PIERRE CARTIER

Introduction à l'étude des mouvements browniens à plusieurs paramètres

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 58-75
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__58_0>

Université de Strasbourg

Séminaire de Probabilités 1969/70

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DES MOUVEMENTS BROWNIENS A PLUSIEURS PARAMÈTRES

par P. CARTIER

Le but de cet exposé est de donner les résultats élémentaires sur les fonctions aléatoires de plusieurs variables introduites par P.LÉVY sous le nom de "mouvement brownien à plusieurs paramètres" , le cas le plus nouveau étant celui où le nombre de paramètres devient infini . Accessoirement , nous résoudrons une contradiction apparente entre les résultats de P.LÉVY [2] et ceux de McKEAN [1] , en donnant raison à McKEAN .

1. Rappels sur les variables aléatoires gaussiennes

Dans tout cet exposé , on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ et toutes les variables aléatoires sont relatives à cet espace probabilisé .

Soit σ un nombre réel positif ; la mesure de probabilité g_σ sur $\underline{\underline{R}}$ est définie comme suit :

a) la mesure g_0 est la masse unité au point 0 ;

b) pour $\sigma > 0$, la mesure g_σ admet la densité $(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\, e^{-x^2/2\sigma^2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue dx .

Dans tous les cas , la transformée de Fourier de la mesure g_σ est donnée par la formule suivante :

$$\int e^{iux}\, g_\sigma(dx) = e^{-\sigma^2 u^2/2} \qquad \text{(pour u réel) ;} \tag{1}$$

cette formule donne une autre définition de la mesure g_σ .

Selon l'usage , on dit qu'une variable aléatoire (réelle) X est <u>gaussienne d'écart-type</u> σ si sa loi de probabilité est la mesure g_σ sur $\underline{\underline{R}}$; il revient au même de dire que l'on a

$$(2) \qquad E[e^{iuX}] = e^{-\sigma^2 u^2/2}$$

pour tout u réel . En particulier , on a $E[X] = 0$ et $E[X^2] = \sigma^2$, de sorte que σ est la norme de X dans l'espace de Hilbert $L^2 = L^2(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, posons $C_p = \pi^{-1/2}\, 2^{p/2}\, \Gamma(\frac{p+1}{2})$, où Γ est la fonction gamma d'Euler , définie par $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ pour $s > 0$. Un calcul immédiat montre alors que , si X est une variable gaussienne d'écart-type σ, on a $E[|X|^p] = C_p \sigma^p$; par suite , X appartient à $L^p = L^p(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ et l'on a $||X||_p = C_p^{1/p}.||X||_2$.

LEMME 1.- <u>Si une variable aléatoire</u> X ε L^2 <u>est limite dans l'espace de Hilbert</u> L^2 <u>d'une suite de variables gaussiennes</u> X_n , <u>alors</u> X <u>est gaussienne</u> .

Posons $\sigma_n = ||X_n||_2$ et $\sigma = ||X||_2$, d'où $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$; quitte à passer à une sous-suite , on peut supposer que X est limite presque sûre de la suite (X_n) , d'où $E[e^{iuX}] = \lim_{n\to\infty} E[e^{iuX_n}]$ pour tout u réel , d'après le théorème de convergence bornée . Comme X_n est gaussienne , on a $E[e^{iuX_n}] = \exp -\frac{1}{2}\sigma_n^2 u^2$, d'où $E[e^{iuX}] = \exp -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2$, pour tout u réel . On a prouvé que X est gaussienne d'écart-type σ.

LEMME 2.- <u>Soient</u> $X_1,\ldots,X_n$ <u>des variables aléatoires</u> . <u>Pour tout vecteur réel</u> $u = (u_1,\ldots,u_n)$, <u>on pose</u> $X(u) = u_1X_1 + \ldots + u_nX_n$.

a) <u>Supposons que</u> $(X_1,\ldots,X_n)$ <u>soit une suite indépendante de variables gaussiennes</u> . <u>Alors</u> X(u) <u>est une variable gaussienne pour tout vecteur</u> u <u>réel</u> .

b) <u>Réciproquement</u> , <u>supposons que la variable aléatoire</u> X(u) <u>soit gaussienne pour tout vecteur réel</u> u <u>et que l'on ait</u> $E[X_iX_j] = 0$ <u>pour</u> $i \neq j$. <u>Alors</u> $(X_1,\ldots,X_n)$ <u>est une suite indépendante de variables gaussiennes</u> .

Supposons que la suite $(X_1,\ldots,X_n)$ soit indépendante et que X_j soit gaussienne d'écart-type σ_j . Pour tout t réel , on a alors

$$E[e^{itX(u)}] = E[\prod_{j=1}^{n} e^{itu_jX_j}] = \prod_{j=1}^{n} E[e^{itu_jX_j}] = \prod_{j=1}^{n} e^{-t^2u_j^2\sigma_j^2/2} = e^{-t^2\sigma^2/2}$$

en posant $\sigma^2 = u_1^2\sigma_1^2 + \ldots + u_n^2\sigma_n^2$; on a prouvé que $X(u)$ est gaussienne d'écart-type σ, d'où a) .

On a $X_j = X(\overbrace{0,\ldots,0}^{j-1},1,\overbrace{0,\ldots,0}^{n-j})$; les hypothèses de b) entraînent donc que chacune des variables $X_1,\ldots,X_n$ est gaussienne . Notons σ_j l'écart-type de X_j ; vu l'hypothèse d'orthogonalité $E[X_iX_j] = 0$ pour $i \neq j$, on a $E[X(u)^2] = u_1^2\sigma_1^2 + \ldots + u_n^2\sigma_n^2$ et comme $X(u)$ est gaussienne , on a

$$E[e^{iX(u)}] = \exp -\frac{1}{2}(u_1^2\sigma_1^2 + \ldots + u_n^2\sigma_n^2) = \prod_{j=1}^{n} E[e^{iu_jX_j}] .$$

L'indépendance de la suite $(X_1,\ldots,X_n)$ s'ensuit par un critère classique , d'où b) .

2. Covariances

Dans tout espace de Hilbert , nous noterons $(a|b)$ le produit scalaire des vecteurs a et b , et $||a||$ la norme du vecteur a .

