2° WLADYSLAW SLEBODZIŃSKI. *Formes extérieures et leurs applications*. Volume I;

3° *Vom Zwischenkieferknochen zur Idee des Typus. Gœthe als Naturforscher in den Jahren* 1780-1786, von HERMANN BRÄUNING-OKTAVIO.

ALGÈBRE. — *Une nouvelle opération sur les formes différentielles.* Note de M. **PIERRE CARTIER**, présentée par M. Jacques Hadamard.

Généralisation de certains calculs de Jacobson (1) et Tate (2) concernant les formes différentielles en caractéristique $p \neq 0$. Application à la théorie des courbes algébriques et des variétés abéliennes.

1. On désignera par K une algèbre commutative avec unité sur un corps k de caractéristique $p \neq 0$. On renvoie au Séminaire Cartan-Chevalley (3) pour la définition du module $\Omega^1(K)$ des k-différentielles de K de degré 1 et l'on notera $\Omega^*(K)$ l'algèbre extérieure du K-module $\Omega^1(K)$. Dans l'anneau $\Omega^*(K)$, on définit de la manière usuelle une antidérivation d de degré 1 et de carré nul prolongeant l'application $x \to dx$ de K dans $\Omega^1(K)$. On notera $H^*(K)$ l'homologie du complexe $(\Omega^*(K), d)$.

2. Comme K est de caractéristique $p \neq 0$, on peut définir sur l'ensemble $W_m(K)$ des systèmes $(x_0, \ldots, x_{m-1})$ d'éléments de K une structure d'anneau commutatif au moyen des formules polynomiales de Witt (4); on peut définir un homomorphisme F de $W_m(K)$ dans lui-même, un homomorphisme R_m de $W_m(K)$ dans $W_{m-1}(K)$ et une application additive V_m de $W_m(K)$ dans $W_{m+1}(K)$ par les formules

$$F(x_0, \ldots, x_{m-1}) = (x_0^p, \ldots, x_{m-1}^p), \tag{1}$$

$$R_m(x_0, \ldots, x_{m-1}) = (x_0, \ldots, x_{m-2}), \tag{2}$$

$$V_m(x_0, \ldots, x_{m-1}) = (0, x_0, \ldots, x_{m-1}). \tag{3}$$

La différentielle $\partial\mathbf{x}$ de l'élément $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{m-1})$ sera l'élément $\sum_{i=0}^{m-1} x^{p^{m-i-1}-1} dx_i$ de $\Omega^1(K)$. L'application $\mathbf{x} \to \partial\mathbf{x}$ est additive et l'on a la formule

$$\partial(\mathbf{x}.\mathbf{y}) = x_0^{p^{m-1}}.\partial\mathbf{y} + \partial\mathbf{x}.y_0^{p^{m-1}}. \tag{4}$$

3. Si l'on fait $m = 2$ dans ce qui précède, et si l'on tient compte de la définition universelle de $\Omega^*(K)$, on voit qu'il existe un homomorphisme φ_1 de l'anneau $\Omega^*(K)$ dans l'anneau $H^*(K)$ qui associe à x et dx respectivement les classes de cohomologie de x^p et $x^{p-1}\,dx$.

THÉORÈME 1. — *Si k est contenu dans le sous-anneau K^p de K formé des x^p avec $x \in K$, et si l'anneau K possède une p-base* (c'est-à-dire une famille d'éléments c_i tels que les monomes $\prod_i c_i^{\alpha_i}$ avec $0 \leq \alpha_i < p$ forment une base du K^p-module K), *l'homomorphisme φ_1 est une bijection de $\Omega^*(K)$ sur $H^*(K)$.*

Dans le cas particulier où K est un corps auquel nous nous limiterons dans la suite, on sait qu'il existe toujours une p-base.

Dans ces conditions, soit $\omega \in \Omega^{\star}(\mathrm{K})$ telle que $d\omega = 0$; on notera $\mathrm{C}(\omega)$ la forme différentielle telle que $\varphi_1 \mathrm{C}(\omega)$ soit la classe de cohomologie de ω. On a alors le formulaire suivant :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{C}(\omega + \omega') &= \mathrm{C}(\omega) + \mathrm{C}(\omega'), \\ \mathrm{C}(x^p \omega) &= x\, \mathrm{C}(\omega), \\ \mathrm{C}(dx) &= 0, \\ \mathrm{C}(x^{p-1} dx) &= dx, \\ \mathrm{C}\left(\frac{dx}{x}\right) &= \frac{dx}{x}, \\ \mathrm{C}(\partial \mathbf{x}) &= \partial \mathrm{R}_m \mathbf{x}. \end{aligned} \right.$$

pour $x \in \mathrm{K}$, $\mathbf{x} \in \mathrm{W}_m(\mathrm{K})$ et ω, $\omega' \in \Omega^{\star}(\mathrm{K})$. De plus si D est une forme linéaire sur le K-module $\Omega^1(\mathrm{K})$ (autrement dit une k-dérivation de l'anneau K), on a

$$(6) \qquad \langle \mathrm{C}(\omega), \mathrm{D} \rangle^p = \langle \omega, \mathrm{D}^p \rangle - \mathrm{D}^{p-1}.\langle \omega, \mathrm{D} \rangle.$$

pour $\omega \in \Omega^1(\mathrm{K})$ telle que $d\omega = 0$.

