangle\,dy && \text{nach (8)}\\
&=u(-z) && \text{nach (2)}.
\end{aligned}$$

[1]) Unter einem Isomorphismus schlechthin verstehen wir einen topologischen und algebraischen Isomorphismus von topologischen Gruppen.

Folglich ist v integrierbar und $T_f u \in A(G)$; ferner hat man gezeigt[2])

$$(T_f T_f u)(z) = u(-z).$$

Also ist T_f ein Automorphismus von $A(G)$ und der zu T_f reziproke Automorphismus $\bar{T}_f$ ist durch

$$(10) \qquad (\bar{T}_f u)(y) = (T_f u)(-y)$$

gegeben; wegen $B_f(x, -y) = \overline{B_f(x, y)}$ gilt nach (9) auch die Formel $\overline{T_f u} = \bar{T}_f \bar{u}$.

4. Der folgende Satz entspricht Satz 2, Nr. 14 in WEILs Bericht [5]:

Satz 1. *Für jeden nichtausgearteten Charakter zweiten Grades f auf G gibt es eine komplexe Konstante $\gamma(f)$ vom Betrag 1 mit der Eigenschaft*

$$(11) \qquad \int_G f(x) \cdot (T_f u)(x)\, d_f x = \gamma(f) \int_G u(x) \overline{f(x)}\, d_f x \qquad (u \text{ aus } A(G)).$$

[Die Funktion f ist stetig und beschränkt, und die Funktionen u und $T_f u$ sind integrierbar für jedes u aus $A(G)$; damit sind die Integrale in (11) sinnvoll.]

Es seien g und h stetige Funktionen auf G mit kompaktem Träger. Die Funktion $u = g *_f h$ ist in $A'(G)$ enthalten und es gilt

$$\int (u \cdot \bar{f}) = \int_G g(x)\, d_f x \int_G \overline{f(x+y)}\, h(y)\, d_f y.$$

Wenn die Gleichung $\int (u \cdot \bar{f}) = 0$ für alle u aus $A'(G)$ gültig wäre, so hätte man $\int_G \overline{f(x+y)}\, h(y)\, d_f y = 0$ für alle h und schließlich $f = 0$. Es existiert folglich u_0 aus $A'(G)$ mit $\int (u_0 \cdot \bar{f}) \neq 0$. Wir setzen $v_0(x) = u_0(-x) \cdot \overline{f(-x)}$.

Es sei u aus $A(G)$ beliebig, und es sei $v(x) = u(-x) \cdot \overline{f(-x)}$; da $\overline{f(x)} \cdot f(x) = 1$, folgt dann $v(-x) \cdot f(x) = u(x)$ und v ist eine stetige integrierbare Funktion. Es gilt

$$\begin{aligned}(f *_f v)(x) &= \int_G f(x+y) \cdot v(-y)\, d_f y = \int_G f(x) \cdot B_f(x, y) \cdot f(y)\, v(-y)\, d_f y \\ &= f(x) \cdot \int_G B_f(x, y)\, u(y)\, d_f y = f(x) \cdot (T_f u)(x),\end{aligned}$$

und somit ist die Funktion $f *_f v = f \cdot T_f u$ auf G stetig und integrierbar; außerdem

$$\int v = \int_G v(-x) \cdot d_f x = \int (u \cdot \bar{f}).$$

Da auch u_0 in $A(G)$ enthalten ist, sieht man entsprechend, daß $f *_f v_0 = f \cdot T_f u_0$ stetig und integrierbar ist, und es gilt $\int v_0 = \int (u_0 \cdot \bar{f}) \neq 0$; man setzt

$$\gamma(f) = \frac{\int (f *_f v_0)}{\int v_0}.$$

---

2) Das Haarsche Maß $d_f x$ ist dadurch bestimmt, daß die oben geschriebene Formel für $T_f T_f u$ gilt. Folglich hängt $d_f x$ nur von f, aber nicht von dx ab. Der Einfachheit halber werden wir oft $\int h$ oder $\int_G h$ anstatt $\int_G h(x) d_f x$ schreiben.