LEMME 3.- Soient T un ensemble et C une fonction réelle sur $T \times T$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) il existe une application f de T dans un espace de Hilbert (réel) $\underline{\underline{H}}$ telle que $C(t,t') = (f(t)|f(t'))$ pour t,t' dans T ;

b) on a $C(t,t') = C(t',t)$ pour t,t' dans T , et quels que soient $t_1,\ldots,t_n$ distincts dans T et les nombres réels $u_1,\ldots,u_n$, on a $\sum_{i,j=1}^{n} C(t_i,t_j)u_iu_j \geq 0$;

c) il existe une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions réelles sur T telle que $\sum_{i\in I} f_i(t)^2 < \infty$ pour tout $t \in T$ et $C(t,t') = \sum_{i\in I} f_i(t)f_i(t')$ pour t,t' dans T .

Soient $\underline{\underline{H}}$ un espace de Hilbert réel et $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormale de $\underline{\underline{H}}$. La formule $f(t) = \sum_{i\in I} f_i(t).e_i$ (pour t dans T) définit une bijection de l'ensemble des applications f de T dans $\underline{\underline{H}}$ sur l'ensemble des familles $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions réelles sur T telles que $\sum_{i\in I} f_i(t)^2 < \infty$ pour tout $t \in T$; avec ces notations , on a de plus

$$(3) \qquad (f(t)|f(t')) = \sum_{i\in I} f_i(t)f_i(t') \qquad (t,t' \text{ dans } T) .$$

Ces remarques établissent l'équivalence de a) et c) .

Avec les notations de a) , on a

$$(4) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} C(t_i,t_j)u_iu_j = || \sum_{i=1}^{n} u_i.f(t_i) ||^2$$

donc a) entraîne b) .

Plaçons-nous sous les hypothèses de b) . Il existe un espace vectoriel réel V ayant une base $(v_t)_{t\in T}$ indexée par T . La fonction C sur $T \times T$ définit une forme bilinéaire symétrique B sur $V \times V$ par $B(v_t,v_{t'}) = C(t,t')$. Tout élément v de V s'écrit sous la forme $v = \sum_{i=1}^{n} u_i.v_{t_i}$ avec $t_1,\ldots,t_n$ distincts dans T et $u_1,\ldots,u_n$ réels ; on a alors

$$(5) \qquad B(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} C(t_i,t_j)u_iu_j \geq 0 \quad .$$

Comme il est bien connu , l'ensemble N des $v \in V$ tels que $B(v,v) = 0$ est un sous-espace vectoriel de V ; notant π l'application canonique de V sur $\underline{\underline{H}}_o = V/N$, on construit une forme bilinéaire symétrique $(.|.)$ sur $\underline{\underline{H}}_o$ telle que $B(v,v') = (\pi(v)|\pi(v'))$ pour v,v' dans V . On a alors $(x|x) > 0$ pour $x \neq 0$ dans $\underline{\underline{H}}_o$, et l'on peut donc compléter $\underline{\underline{H}}_o$ en un espace de Hilbert $\underline{\underline{H}}$. Il suffit alors de poser $f(t) = \pi(v_t)$ pour $t \in T$; l'application f de T dans $\underline{\underline{H}}$ satisfait à $C(t,t') = (f(t)|f(t'))$.

Q.E.D.

Une fonction C sur $T \times T$ satisfaisant aux conditions équivalentes du lemme 3 s'appelle une <u>covariance</u> sur T . La propriété b) montre que la somme de deux covariances et le produit d'une covariance par un nombre positif sont des covariances ; la propriété c) montre que le produit de deux covariances est une covariance .

Le lemme suivant donne une caractérisation en termes de covariances des espaces métriques isométriques à un sous-espace d'un espace de Hilbert .

LEMME 4.- <u>Soient</u> T <u>un ensemble et</u> d <u>une fonction réelle positive sur</u> $T \times T$. <u>On suppose que l'on a</u> $d(t,t) = 0$ <u>et</u> $d(t,t') = d(t',t)$ <u>pour</u> t,t' <u>dans</u> T . <u>Les</u>

conditions suivantes sont équivalentes :

a) *il existe une application* g *de* T *dans un espace de Hilbert* $\underline{\underline{H}}$ *telle que* $d(t,t') = ||g(t) - g(t')||$ *pour* t,t' *dans* T ;

b) *quels que soient* $t_1,\dots,t_n$ *distincts dans* T *et les nombres réels* $u_1,\dots,u_n$ *de somme nulle* , *on a l'inégalité* $\sum_{i,j=1}^{n} d(t_i,t_j)^2 u_i u_j \leq 0$;

c) *pour tout nombre réel* $s > 0$, *la fonction* e^{-sd^2} *sur* $T \times T$ *est une covariance* .

Sous les hypothèses de a) , définissons la covariance C sur T par $C(t,t') = (g(t)|g(t'))$. Les propriétés élémentaires des covariances montrent alors que la fonction $e^{sC} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n C^n/n!$ sur $T \times T$ est une covariance pour tout $s > 0$. Si $t_1,\dots,t_n$ sont des éléments de T et $u_1,\dots,u_n$ des nombres réels , on a

(6) $$\sum_{i,j=1}^{n} [\exp - sd(t_i,t_j)^2]u_i u_j = \sum_{i,j=1}^{n} [\exp 2sC(t_i,t_j)]v_i v_j \geq 0$$

(on a posé $v_i = u_i.\exp - s.||g(t_i)||^2$) puisque e^{2sC} est une covariance . Par suite , e^{-sd^2} est une covariance , et a) entraîne c) .

Sous les hypothèses de c) , choisissons des éléments $t_1,\dots,t_n$ de T et des nombres réels $u_1,\dots,u_n$ de somme nulle ; définissons une fonction d'une variable réelle φ par

(7) $$\varphi(s) = \sum_{i,j=1}^{n} [\exp - sd(t_i,t_j)^2]u_i u_j \quad .$$

On a par hypothèse $\varphi(s) \geq 0$ pour $s > 0$ et l'on a $\varphi(0) = (\sum_{i=1}^{n} u_i)^2 = 0$; la dérivée $\varphi'(0)$ est égale à $\sum_{i,j=1}^{n} - d(t_i,t_j)^2 u_i u_j$ et comme l'on a $\varphi'(0) = \lim_{s\to 0} [\varphi(s) - \varphi(0)]/s$, on a $\varphi'(0) \geq 0$, et c) entraîne b) .

