4° Gouvernement général de l'Afrique occidentale française. *Carte géologique de reconnaissance à l'échelle du 500 000*e. *Notices explicatives sur les feuilles Conakry-Est* et *Conakry-Ouest*, rédigées par L. Renaud et L. Delaire ;

5° Zdeněk Štich. *La santé publique en Tchécoslovaquie* ;

6° *Československá Onkológia*, Rocnik I, cislo 1, 2, 3, 4. *Onkologia*. Rocnik, I, II, III.

ALGÈBRE. — *Théorie différentielle des groupes algébriques.* Note de M. **Pierre Cartier**, présentée par M. Jacques Hadamard.

En considérant l'hyperalgèbre d'un groupe formel comme le dual de l'algèbre des fonctions, on étend légèrement les résultats récents de Dieudonné. Classification des hyperalgèbres commutatives.

1. Cette Note a pour but d'annoncer la solution d'un certain nombre de problèmes de la théorie des variétés abéliennes, que A. Weil nous avait signalés.

Soient A et B deux variétés abéliennes de même dimension.

1° Un diviseur X sur A, linéairement équivalent aux diviseurs déduits de X par translation, est-il algébriquement équivalent à 0 ?

2° Si f est un homomorphisme purement inséparable de A sur B, y a-t-il un nombre fini de variétés abéliennes intermédiaires ?

3° L'homomorphisme canonique de A dans sa biduale est-il un isomorphisme birationnel ? (il est bijectif si la réponse à 1° est affirmative).

4° Peut-on associer aux homomorphismes de A dans B des matrices p-adiques lorsque p est la caractéristique du corps de base, analogues aux matrices q-adiques ($q \neq p$) introduites par Weil ?

Nous devons signaler que Barsotti a obtenu récemment des résultats importants dans cette direction.

2. Soit A une algèbre sur un corps k, somme directe des scalaires et d'un idéal bilatère A^+. Une application diagonale dans A est un homomorphisme Δ de A dans $A \otimes A$ telle que :

1° Les homomorphismes $(\Delta \otimes 1) \circ \Delta$ et $(1 \otimes \Delta) \circ \Delta$ de A dans $A \otimes A \otimes A$ soient égaux.

2° Les éléments de $\Delta(A)$ soient symétriques.

3° On ait $\partial(a) = \Delta(a) - a \otimes 1 - 1 \otimes a \in A^+ \otimes A^+$ pour $a \in A^+$.

Munie de Δ, l'algèbre A prend le nom d'*hyperalgèbre*. Comme exemples on pourra citer l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie ou l'hyperalgèbre d'un groupe formel (Dieudonné) ou algébrique ([1]).

On définit par récurrence sur n les sous-espaces A_n^+ de A^+ par $A_0^+ = (0)$ et la relation

$$x \in A^+_{n+1} \Leftrightarrow \partial(x) \in \sum_{i=1}^{n} A^+_i \otimes A^+_{n+1-i}.$$

Les sous-espaces $A_n = k.1 + A^+_n$ forment une filtration croissante de l'algèbre A et l'on a par construction $\Delta(A_n) \subset \sum_{i+j=n} A_i \otimes A_j$. Muni de l'opération $[a, b] = ab - ba$, le sous-espace A^+_1 est une algèbre de Lie, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$ de l'hyperalgèbre A.

On suppose dans la suite que *l'hyperalgèbre* A *est réunion des sous-espaces* A_n.

2. Supposons pour ce numéro que le corps k soit de caractéristique zéro.

Théorème 1. — *Si* A *est une hyperalgèbre, l'application identique de* $\mathfrak{g}(A)$ *dans* A *se prolonge en un isomorphisme de l'algèbre enveloppante de* $\mathfrak{g}(A)$ *sur* A. *Les homomorphismes de* A *dans une hyperalgèbre* B, *compatibles avec les applications diagonales de* A *et* B, *correspondent biunivoquement, par restriction, aux homomorphismes de* $\mathfrak{g}(A)$ *dans* $\mathfrak{g}(B)$. *Les sous-hyperalgèbres de* A *sont les sous-algèbres engendrées par les sous-algèbres de* $\mathfrak{g}(A)$, *et les idéaux bilatères* I *de* A *tels que* $\Delta(I) \subset A \otimes I + I \otimes A$ *sont les idéaux engendrés par les idéaux de* $\mathfrak{g}(A)$.

On déduirait facilement de ce théorème les résultats d'unicité de la théorie infinitésimale des groupes de Lie, ainsi que la formule de Hausdorff, tandis que les résultats d'existence s'obtiennent par une majoration due à Dynkin. Je reviendrai peut-être là-dessus dans un article consacré aux « fonctions analytiques sur les modules ».

3. Supposons désormais que le corps k soit parfait et de caractéristique $p \neq 0$. Les deux théorèmes suivants sont fondamentaux (le second étend un résultat de Dieudonné).