Da die Gruppe G kommutativ ist, f beschränkt und v, v_0 integrierbar sind, folgt sofort $v_0 *_f (f *_f v) = v *_f (f *_f v_0)$; aus der Eigenschaft $\int (g *_f h) = \int g \cdot \int h$ für zwei stetige integrierbare Funktionen g und h ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\int v_0 \cdot \int (f\ \ T_f u) &= \int v_0 \cdot \int (f *_f v) = \int [v_0 *_f (f *_f v)] = \int [v *_f (f *_f v_0)] \\ &= \int v \cdot \int (f *_f v_0) = \gamma(f) \int v_0 \cdot \int v = \int v_0 \cdot \gamma(f) \cdot \int (u \cdot \bar{f}).\end{aligned}$$

Da $\int v_0 \neq 0$, entsteht (11) durch Dividieren durch $\int v_0$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\gamma(f)$ vom Betrag 1 ist. Dazu ersetzen wir u durch $\overline{T_f u_0} = \bar{T}_f \bar{u}_0$ in (11); es gilt $T_f u = T_f \bar{T}_f \bar{u}_0 = \bar{u}_0$ und daher

$$\begin{aligned}\int (u_0 \cdot \bar{f}) = \int (\overline{T_f u} \cdot \bar{f}) = \overline{\int (T_f u \cdot f)} = \overline{\gamma(f) \int (u \cdot \bar{f})} & \qquad \text{nach (11)} \\ = \overline{\gamma(f)} \int (T_f u_0 \cdot f) & \\ = \overline{\gamma(f)}\, \gamma(f) \int (u_0 \cdot \bar{f}) & \qquad \text{nach (11) mit } u_0 .\end{aligned}$$

Da $\int (u_0 \cdot \bar{f}) \neq 0$, gilt endlich $\overline{\gamma(f)} \cdot \gamma(f) = 1$, w.z.b.w.

Man kann leicht die Formel (11) so umformen, daß sie mit einer Parsevalschen Gleichung identisch wird. Man definiert eine auf G^* stetige Funktion f^* vom Betrag 1 durch

$$f^*(x^*) = \gamma(f) \cdot |\rho_f|^{-\frac{1}{2}} \cdot f(\rho_f^{-1} x^*)^{-1}. \tag{12}$$

Für u beliebig aus $A(G)$ gilt dann

$$\begin{aligned}\int_{G^*} u^*(x^*) \cdot \overline{f^*(x^*)}\, dx^* &= \overline{\gamma(f)} \cdot |\rho_f|^{-\frac{1}{2}} \int_{G^*} u^*(x^*) \cdot f(\rho_f^{-1} x^*)\, dx^* \\ &= \overline{\gamma(f)} \cdot |\rho_f|^{-\frac{1}{2}} |\rho_f| \int_G u^*(\rho_f x) \cdot f(x)\, dx && \text{nach (8)} \\ &= \overline{\gamma(f)} \cdot \int_G (T_f u)(x) \cdot f(x)\, dx && \text{nach (9)} \\ &= \overline{\gamma(f)} \cdot \gamma(f) \int_G u(x) \cdot \overline{f(x)}\, dx && \text{nach (11)}.\end{aligned}$$

Schließlich haben wir gezeigt

$$\int_G u(x) \cdot \overline{f(x)}\, dx = \int_{G^*} u^*(x^*) \cdot \overline{f^*(x^*)}\, dx^* \tag{13}$$

für u aus $A(G)$. Da $A(G)$ die lineare Klasse $\mathscr{S}(G)$ von SCHWARTZ-BRUHAT enthält, besagt die letztere Gleichung daß f^* die verallgemeinerte Fourier-Transformierte von f ist (s. [*1*], S. 60).

5. Der nächste Satz entspricht Satz 5, Nr. 20 von WEIL [*5*].

Satz 2. *Es sei Γ eine Untergruppe von G und f ein nichtausgearteter Charakter zweiten Grades auf G. Wir setzen voraus, daß f identisch gleich eins auf Γ ist und daß Γ die Elemente x aus G mit der Eigenschaft $B_f(\gamma, x) = 1$ für alle γ aus Γ enthält. Dann gilt $\gamma(f) = 1$.*

Es sei Δ die Menge aller x aus G mit $B_f(\gamma, x)=1$ identisch in γ aus Γ. Offenbar ist Δ eine abgeschlossene Untergruppe von G und nach Voraussetzung gilt $\Delta\subset\Gamma$. Da $f\equiv 1$ auf Γ gilt, haben wir nun

$$B_f(\gamma, x)=f(\gamma+x)\cdot f(\gamma)^{-1}\cdot f(x)^{-1}=1$$

für γ und x aus Γ, das heißt $\Gamma\subset\Delta$. Schließlich ist die Untergruppe $\Gamma=\Delta$ von G abgeschlossen.