Sous les hypothèses de b) , choisissons un élément o de T , posons $T_1 = T - \{o\}$ et $C(t,t') = \frac{1}{2}[d(o,t)^2 + d(o,t')^2 - d(t,t')^2]$ pour t,t' dans T_1 . Soient $t_1,\dots,t_n$ des éléments distincts de T_1 et $u_1,\dots,u_n$ des nombres réels . Posons $t_o = o$ et $u_o = -(u_1 + \dots + u_n)$; un calcul facile donne

(8) $$2\sum_{i,j=1}^{n} C(t_i,t_j)u_i u_j = -\sum_{i,j=0}^{n} d(t_i,t_j)^2 u_i u_j$$

et l'hypothèse faite sur d montre que C est une covariance sur T_1 . Nous pouvons donc trouver un espace de Hilbert $\underline{\underline{H}}$ et une application g_1 de T_1 dans $\underline{\underline{H}}$ satisfaisant à $C(t,t') = (g_1(t)|g_1(t'))$ pour t,t' dans T_1 , c'est-à-dire à

(9) $$d(t,t')^2 = d(o,t)^2 + d(o,t')^2 - 2.(g_1(t)|g_1(t'))$$

pour t,t' dans T_1 . Prolongeant g_1 en une application g de T dans $\underline{\underline{H}}$ par $g(o) = 0$, on obtient par un calcul facile la relation cherchée $d(t,t') = ||g(t) - g(t')||$ (pour t,t' dans T) . Par suite , b) entraîne a) .

3. Espaces gaussiens et fonctions aléatoires gaussiennes

Nous appellerons espace gaussien tout sous-espace vectoriel $\underline{\underline{H}}$ de L^2 qui se compose de variables gaussiennes . On a alors

(10) $$E[e^{iX}] = \exp -\frac{1}{2}E[X^2] \qquad \text{pour tout } X \in \underline{\underline{H}} \ ;$$

inversement , si $\underline{\underline{H}}$ est un sous-espace vectoriel de L^2 satisfaisant à (10) , c'est un espace gaussien , comme on le voit en remplaçant X par uX dans (10) , avec u réel .

Le théorème suivant résume les propriétés élémentaires des espaces gaussiens .

THÉORÈME 1.- a) La fermeture dans L^2 d'un espace gaussien est un espace gaussien.

b) Soient $X_1,\ldots,X_n$ des éléments deux à deux orthogonaux d'un espace gaussien . Alors la suite $(X_1,\ldots,X_n)$ est indépendante .

c) Soit $(X_i)_{i\varepsilon I}$ une famille indépendante de variables gaussiennes . Le sous-espace vectoriel fermé de L^2 engendré par cette famille est gaussien .

d) Soit $\underline{\underline{K}}$ un espace de Hilbert . Il existe un isomorphisme de $\underline{\underline{K}}$ sur un espace gaussien $\underline{\underline{H}}$ défini sur un espace probabilisé convenable .

Les assertions a) à c) résultent immédiatement des lemmes 1 et 2 du n° 1 . Pour prouver d) , introduisons une base orthonormale $(e_i)_{i\varepsilon I}$ de $\underline{\underline{K}}$. Pour tout i ε I , soit Ω_i l'ensemble des nombres réels , $\underline{\underline{F}}_i$ la tribu borélienne sur Ω_i et $P_i = g_1$. Notons $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ l'espace probabilisé produit de la famille $(\Omega_i, \underline{\underline{F}}_i, P_i)$ (pour i ε I) et X_i la projection d'indice i dans Ω . Alors $(X_i)_{i\varepsilon I}$ est une famille indépendante de variables gaussiennes et l'on a $E[X_i^2] = 1$, $E[X_i X_j] = E[X_i].E[X_j] = 0$ pour i,j distincts dans I ; d'après c) , la famille $(X_i)_{i\varepsilon I}$ est une base orthonormale d'un espace gaussien $\underline{\underline{H}}$, et il existe un isomorphisme de $\underline{\underline{K}}$ sur $\underline{\underline{H}}$ qui applique e_i sur X_i pour tout $i \varepsilon I$.

Q.E.D.

Une <u>fonction aléatoire gaussienne</u> sur un ensemble T est une famille $X = (X(t))_{t\varepsilon T}$ de variables aléatoires , telle que toute combinaison linéaire finie $\sum_{i=1}^{n} u_i.X(t_i)$ (avec $t_1,\ldots,t_n$ dans T et $u_1,\ldots,u_n$ réels) soit une variable gaussienne . Il revient au même de dire que les $X(t)$ appartiennent à un même espace gaussien . Pour t,t' dans T , notons $C_X(t,t')$ le produit scalaire $E[X(t).X(t')]$ de $X(t)$ et $X(t')$ dans l'espace de Hilbert L^2 ; alors C_X est une covariance sur T , que l'on appelle la <u>covariance de la fonction aléatoire gaussienne</u> X . Si $t_1,\ldots,t_n$ sont des éléments de T et $u_1,\ldots,u_n$ des nombres réels , on a

$$E[\exp i\sum_{j=1}^{n} u_j.X(t_j)] = \exp - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} C_X(t_j,t_k).u_j u_k \tag{11}$$

d'après (4) et (10) ; par suite , la covariance C_X définit la <u>loi</u> de la fonction aléatoire X.

Soit C une covariance sur un ensemble T ; il existe une fonction aléatoire gaussienne X sur T telle que $C = C_X$. En effet , il existe une application f de T dans un espace de Hilbert $\underline{\underline{K}}$ telle que $C(t,t') = (f(t)|f(t'))$ pour t,t' dans T (lemme 3,a) et un isomorphisme π de $\underline{\underline{K}}$ sur un espace gaussien $\underline{\underline{H}}$; il suffit alors de poser $X(t) = \pi(f(t))$ pour $t \varepsilon T$.

4. <u>Mouvement brownien et bruit blanc</u>

La définition classique du mouvement brownien (Einstein-Schmolukowski) est la suivante : c'est une fonction aléatoire W d'une variable réelle telle que

a) on a $W(0) = 0$;

b) pour $t < t'$, la variable aléatoire $W(t') - W(t)$ est gaussienne d'écart-type $|t'-t|^{1/2}$;

c) pour $t_o < t_1 < \ldots < t_n$, la suite des variables aléatoires $W(t_i) - W(t_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq n$ est indépendante .