Théorème 2. — *Soit* A *une hyperalgèbre telle que* $\mathfrak{g}(A)$ *soit de dimension finie. L'espace vectoriel* A *possède une base* Z_α *où* α *parcourt l'ensemble des systèmes* $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ *d'entiers tels que* $0 \leq \alpha_i < p^{h_i}$ (h_i entier ≥ 0 fini ou non) *telle que :*

$$(1) \qquad \Delta(Z_\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} Z_\beta \otimes Z_\gamma, \qquad Z_0 = 1 \quad \textit{et} \quad Z_\alpha \in A^+ \quad \textit{pour} \quad \alpha \neq 0.$$

On peut traduire ce résultat ; soit A^* le dual de l'espace A et soit P l'application linéaire de $A^* \otimes A^*$ dans A^* transposée de Δ ; l'application P définit sur A^* une structure d'algèbre associative et commutative d'après les axiomes 1° à 3°. Le théorème 2 signifie qu'il existe un isomorphisme φ de A^* sur $k[[X_1, \ldots, X_n]]/\mathfrak{a}$, l'idéal $\mathfrak{a}$ étant engendré par les éléments $X_i^{p^{h_i}}$ pour h_i fini. Le système des éléments $x_i = \varphi^{-1}(X_i)$ pour un tel isomorphisme φ s'appelle un système de coordonnées dans A^*.

Théorème 3. — *Soient* A *et* B *deux hyperalgèbres telles que* $\mathfrak{g}(A)$ *et* $\mathfrak{g}(B)$ *soient de dimensions finies. Si* f *est un homomorphisme de* A *dans* B *compatible avec les applications diagonales, il existe un système de coordonnées* $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ *dans* A^*, *un système de coordonnées* $(y_j)_{1\leq j\leq n}$ *dans* B^* *et un entier* $r \leq \inf(m, n)$ *tels que*

$$(2)\qquad \begin{cases} {}^t f(y_j) = x_j^{p^{m_j}} & (1\leq j\leq r), \\ \phantom{{}^t f(y_j)} = 0 & (r < j \leq n), \end{cases}$$

les m_j *étant des entiers convenables.*

On peut étendre à nos hyperalgèbres les résultats de Dieudonné sur les coordonnées canoniques et pseudo-canoniques.

4. Soit A une hyperalgèbre *commutative* sur le corps k parfait de caractéristique $p \neq 0$ et soit $\mathfrak{d}_m(A)$ l'ensemble des vecteurs de Witt de longueur m à éléments dans A tels que

$$(3)\qquad (\Delta(a_0), \ldots, \Delta(a_{m-1})) = (a_0 \otimes 1, \ldots, a_{m-1} \otimes 1) + (1 \otimes a_0, \ldots, 1 \otimes a_{m-1})$$

l'addition désignant l'addition des vecteurs de Witt. On note $\mathrm{Dewd}(A) = \mathfrak{d}(A)$ la limite projective des $\mathfrak{d}_m(A)$ relativement aux applications induites par les opérateurs R_m [*cf.* une Note précédente [2] pour les notations] et l'on note $\mathfrak{d}'(A)$ la limite inductive des $\mathfrak{d}_m(A)$ pour les V_m. Les ensembles $\mathfrak{d}(A)$ et $\mathfrak{d}'(A)$ sont des modules sur l'anneau $\Lambda = \text{lim. proj.}\, W_m(k)$ et ils sont munis pe deux opérations semi-linéaires F et V, et F et R respectivement, déduites des opérations de même nom sur $W_m(A)$ par passage à la limite. Nous ne donnerons pas ici le formulaire correspondant.

Dans $\mathfrak{d}'(A)$, tout élément est annulé par une puissance de R; inversement si un Λ-module M est muni d'opérations F et R satisfaisant aux mêmes conditions que les opérations introduites plus haut et si tout élément de M est annulé par une puissance de R, il existe une hyperalgèbre commutative A, et à un isomorphisme près une seule, telle que $\mathfrak{d}'(A)$ soit isomorphe, avec les opérations F et R, au Λ-module M. Pour que A soit même l'hyperalgèbre d'un groupe abélien formel, il faut et suffit que l'opération R dans M soit surjective.

La classification obtenue ici est équivalente à celle de Dieudonné.

5. Nous allons appliquer ce qui précède aux groupes algébriques commutatifs; le théorème qui suit joue un rôle important dans la résolution du problème 4 signalé dans l'introduction :

THÉORÈME 4. — *Soient* G *un groupe algébrique commutatif défini sur un corps algébriquement clos de caractéristique* $p \neq 0$ *et* $\mathbf{U}(G)$ *son hyperalgèbre. Si l'application* $x \to px$ *de* G *dans* G *est surjective, le* Λ*-module* $\mathfrak{d}(\mathbf{U}(G))$ *est libre et si* p^n *est la partie inséparable du degré de l'application rationnelle* $x \to px$, *toute base de* $\mathfrak{d}(\mathbf{U}(G))$ *sur* Λ *possède* n *éléments.*

(1) *Comptes rendus*, 242, 1956, p. 322.
(2) *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 426.