Wir zeigen zunächst eine „Poissonsche Summationsformel“

$$\int_\Gamma v(\gamma)\,d\gamma=c\cdot\int_\Gamma (T_f v)(\gamma)\,d\gamma \qquad (v \text{ in } A'(G)) \tag{14}$$

mit einer passenden Konstante $c>0$. In der Tat induziert ρ_f nach der Formel $B_f(\gamma, x)=\langle\gamma, \rho_f x\rangle$ und der Voraussetzung über Γ einen Isomorphismus von Γ mit der Gruppe Γ_* aller x^* in G^*, die $\langle\gamma, x^*\rangle=1$ identisch in γ aus Γ erfüllen; bei passender Wahl der Haarschen Masse auf Γ und Γ_* gilt

$$\int_\Gamma v(\gamma)\,d\gamma=\int_{\Gamma_*} v^*(\gamma_*)\,d\gamma_* \tag{15}$$

für v aus $A'(G)$ [vgl. [3], S. 153; es ist leicht zu zeigen, daß $A'(G)$ in der Klasse $[L^1\cap\mathscr{P}]$ enthalten ist]. Nach dem Eindeutigkeitssatz für die Haarschen Masse gibt es eine Konstante $c_1>0$, so daß

$$\int_{\Gamma_*} v^*(\gamma_*)\,d\gamma_*=c_1\int_\Gamma v^*(\rho_f\gamma)\,d\gamma$$

gültig ist. Nach (9) folgt dann (14) mit $c=c_1\cdot|\rho_f|^{-\frac{1}{2}}$.

Es sei nun u aus $A'(G)$ mit $\int(u\bar{f})\neq 0$, und es sei a beliebig in G; nach den Eigenschaften der Klasse $A'(G)$ (s. Nr. 2) enthält $A'(G)$ die Funktion v, die durch

$$v(x)=f(a)\cdot B_f(x-a, a)\cdot u(x-a)=\overline{f(x-a)}\cdot u(x-a)\cdot f(x)$$

festgestellt wird. Man hat

$$\begin{aligned}(T_f v)(y)&=f(a)\cdot\int_G B_f(x, y)\cdot B_f(x-a, a)\cdot u(x-a)\,d_f x\\ &=f(a)\cdot\int_G B_f(x+a, y)\cdot B_f(x, a)\cdot u(x)\,d_f x\\ &=f(a)\cdot\int_G B_f(x, y+a)\cdot B_f(a, y)\cdot u(x)\,d_f x\\ &=f(a)\cdot B_f(a, y)\cdot(T_f u)(y+a)\\ &=f(y+a)\cdot(T_f u)(y+a)\cdot\overline{f(y)}.\end{aligned}$$

Man kann nun (14) anwenden, und wegen $f(\gamma)=1$ für γ in Γ kommt

$$\int_\Gamma \overline{f(\gamma-a)}\cdot u(\gamma-a)\,d\gamma=c\cdot\int_\Gamma f(\gamma+a)\cdot(T_f u)(\gamma+a)\,d\gamma. \tag{16}$$

Wir setzen

$$w(x)=\overline{f(-x)}\cdot u(-x)-c\cdot f(x)\cdot(T_f u)(x) \qquad (x \text{ in } G)$$

und $w_a(\gamma)=w(a+\gamma)$ für γ aus Γ. Die Funktionen w auf G und w_a auf Γ sind stetig und integrierbar und die Formel (16) besagt, daß $\int\limits_{\Gamma} w_a(\gamma)\,d\gamma=0$. Anders ausgedrückt ist das Integral von w auf jeder Nebenklasse von G modulo Γ gleich null, und es folgt bekanntlich, daß das Integral von w auf der ganzen Gruppe G gleich null ist (s. [3], S. 131). Schließlich haben wir gezeigt

$$\int(u\cdot\bar{f})=c\cdot\int(f\cdot T_f u). \tag{17}$$

Wegen $c>0$, $\int(u\cdot\bar{f})\neq 0$ und $|\gamma(f)|=1$ ergeben (11) und (17) zusammen $c=\gamma(f)=1$, w.z.b.w.

6. Es sei wieder f ein nichtausgearteter Charakter zweiten Grades auf G und es sei Γ eine abgeschlossene Untergruppe von G. Wir setzen $f(\gamma)=1$ für alle γ aus Γ voraus. Die Menge Δ aller x in G, für die $B_f(\gamma,x)=1$ identisch in γ aus Γ gilt, ist offenbar eine abgeschlossene Untergruppe von G, und wie schon im Satz 2 bemerkt, ist Γ in Δ enthalten. Die Gleichung

$$f(\gamma+\delta)=f(\gamma)\cdot f(\delta)\cdot B_f(\gamma,\delta)=f(\delta) \qquad (\gamma \text{ aus } \Gamma,\ \delta \text{ aus } \Delta)$$

zeigt, daß eine Funktion g auf der Faktorgruppe $H=\Delta/\Gamma$ durch die Formel

$$g(\delta+\Gamma)=f(\delta)$$

erklärt wird.