Soit $\underline{\underline{E}}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles en escalier sur $\underline{\underline{R}}$. Soit f dans $\underline{\underline{E}}$; par définition , il existe des nombres $t_o, t_1, \dots, t_n$ et $u_1, \dots, u_n$ tels que $t_o < t_1 < \dots < t_n$ et $f(t) = u_i$ lorsque $t_{i-1} < u \leq t_i$ et $f(t) = 0$ si $t \leq t_o$ ou $t > t_n$. Dans ces conditions , posons

(12) $$J_o(f) = \sum_{i=1}^{n} u_i.(W(t_i) - W(t_{i-1})) \quad .$$

On obtient ainsi une application J_o de $\underline{\underline{E}}$ dans L^2 ; d'après le lemme 2,a) et l'hypothèse c) ci-dessus , la variable aléatoire $J_o(f)$ est gaussienne et l'on a

(13) $$E[J_o(f)^2] = \sum_{i=1}^{n} u_i^2.|t_i - t_{i-1}| = \int f(t)^2 dt \quad .$$

Comme $\underline{\underline{E}}$ est dense dans l'espace de Hilbert $\underline{\underline{H}} = L^2(\underline{\underline{R}}, dt)$, l'application J_o se prolonge de manière unique en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $\underline{\underline{H}}$ sur un espace gaussien de variables aléatoires (th.1 , a) . Pour $f \in \underline{\underline{H}}$, on écrit $J(f)$ sous la forme $\int f(t)\, dW(t)$ (<u>intégrale stochastique de Wiener</u>) .

Pour tout t réel , on définit une fonction f_t sur $\underline{\underline{R}}$ par la règle

(14) $$f_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \text{ et } 0 < x \leq t \\ -1 & \text{si } t \leq 0 \text{ et } t < x \leq 0 \\ 0 & \text{dans les autres cas .} \end{cases}$$

On obtient ainsi une courbe paramétrée $\Gamma = (f_t)_{t \in \underline{\underline{R}}}$ dans l'espace de Hilbert $\underline{\underline{H}}$; elle jouit des propriétés suivantes :

a') on a $f_o = 0$;

b') on a $||f_t - f_{t'}|| = |t - t'|^{1/2}$;

c') si $t < u < v < w$, les éléments $f_u - f_t$ et $f_w - f_v$ de $\underline{\underline{H}}$ sont orthogonaux .

De manière plus intuitive , la condition c') signifie que si les quatre points A,B,C et D se suivent sur la courbe Γ, les cordes AB et CD sont orthogonales ; on peut encore dire que si l'on prend pour origine dans $\underline{\underline{H}}$ un point quelconque de Γ , les deux moitiés de Γ délimitées par A sont situées dans des espaces orthogonaux . D'une manière générale , on appelle <u>hélice</u> toute courbe dans un espace de Hilbert $\underline{\underline{H}}$ qui jouit des propriétés précédentes .

Revenons au mouvement brownien . On a $W(t) = J(f_t)$ et par conséquent , W est une fonction aléatoire gaussienne sur $\underline{\underline{R}}$, de covariance donnée par

$$(15) \qquad C_W(t,t') = \frac{1}{2} E[W(t)^2 + W(t')^2 - W(t-t')^2] = \frac{1}{2}\{|t| + |t'| - |t-t'|\} \quad ;$$

on a donc

$$(16) \qquad C_W(t,t') = C_W(t',t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \leq t' \\ -t' & \text{si } t' \leq 0 \end{cases}$$

lorsque $t \leq t'$.

Pour tout ensemble borélien $A \subset \underline{\underline{R}}$, on note I_A son indicatrice et $m(A)$ sa mesure au sens de Lebesgue ; si $m(A)$ est fini , la fonction I_A appartient à $\underline{\underline{H}} = L^2(\underline{\underline{R}},m)$ et la variable $M(A) = J(I_A)$ est définie . On a les propriétés suivantes :

a") pour tout ensemble A , la variable aléatoire M(A) est gaussienne d'écart-type $m(A)^{1/2}$;

b") si $A_1,\dots,A_n$ sont deux à deux disjoints , la suite de variables aléatoires $(M(A_1),\dots,M(A_n))$ est indépendante et l'on a $M(A_1 \cup \dots \cup A_n) = M(A_1) + \dots + M(A_n)$.

Le mouvement brownien est donné par

$$(17) \qquad W(t) = \begin{cases} M(]0,t]) & \text{si} \quad t \geq 0 \\ -M(]t,0]) & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases} \quad .$$

D'une manière générale , soit $(T, \underline{\underline{A}}, m)$ un espace mesuré ; on appelle mesure <u>aléatoire gaussienne</u> sur $(T,\underline{\underline{A}})$, de <u>variance</u> m , une application M de l'ensemble des parties A de T appartenant à $\underline{\underline{A}}$ et telles que m(A) soit fini dans l'ensemble des variables aléatoires , qui satisfait à a") et b") . On dit aussi , à cause de certaines applications physiques de ces processus , qu'une telle mesure aléatoire est un "bruit blanc" . On montre comme plus haut qu'il existe un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(T, \underline{\underline{A}}, m)$ sur un espace gaussien caractérisé par $J(I_A) = M(A)$; on écrit aussi $\int_T f(t)\, M(dt)$ pour $J(f)$.

5. Processus de Lévy

THEOREME 2.- Soit $\underline{\underline{T}}$ un espace de Hilbert (réel) . Il existe une fonction aléatoire gaussienne X sur $\underline{\underline{T}}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$X(0) = 0 \tag{18}$$

$$E[(X(t) - X(t'))^2] = ||t - t'|| \quad . \tag{19}$$

Sa covariance est donnée par

$$C_X(t,t') = \frac{1}{2}\left\{||t|| + ||t'|| - ||t-t'||\right\} \quad . \tag{20}$$

Le calcul de la covariance C_X à partir de (18) et (19) est immédiat . Comme tout espace de Hilbert est isomorphe à un espace gaussien (th.1 , d) , il suffit de construire une application f de $\underline{\underline{T}}$ dans un espace de Hilbert $\underline{\underline{H}}$ qui satisfait à f(0) = 0 et à la relation

$$||f(t) - f(t')|| = ||t - t'||^{1/2} \quad . \tag{21}$$

On peut d'ailleurs se dispenser de la condition f(0) = 0 car on s'y ramène immédiatement en soustrayant un vecteur constant de f , ce qui ne modifie pas la validité de (21) .