THÉORÈME 2. — *Pour que $\omega \in \Omega^1(\mathrm{K})$ soit de la forme dx/x avec $x \in \mathrm{K}$, il faut et suffit que $d\omega = 0$ et $\mathrm{C}(\omega) = \omega$.*

La condition est nécessaire d'après une des formules (5). Pour montrer la suffisance, on se ramène au cas où K est de degré fini sur $k(\mathrm{K}^p)$; dans ce cas, le théorème 2 résulte facilement du théorème suivant qui est l'analogue d'un théorème connu de E. Noether en théorie de Galois :

THÉORÈME 3. — *Soient K et L deux corps de caractéristique $p \neq 0$ et tels que $\mathrm{K} \supset \mathrm{L} \supset \mathrm{K}^p$ et $[\mathrm{K}:\mathrm{L}] < \infty$. Supposons donné pour toute L-dérivation D de K un opérateur additif $\rho(\mathrm{D})$ d'un espace K-vectoriel V tel que*

$$(7) \qquad \rho(x\mathrm{D}).v = x.(\rho(\mathrm{D}).v),$$

$$(8) \qquad \rho(\mathrm{D}).xv = \mathrm{D}x.v + x.(\rho(\mathrm{D}).v) \qquad (x \in \mathrm{K},\ v \in \mathrm{V})$$

et de sorte que ρ soit un homomorphisme de p-anneau de Lie. Dans ces conditions, toute base du L-espace vectoriel V_0 formé des éléments de V annulés par tous les $\rho(\mathrm{D})$ est une base du K-espace vectoriel V.

La démonstration repose sur la théorie des algèbres simples et sur le lemme suivant :

LEMME. — *Si $(\mathrm{D}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base du K-module des L-dérivations de K, tout endomorphisme de l'espace L-vectoriel K s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme*

$$\sum_{0 \leq \alpha_i < p} c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathrm{D}_n^{\alpha_n} \qquad \text{avec} \quad c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \in \mathrm{K}.$$

4. Les applications à la géométrie algébrique de ce qui précède reposent sur les théorèmes suivants :

Théorème 4. — *Soit* X *une courbe normale et complète définie sur un corps* k *algébriquement clos de caractéristique* $p \neq 0$. *Pour toute forme différentielle rationnelle* ω *sur* X *et tout* $x \in X$, *on a*

$$\operatorname{res}_x(C(\omega)) = (\operatorname{res}_x \omega)^p \tag{9}$$

De plus, l'espace k*-vectoriel* $\Omega^1(k(X))$ (5) *est somme directe du sous-espace* $\bigcup_{m \geq 0} \partial(W_m(k(X)))$ *et du sous-espace engendré par les* df/f *avec* $f \in k(X)$ *non nulle.*

De la formule (9), on déduit une démonstration très facile de la formule des résidus.

Corollaire. — *Soit* φ *l'application canonique de la courbe normale et complète* X *dans sa Jacobienne* J *et soit* h *l'application du groupe de cohomologie* $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ *de* X (*à valeurs dans le faisceau des anneaux locaux*), *dans l'espace des champs de vecteurs invariants sur* J *qui est transposée de l'application* $\omega \to \varphi^{-1}\omega$ *sur les formes différentielles* (6). *Si* F *est l'endomorphisme de* $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ *déduit de l'application* $f \to f^p$ *de* $\mathcal{O}_{X,x}$, *on a*

$$h(F(a)) = h(a)^p \qquad [a \in H^1(X, \mathcal{O}_X)]. \tag{10}$$

Autrement dit, la matrice A de Hasse-Witt (7) est celle de l'application $D \to D^p$ dans l'algèbre de Lie de la Jacobienne J de X.

Théorème 5. — *Soit* X *une variété normale et complète définie sur le corps* k *algébriquement clos de caractéristique* $p \neq 0$ *et soit* Ω *l'espace des formes différentielles rationnelles sur* X *de diviseur positif. Le sous-groupe additif* G *de* Ω *défini par les conditions* $d\omega = 0$ *et* $C(\omega) = \omega$ *est canoniquement isomorphe au groupe des classes de diviseurs d'ordre* p *sur* X. *De plus, si* Ω *est de dimension finie sur* k *et si l'on a* $d\omega = 0$ *pour tout* $\omega \in \Omega$, *l'espace* Ω *est somme directe du sous-espace engendré par* G *et du sous-espace* $\Omega \cap \left(\bigcup_{m \geq 0} \partial(W_m(k(X))) \right)$.

On a un énoncé analogue avec les formes invariantes lorsque X est un groupe algébrique commutatif, et ceci étend un résultat de Barsotti sur les variétés abéliennes.

De plus le théorème 5 montre que si X est une courbe normale et complète de genre g et si σ est le rang de la matrice $A . A^p \ldots A^{p^{g-1}}$, avec les notations de Hasse-Witt (7), il y a $p^{n\sigma}$ classes de diviseurs d'ordre p^n sur X, et que $\sigma = g$ si et seulement X ne possède pas de différentielle exacte de première espèce.

(1) *Trans. Amer. Math. Soc.*, 42; 1937, p. 206-224.
(2) *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3, 1952, p. 400-406.
(3) *Séminaire E. N. S.*, 1955-1956, exp. 13.
(4) *J. Crelle*, 176, 1936, p. 126-140.
(5) On note $k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur la variété X.
(6) On met en dualité, au moyen des résidus, l'espace $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ avec l'espace des formes de première espèce sur X.
(7) *Mh. Math. Phys.*, 43, 1936, p. 400-421.