Mit diesen Bezeichnungen haben wir die folgende Verallgemeinerung von Satz 2.

Satz 3. *Die Funktion g auf H ist ein nichtausgearteter Charakter zweiten Grades und $\gamma(f)=\gamma(g)$.*

[Unter den Voraussetzungen des Satzes 2 gilt $\Gamma=\Delta$, und somit ist H die Einheitsgruppe und $g=1$. In diesem Falle besagt Satz 3, daß $\gamma(f)=1$. Wir werden den Beweis auf diesen Spezialfall zurückführen.]

Man setzt $\rho=\rho_f$, $\Gamma'=\rho(\Gamma)$ und $\Delta'=\rho(\Delta)$. Dann sind Γ' und Δ' abgeschlossene Untergruppen von G^* und $\Gamma'\subset\Delta'$. Wegen der Formel

$$\langle\gamma,\rho(x)\rangle=B_f(\gamma,x)$$

besteht Δ' aus allen x^* in G^* mit $\langle\gamma,x^*\rangle=1$ für alle γ in Γ. Nach dem Dualitätssatz (s. [2], S. 96, Théorème 6) besteht umgekehrt Γ aus allen x in G mit $\langle x,\rho(\delta)\rangle=1$ für alle δ in Δ. Nach der Regel $\langle x,\rho(\delta)\rangle=\langle\delta,\rho(x)\rangle$ besteht $\Gamma'=\rho(\Gamma)$ aus allen x^* in G^* mit $\langle\delta,x^*\rangle=1$ identisch für δ aus Δ. Nach der Dualitätslehre gibt es bekanntlich einen Isomorphismus α von Δ'/Γ' mit der Charaktergruppe H^* von H, so daß

$$\langle\delta+\Gamma,\alpha(\delta'+\Gamma')\rangle=\langle\delta,\delta'\rangle \qquad (\delta \text{ aus } \Delta,\ \delta' \text{ aus } \Delta') \tag{18}$$

gilt (s. [4], S. 109). Da ρ ein Isomorphismus ist, liefert die Formel

$$\sigma(\delta+\Gamma)=\rho(\delta)+\Gamma' \tag{19}$$

einen Isomorphismus σ von $H=\Delta/\Gamma$ mit Δ'/Γ'. Ferner seien $\eta_1=\delta_1+\Gamma$ und $\eta_2=\delta_2+\Gamma$ zwei Elemente aus H. Es gilt

$$\begin{aligned} g(\eta_1+\eta_2)=f(\delta_1+\delta_2)&=f(\delta_1)\cdot f(\delta_2)\cdot\langle\delta_1,\rho(\delta_2)\rangle \\ &=g(\eta_1)\cdot g(\eta_2)\cdot\langle\delta_1+\Gamma,\alpha(\rho(\delta_2)+\Gamma')\rangle \qquad \text{nach (18)} \\ &=g(\eta_1)\cdot g(\eta_2)\cdot\langle\eta_1,\alpha\sigma(\eta_2)\rangle \qquad \text{nach (19)}. \end{aligned}$$

Da g offenbar stetig und vom Betrag 1 ist, und da $\alpha\sigma$ ein Isomorphismus von H auf H^* ist, ist g ein nichtausgearteter Charakter zweiten Grades auf H.

Es sei der Isomorphismus τ von $G\times H$ mit seiner Charaktergruppe[3]) $G^*\times H^*$ durch $\tau(x,\eta)=(\rho(x),-\alpha\sigma(\eta))$ definiert. Wenn wir

$$h(x,\eta)=f(x)\cdot g(\eta)^{-1}=f(x)\cdot\overline{g(\eta)} \tag{20}$$

einsetzen, dann ist die Funktion h auf $G\times H$ stetig vom Betrag 1 und genügt der Formel

$$h(y+y')=h(y)\cdot h(y')\cdot\langle y,\tau y'\rangle \qquad (y,y' \text{ aus } G\times H). \tag{21}$$

Folglich ist h ein nichtausgearteter Charakter zweiten Grades auf $G\times H$, und die assoziierte „bilineare" Funktion B_h auf $(G\times H)\times(G\times H)$ ist durch

$$B_h((x,\eta),(x',\eta'))=B_f(x,x')\cdot\overline{B_g(\eta,\eta')} \tag{22}$$

gegeben.