Selon le lemme 4 , l'existence d'une telle fonction f équivaut aux inégalités

$$\sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j . ||t_i - t_j|| \leq 0 \tag{22}$$

pour $u_1,\dots,u_n$ réels de somme nulle et $t_1,\dots,t_n$ dans $\underline{\underline{T}}$. Comme chacune de ces inégalités ne porte que sur un nombre fini de vecteurs dans $\underline{\underline{T}}$, on se ramène au cas où $\underline{\underline{T}}$ est de dimension finie $d \geq 1$. Sous cette hypothèse , soit m la mesure de Haar normalisée sur $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{H}}$ l'espace de Hilbert réel formé des fonctions complexes de carré intégrable sur $(\underline{\underline{T}},m)$, avec le produit scalaire $(f|g) = \int_{\underline{\underline{T}}} \mathrm{Re}\left\{\overline{f(x)}g(x)\right\} m(dx)$. Pour tout t dans $\underline{\underline{T}}$, la formule

$$f_t(x) = ||x||^{-(d+1)/2}.(1 - e^{i(t|x)}) \tag{23}$$

définit une fonction continue sur $\underline{\underline{T}} - \{0\}$. L'inégalité $1 - \cos a \leq a^2/2$ entraîne par un calcul facile l'inégalité

$$|f_t(x)|^2 \leq \inf\left(||t||^2.||x||^{1-d} , 4.||x||^{-1-d}\right) \quad ; \tag{24}$$

cela suffit à prouver que f_t appartient à $\underline{\underline{H}}$.

Posons $U(t) = \int_{\underline{\underline{T}}} |f_t(x)|^2\, m(dx)$ pour tout $t \in \underline{\underline{T}}$; il est immédiat qu'on a $U(0) = 0$, $U(\lambda t) = \lambda . U(t)$ pour $\lambda > 0$ et que la fonction U sur $\underline{\underline{T}}$ est invariante par les automorphismes de $\underline{\underline{T}}$; il existe donc une constante $C_d > 0$ telle que $U(t) = C_d^{-2}.||t||$. Comme on a $|f_t - f_{t'}| = |f_{t-t'}|$, l'application f de $\underline{\underline{T}}$ dans $\underline{\underline{H}}$ définie par $f(t) = C_d.f_t$ satisfait à (21) .

Q.E.D.

La fonction aléatoire définie dans le théorème 2 s'appelle le <u>processus de Lévy ou mouvement brownien à plusieurs paramètres</u> . Lorsque $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{R}}$, on retrouve le mouvement brownien d'après la forme de la covariance . Lorsque $\underline{\underline{T}}$ est de dimension finie $d \geq 1$, la démonstration précédente fournit une représentation de X par une intégrale portant sur un bruit blanc M sur $(\underline{\underline{T}},m)$, à savoir

$$X(t) = C_d . \int_{\underline{\underline{T}}} ||x||^{-(d+1)/2}.(1 - e^{i(t|x)}).M(dx) \quad .$$

Pour $d = 1$, on obtient l'expression suivante du mouvement brownien usuel

$$W(t) = (2\pi)^{-1/2} \int (1 - e^{ist}).|s|^{-1}.M(ds) \quad ;$$

c'est essentiellement la transformée de Fourier de la représentation (17) donnée antérieurement .

C'est L.Schwartz qui a démontré le premier que la fonction C_X définie par (20) est une covariance ; selon la légende , il aurait obtenu la main de la fille de P.Lévy pour récompense de cet exploit mathématique . Par ailleurs , P.Lévy a généralisé le théorème 2 en obtenant des processus satisfaisant à la relation

$$E[|X(t) - X(t')|^2] = ||t - t'||^{\alpha}$$

(pour α tel que $0 < \alpha \leq 2$) ; le cas $\alpha = 2$ est trivial (th. 1, d) . D'après le lemme 4 , il revient au même de dire que la fonction $C_{\alpha,s}$ définie par $C_{\alpha,s}(t,t') = e^{-s||t-t'||^{\alpha}}$ est une covariance pour $s > 0$ et $0 < \alpha \leq 2$.

6. <u>Propriétés markoviennes du processus de Lévy</u>

D'après le lemme 2 , deux variables aléatoires gaussiennes orthogonales dans un espace gaussien sont indépendantes . Cette propriété entraîne de remarquables relations d'indépendance dans les processus gaussiens . Pour les exprimer , nous aurons besoin de deux rappels et d'un lemme .

Soient $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ et soit P_i (pour $i = 1,2$) le projecteur orthogonal de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{H}_i$. On dit que $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ sont *permutables* si l'on a $P_1P_2 = P_2P_1$. Il revient au même de supposer qu'on a $P_2(\mathbf{H}_1) \subset \mathbf{H}_1$, ou encore que tout vecteur de $\mathbf{H}_1$ qui est orthogonal à $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$ est orthogonal à $\mathbf{H}_2$.

Par ailleurs , soient $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ et $\mathbf{G}$ des sous-tribus de $\mathbf{F}$. On dit que $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ sont *conditionnellement indépendantes par rapport à* $\mathbf{G}$ si l'on a

$$P[A_1 \cap A_2 \mid \mathbf{G}] = P[A_1 \mid \mathbf{G}].P[A_2 \mid \mathbf{G}] \tag{25}$$

pour A_1 dans $\mathbf{F}_1$ et A_2 dans $\mathbf{F}_2$.

LEMME 5.- *Soient $\mathbf{H}$ un espace gaussien et $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ deux sous-espaces vectoriels fermés de $\mathbf{H}$. On note $\mathbf{F}_i$ la tribu engendrée par $\mathbf{H}_i$ et $\mathbf{G}$ la tribu engendrée par $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$.*

a) *Pour tout $X \in \mathbf{H}$, on a $E[X \mid \mathbf{F}_1] \in \mathbf{H}_1$, et $X \mapsto E[X \mid \mathbf{F}_1]$ est l'opérateur de projection orthogonale de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{H}_1$.*

b) *Pour que les tribus $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ soient conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathbf{G}$, il faut et il suffit que les sous-espaces $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ de $\mathbf{H}$ soient permutables* .

a) Si X appartient à $\mathbf{H}_1$, on a $X = E[X \mid \mathbf{F}_1]$; si X est orthogonal à $\mathbf{H}_1$, il est indépendant de $\mathbf{F}_1$ d'où $E[X \mid \mathbf{F}_1] = E[X] = 0$. Ceci prouve a) d'après la linéarité de l'opérateur d'espérance conditionnelle .

b) Supposons d'abord que $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ soient permutables . Soit $\mathbf{K}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbf{H}_1$ orthogonaux à $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$; d'après les hypothèses faites , $\mathbf{H}_1$ est somme directe de $\mathbf{K}$ et de $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$ et $\mathbf{K}$ est orthogonal à $\mathbf{H}_2$. Notons $\mathbf{A}$ le sous-tribu de $\mathbf{F}$ engendrée par $\mathbf{K}$, et $\mathbf{C}$ la classe des ensembles de la forme $\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap G_i)$ (réunion disjointe) avec $A_i \in \mathbf{A}$ et $G_i \in \mathbf{G}$. Il est immédiat que $\mathbf{C}$ est une algèbre de Boole , et que $\mathbf{F}_1$ est la tribu , donc la classe monotone , engendrée par $\mathbf{C}$.

Pour prouver que $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathbf{G}$, il suffit de prouver que $P[A_1 | \underline{\underline{F}}_2]$ appartient à $\underline{\underline{G}}$ pour A_1 dans $\underline{\underline{F}}_1$. D'après ce qui précède et les propriétés des probabilités conditionnelles , il suffit de prouver ce fait pour A_1 de la forme $A \cap G$ avec $A \in \underline{\underline{A}}$ et $G \in \underline{\underline{G}}$. Comme $\underline{\underline{K}}$ est orthogonal à $\underline{\underline{H}}_2$, les tribus $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{F}}_2$ sont indépendantes (lemme 2, b) , d'où $P[A \cap G | \underline{\underline{F}}_2] = P[A].I_G \in \underline{\underline{G}}$ (*) .

Réciproquement , supposons que les tribus $\underline{\underline{F}}_1$ et $\underline{\underline{F}}_2$ soient **conditionnellement indépendantes** par rapport à $\underline{\underline{G}}$, et notons P_2 le projecteur orthogonal de $\underline{\underline{H}}$ sur $\underline{\underline{H}}_2$. Soit X dans $\underline{\underline{H}}_1$; on a $P_2(X) = E[X | \underline{\underline{F}}_2]$ d'après a) , et $E[X | \underline{\underline{F}}_2] \in \underline{\underline{G}}$ par l'hypothèse d'indépendance faite . Par suite , on a $P_2(\underline{\underline{H}}_1) \subset \underline{\underline{H}}_1$, ce qui montre que $\underline{\underline{H}}_1$ et $\underline{\underline{H}}_2$ sont permutables .

Q.E.D.

La propriété markovienne du mouvement brownien W s'interprète facilement dans ce cadre gaussien . Pour tout $a > 0$, définissons l'espace gaussien "intérieur" $\underline{\underline{I}}_a$ comme l'espace de Hilbert engendré par les variables $W(t)$ pour $|t| \leq a$, et de même l'espace "extérieur" $\underline{\underline{E}}_a$ par les variables $W(t)$ pour $|t| \geq a$. Il est immédiat que la projection orthogonale de $W(t)$ sur $\underline{\underline{I}}_a$ est égale à $W(a)$ si $t \geq a$ et à $W(-a)$ si $t \leq -a$; par suite , les sous-espaces $\underline{\underline{I}}_a$ et $\underline{\underline{E}}_a$ de L^2 sont permutables , et leur intersection est le sous-espace $\underline{\underline{P}}_a$ engendré par $W(a)$ et $W(-a)$. D'après le lemme 5 , les processus $(W(t))_{|t| \leq a}$ et $(W(t))_{|t| \geq a}$ sont donc conditionnellement indépendants par rapport à $(W(a), W(-a))$.

Passons maintenant au processus de Lévy X sur un espace de Hilbert $\underline{\underline{T}}$ de dimension finie $d \geq 1$. Pour tout $a > 0$, le sous-espace $\underline{\underline{I}}_a$ (resp. $\underline{\underline{E}}_a$) sera engendré par les variables aléatoires $X(t)$ pour $||t|| \leq a$ (resp. $||t|| \geq a$) . On doit à McKEAN [1] les résultats suivants , qui ont été généralisés par P.ASSOUAD au moyen des espaces de Soboleff (Séminaire de Probabilités de Strasbourg et article détaillé à paraître) :

a) lorsque d est impair , les sous-espaces $\underline{\underline{I}}_a$ et $\underline{\underline{E}}_a$ de L^2 sont permutables et leur intersection est engendrée par les variables aléatoires de la forme $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^i X(r.u)\Big|_{r=a}$ pour

(*) Nous disons par abus de langage qu'une variable aléatoire appartient à une sous-tribu de $\underline{\underline{F}}$ si elle est mesurable par rapport à cette sous-tribu .

$0 \leq i \leq (d-1)/2$ et $||u|| = 1$; ces dérivées normales sont relativement délicates à définir;

b) lorsque d est pair , les sous-espaces $\underline{\underline{I}}_a$ et $\underline{\underline{E}}_a$ de I^2 ne sont pas permutables .

On peut encore dire que, lorsque d est impair, le processus de Lévy X intérieur à la sphère de rayon a centrée en 0 est indépendant du processus X extérieur à cette même sphère , conditionnellement à la donnée de X et de ses dérivées normales d'ordre $\leq (d-1)/2$ sur la surface de la sphère . Par contre , lorsque d est pair , il n'existe pas de telle propriété markovienne .