Um $\gamma(h)$ abzuschätzen, wählen wir zwei Funktionen u aus $A(G)$ und v aus $A(H)$ mit den Eigenschaften $\int_G(u\cdot\bar f)\neq 0$ und $\int_H(v\cdot\bar g)\neq 0$; nach Satz 1 haben wir

$$\int_G(T_f u\cdot f)=\gamma(f)\cdot\int_G(u\cdot\bar f) \qquad \int_H(T_g v\cdot g)=\gamma(g)\cdot\int_H(v\cdot\bar g). \tag{23}$$

Man definiert eine stetige integrierbare Funktion w auf $G\times H$ durch $w(x,\eta)=u(x)\cdot\overline{v(\eta)}$; nach dem Eindeutigkeitssatz des Haarschen Maßes auf $G\times H$ gibt es eine Konstante $c>0$, so daß

$$d_h(x,\eta)=c\cdot d_f x\cdot d_g\eta;$$

nach (22) und der Definition von w gilt dann

$$(T_h w)(x,\eta)=c\cdot(T_f u)(x)\cdot\overline{(T_g v)(\eta)}.$$

Es folgt, daß $T_h w$ stetig und integrierbar auf $G\times H$ ist, und nach (9) ist w in $A(G\times H)$ enthalten. Daher haben wir nach Satz 1

$$\int_{G\times H}(T_h w\cdot h)=\gamma(h)\int_{G\times H}(w\cdot\bar h). \tag{24}$$

[3]) Wir erinnern den Leser daran, daß der Wert des Charakters (x^*,η^*) auf dem Element (x,η) aus $G\times H$ durch

$$\langle(x,\eta),(x^*,\eta^*)\rangle=\langle x,x^*\rangle\,\langle\eta,\eta^*\rangle$$

gegeben wird.

Wenn man auf die Gestalt von h, w und $T_h w$ zurückgeht, nimmt (24) die Form an

$$c \cdot \int_G (T_f u \cdot f) \overline{\int_H (T_g v \cdot g)} = \gamma(h) \int_G (u \cdot \bar{f}) \cdot \overline{\int_H (v \cdot \bar{g})}. \tag{25}$$

Der Vergleich von (23) und (25) gibt sofort $c \cdot \gamma(f) \cdot \overline{\gamma(g)} = \gamma(h)$, und wegen $c > 0$ und $|\gamma(f)| = |\gamma(g)| = |\gamma(h)| = 1$ folgt $c = 1$ und $\gamma(f) = \gamma(g) \cdot \gamma(h)$.

Es bleibt nur die Gleichung $\gamma(h) = 1$ festzustellen. Dazu betrachten wir die Menge K der Paare $(\delta, \delta + \Gamma)$ mit δ aus Δ, die offenbar eine Untergruppe von $G \times H$ ist. Es gilt

$$h(\delta, \delta + \Gamma) = f(\delta) \cdot g(\delta + \Gamma)^{-1} = 1 \qquad (\delta \text{ aus } \Delta),$$

d.h. $h \equiv 1$ auf K. Es sei nun $k' = (x, \delta_0 + \Gamma)$ aus $G \times H$ mit der Eigenschaft $B_h(k, k') = 1$ für alle k aus K vorgelegt. Für jedes δ aus Δ und $k = (\delta, \delta + \Gamma)$ gilt daher

$$\begin{aligned} 1 = B_h(k, k') = B_f(\delta, x) \cdot B_g(\delta + \Gamma, \delta_0 + \Gamma)^{-1} &= B_f(\delta, x) \cdot B_f(\delta, \delta_0)^{-1} \\ &= B_f(x - \delta_0, \delta). \end{aligned}$$

Da δ in Γ beliebig ist, folgt $x - \delta_0 \in \Gamma$ und schließlich $x \in \Delta$ und $k' = (x, x + \Gamma) \in K$. Die Gleichung $\gamma(h) = 1$ folgt dann aus Satz 2, w.z.b.w.

Literatur

[1] BRUHAT, F.: Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes $\mathfrak{p}$-adiques. Bulletin Soc. Math. de France **89**, 43—75 (1961).

[2] CARTAN, H., et R. GODEMENT: Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts. Annales de l'Ecole Normale Supérieure **64**, 79—99 (1947).

[3] LOOMIS, L.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York: van Nostrand 1953.

[4] WEIL, A.: L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Actualités Scientifiques et Industrielles. Paris: Hermann 1953.

[5] — Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Erscheint in den Acta Mathematica.

Strasbourg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 20. November 1963)