Supposons encore $\underline{\underline{T}}$ de dimension finie $d \geq 1$; la distance de $X(t)$ au sous-espace $\underline{\underline{I}}_a$ de L^2 est l'erreur quadratique $E[(X(t) - E[X(t)|\underline{\underline{I}}_a])^2]^{1/2}$ commise en remplaçant $X(t)$ par l'extrapolation à partir des valeurs du processus $X(s)$ pour $||s|| \leq a$. On voit immédiatement que cette erreur est de la forme $\pi_d(||t||)$, où la fonction π_d ne dépend que de d ; de plus , on peut montrer que $\pi_d(r)$ <u>tend vers</u> 0 <u>pour tout</u> r <u>lorsque</u> d <u>tend vers l'infini</u> . On déduit de là l'égalité $\underline{\underline{I}}_a = \underline{\underline{I}}_b$ pour $0 < a < b$ lorsque $\underline{\underline{T}}$ est cette fois de dimension infinie . C'est ce résultat qui fait dire à P.Lévy que le processus X est "déterministe" lorsque $\underline{\underline{T}}$ est de dimension infinie .

7. <u>Processus de moyenne sphérique</u>

Supposons pour le moment que $\underline{\underline{T}}$ soit de dimension finie impaire $d = 2n + 1$. D'après la formule (19) , l'application X de $\underline{\underline{T}}$ dans L^2 est continue , et l'on peut définir l'intégrale forte suivante

(26) $$w_{d,r} = \int_S X(r.t)\sigma(dt) \qquad (r \geq 0) ,$$

où S est la sphère unité dans $\underline{\underline{T}}$ et σ la mesure de probabilité sur S invariante par rotations . On obtient ainsi une fonction aléatoire gaussienne $(w_{d,r})_{r\geq 0}$ dont la covariance se déduit de la covariance C_X de X par double intégration ; on trouve ainsi pour cette covariance :

(27) $$C_d(r,r') = \frac{1}{2}\left\{r + r' - a_d^{-1}\int_{-1}^{1}(r^2 + r'^2 - 2rr'x)^{1/2}(1 - x^2)^{n-1}\,dx\right\}$$

avec $a_d = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)^{n-1}\,dx$.

On déduit facilement de l'expression explicite (27) que les dérivées $(\frac{\partial}{\partial r})^i(\frac{\partial}{\partial r'})^j C_d(r,r')$ existent et sont continues pour $r > 0$, $r' > 0$, $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n$. D'après les résultats classiques de Loève , on en déduit que l'application $r \longmapsto w_{d,r}$ de $]0, \infty[$ dans L^2 est n fois continuement différentiable . On peut donc définir les dérivées en moyenne quadratique

$$(\frac{\partial}{\partial r})^i \int_S X(r.t)\, \sigma(dt)$$

pour $r > 0$ et $0 \leq i \leq n$; ce sont formellement les moyennes sphériques des dérivées normales auxquelles il a été fait allusion au n°6 .

Passons maintenant à la limite sur d . Lorsque $\underline{\underline{T}}$ est de dimension infinie , on ne peut plus définir les moyennes sphériques , mais la formule (27) montre que la limite

$$C_\infty(r,r') = \lim_{d\to\infty} C_d(r,r')$$

existe et qu'elleest donnée par

(28) $$C_\infty(r,r') = \frac{1}{2}\left\{r + r' - (r^2 + r'^2)^{1/2}\right\} .$$

Comme la fonction C_∞ est analytique sur $]0, \infty[\times]0, \infty[$, les résultats classiques de Loève montrent que l'application $r \longmapsto w_{\infty,r}$ de $]0, \infty[$ dans L^2 est analytique pour toute fonction aléatoire gaussienne $(w_{\infty,r})_{r\geq 0}$ de covariance C_∞ . Une telle fonction aléatoire est donc déterministe , en accord avec le caractère déterministe du processus X lorsque $\underline{\underline{T}}$ est de dimension infinie (cf. n° 6) .

8. <u>Prolongement analytique</u>

Le problème posé par P.Lévy dans [2] est celui de l'existence d'un prolongement analytique dans le plan complexe d'un processus de covariance C_∞ . Les raisonnements de McKean dans [1] montrent que le domaine maximum de prolongement analytique est l'ensemble des nombres complexes r tels que $|\mathrm{Arg}\, r| < \pi/4$. La méthode de McKean est assez compliquée et repose sur l'étude du rayon de convergence d'une série de puissances . Nous allons en donner une version simplifiée .

Nous remarquerons d'abord que le processus $(w_{\infty,\sqrt{u}})_{u\geq 0}$ a une covariance donnée par la formule

(29) $$D(u,u') = \frac{1}{2}\left\{u^{1/2} + u'^{1/2} - (u + u')^{1/2}\right\} .$$

Moyennant un changement de variable évident , le résultat de McKean est conséquence du théorème suivant .

THEOREME 3.- <u>Soit</u> $(A_u)_{u>0}$ <u>une fonction aléatoire gaussienne de covariance</u> D . <u>Soit</u> Π <u>l'ensemble des nombres complexes de partie réelle positive , et soit</u> U <u>l'intérieur de</u> Π . <u>Il existe un processus gaussien</u> $(B_u)_{u\varepsilon\Pi}$ <u>avec les propriétés suivantes</u> :

a) <u>on a</u> $B_u = A_u$ <u>pour</u> u <u>réel</u> > 0 ;

b) <u>l'application</u> $u \longmapsto B_u$ <u>de</u> Π <u>dans</u> L^2 <u>est continue</u> , <u>et sa restriction à</u> U <u>est holomorphe</u> .

<u>De plus</u> , U <u>est le domaine du prolongement analytique maximal de</u> A_u .

Notons $\underline{\underline{H}}$ l'espace de Hilbert $L^2(0,\infty)$(mesure de Lebesgue) ; pour u complexe et $x > 0$, posons

(30) $$F(u,x) = \frac{1}{2}\pi^{-1/4}\, x^{-3/4}\, (1 - e^{-ux}) .$$

Comme $1 - e^{-ux}$ est équivalent à ux pour x tendant vers 0 et u fixé , la fonction F(u, .) sur $]0, \infty[$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, \infty[$ nulle à l'origine . Le facteur exponentiel dans (30) permet de voir facilement que la fonction F(u, .) est de carré intégrable si et seulement si la partie réelle de u est positive . Pour tout $u \varepsilon \Pi$, on a l'inégalité

(31) $$\pi^{1/2}.\, |F(u,x)|^2 \leq \inf\left(|u|^2 x^{1/2} ,\ x^{-3/2} \right) \qquad (x > 0) ;$$

le théorème de convergence dominée montre alors que l'application $u \longmapsto F(u, .)$ de Π dans $\underline{\underline{H}}$ est continue et que sa restriction à U est holomorphe .

Supposons par ailleurs que U_1 soit un ouvert connexe de l'ensemble des nombres complexes et contienne U , et que F_1 soit une application holomorphe de U_1 dans $\underline{\underline{H}}$ telle que $F_1(u) = F(u, .)$ pour $u \varepsilon U$. Soit h une fonction continue à support compact dans $]0, \infty[$; posons $\Phi(u) = \int_0^\infty F(u,x)h(x)\, dx$ pour u complexe et $\Phi_1(u) = (F_1(u)|h)$ pour u dans U_1 . Alors Φ est holomorphe dans $\underline{\underline{C}}$ et Φ_1 dans U_1 , et Φ et Φ_1 coïncident dans U ; on en déduit que Φ et Φ_1 coïncident dans U_1 . Soient alors u dans U_1 et $C = ||F_1(u)||$;

on a donc l'inégalité

(32) $$\left|\int_0^{\infty} F(u,x).h(x)\ dx\right|^2 \leq C^2.\int_0^{\infty} |h(x)|^2\ dx$$

pour toute fonction continue à support compact h dans $]0, \infty[$, et par suite , la fonction $F(u, .)$ est de carré intégrable sur $]0, \infty[$. Comme on l'a vu , ceci entraîne $u \in \Pi$, d'où $U_1 \subset \Pi$ et finalement $U_1 \subset U$. On a donc prouvé que U est le domaine du prolongement analytique maximal de l'application $u \longmapsto F(u, .)$ sur $]0, \infty[$.

Soient u et u' strictement positifs . Un calcul immédiat donne

(33) $$\int_0^{\infty} F(u,x).F(u',x)\ dx = T(u) + T(u') - T(u + u')$$

avec la définition

(34) $$T(u) = \frac{1}{4}\pi^{-1/2}\int_0^{\infty} x^{-3/2}\ (1 - e^{-ux})\ dx \quad .$$

Une intégration par parties dans (34) permet de se ramener à la définition classique de la fonction gamma d'Euler , d'où $T(u) = \frac{1}{2}\ u^{1/2}$ (utiliser la formule $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{1/2}$) . On a donc

(35) $$D(u,u') = \int_0^{\infty} F(u,x).F(u',x)\ dx \qquad (u > 0\ ,\ u' > 0)\quad ;$$

si $\underline{\underline{K}}$ est le sous-espace gaussien de L^2 engendré par les variables aléatoires A_u pour $u > 0$, et $\underline{\underline{H}}_1$ le sous-espace fermé de $\underline{\underline{H}} = L^2(0,\infty)$ engendré par les fonction $F(u, .)$, il existe donc un isomorphisme σ de $\underline{\underline{H}}_1$ sur $\underline{\underline{K}}$ caractérisé par $\sigma(F(u, .)) = A_u$ pour $u > 0$.

Pour tout $h \in \underline{\underline{H}}$, la fonction $u \longmapsto (F(u, .)|h)$ est continue dans Π et holomorphe dans U ; si h est orthogonale à $\underline{\underline{H}}_1$, cette fonction s'annule sur $]0, \infty[$, donc partout dans Π . Par suite , $F(u, .)$ appartient à $\underline{\underline{H}}_1$ pour $u \in \Pi$. Si l'on pose $B_u = \sigma(F(u, .))$ pour $u \in \Pi$, les conditions a) et b) du théorème 3 sont satisfaites . Un argument analogue au précédent montre que tout prolongement analytique de l'application $u \longmapsto A_u$ de $]0 , \infty[$ dans L^2 prend ses valeurs dans $\underline{\underline{K}}$, d'où immédiatement la dernière assertion du théorème 3 .

Q.E.D.

9. Remarques finales

Dans tout cet exposé , nous avons implicitement considéré une variable aléatoire comme une classe d'équivalence presque sûre de fonctions mesurables sur $(\Omega, \underline{\underline{F}})$ et un processus comme une famille de telles variables aléatoires . En fait , P.Lévy a construit des réalisations presque sûrement continues du processus X . On peut aussi montrer qu'une série aléatoire $\sum_{n=0}^{\infty} A_n . z^n$,où la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est gaussienne , a le même rayon de convergence au sens L^2 ou au sens presque sûr , ce qui permet d'étendre les résultats du n° 8 en obtenant des versions holomorphes (presque sûrement) du processus $(B_u)_{u\in U}$.

Dans [2] , P.Lévy démontre que le domaine de prolongement analytique maximal du processus $(w_{\infty,r})$ est donné par l'inégalité $|\mathrm{Arg}\ r| < \pi/6$. En fait , son raisonnement est fautif à la page 164 . P. Lévy essaye de passer à la limite dans son intégrale (5.2.1); malheureusement , dans (5.2.2) les deux termes du membre de droite sont du même ordre de grandeur pour u dans un voisinage de 1 , région qui donne la contribution principale à l'intégrale . En fait , on a $\sigma^2_{\omega,h}(t) = (\frac{\partial}{\partial t})^h(\frac{\partial}{\partial t'})^h C_{\infty}(t,t')\big|_{t=t'}$; un calcul direct donne $\sigma^2_{\omega,1}(t) = 2^{-5/2}t^{-1}$ et $\sigma^2_{\omega,2}(t) = 7.2^{-9/2}t^{-3}$, au lieu des coefficients $2^{-7/2}$ et $15.2^{-11/2}$ trouvés par P.Lévy dans ces cas respectifs . En conclusion , la formule (5.2.7) de P.Lévy , sur laquelle repose le calcul des rayons de convergence , est fausse .

REFERENCES

[1] McKEAN , H.P. , Brownian motion with a several-dimensional time , Theory of Prob. and its Appl. , 8 (1963) , p. 335-354 .

[2] LÉVY , P. , A special problem of brownian motion and a general theory of gaussian random functions , Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability , Volume II , Univ. of Cal. Press , 1956 , p.133-175 .