admet une « traduction récursive » : le théorème énonçant la non-énumérabilité récursive de l'ensemble des fonctions caractéristiques récursives. Par contre, le théorème VI montre que la seconde démonstration n'admet pas de traduction récursive exacte.

(*) Séance du 23 septembre 1957.

(1) D. Lacombe, *Comptes rendus*, 245, 1957, p. 1040.

(2) *Cf.* par exemple, D. Lacombe, *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 838, § 5, th. III.

(3) Ce théorème VI peut aussi être considéré comme une forme renforcée d'un résultat de Kleene [*cf.* (1), t. VIII].

(*Institut H. Poincaré, Paris,* 5e; *University of Reading, Reading, Angleterre.*)

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Calcul différentiel sur les variétés algébriques en caractéristique non nulle.* Note (*) de M. **Pierre Cartier**, présentée par M. Jacques Hadamard.

On définit sur une variété algébrique V la notion d'opérateur différentiel et divers fibrés attachés canoniquement à V. On donne un théorème sur l'intégrabilité complète de certains systèmes d'équations différentielles. Application aux groupes algébriques.

1. Soit A une algèbre commutative sur un corps k. Par définition, un opérateur différentiel d'ordre 0 dans A est une homothétie $x \to ax$ ($a \in$ A fixé); par récurrence sur n, l'opérateur k-linéaire D de A dans A sera appelé opérateur différentiel d'ordre $\leqq n$, si pour tout $a \in$ A, l'application $x \to \mathrm{D}(ax) - a\mathrm{D}(x)$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqq n-1$ (1). Une dérivation n'est autre qu'un opérateur différentiel d'ordre $\leqq 1$ annulant 1. Les opérateurs différentiels dans A forment une k-algèbre, qui, si k est de caractéristique 0 et A un corps de type fini sur k, est engendrée par les dérivations et les homothéties; si k est de caractéristique $p \neq 0$ et si A admet une p-base finie, un opérateur différentiel est un opérateur additif D vérifiant, pour h assez grand, l'identité $\mathrm{D}(x^{p^h} y) = x^{p^h} \mathrm{D}(y)$.

2. Si n et r sont des entiers > 0, on notera $\mathrm{A}_{n,r}$ l'algèbre des polynomes à coefficients dans k en $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r$, sans terme constant et tronqués en degré $> n$; on notera $\mathrm{G}_{n,r}$ le groupe des automorphismes de l'algèbre $\mathrm{A}_{n,r}$.

Soit V^r une variété sans singularités sur le corps algébriquement clos k. Pour tout $x \in \mathrm{V}$, on note $\mathfrak{o}_x$ l'anneau local de x, $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_x$ et $(\mathrm{E}_n)_x$ l'ensemble des isomorphismes de $\mathrm{A}_{n,r}$ sur $(\mathrm{A}_n)_x = \mathfrak{m}_x/(\mathfrak{m}_x)^{n+1}$. Soient $u_1, \ldots, u_r$ des fonctions rationnelles définies en tout point d'un ouvert U de V et telles que, pour tout $x \in \mathrm{U}$, les fonctions $u_i - u_i(x)$ engendrent l'idéal $\mathfrak{m}_x$; il y a alors, pour $x \in \mathrm{U}$, un isomorphisme unique f_x de $\mathrm{A}_{n,r}$ sur $(\mathrm{A}_n)_x$ appliquant X_i sur la classe de $u_i - u_i(x)$. Sur l'ensemble A_n somme des $(A_n)_x$, les « cartes » $(f_x)_{x\in U}$ ainsi construites pour tous les systèmes $\{u_1, \ldots, u_r\}$ définissent une structure de fibré localement trivial de fibre type $A_{n,r}$, de groupe structural $G_{n,r}$. Par exemple, A_1 n'est autre que le fibré des covecteurs tangents, dont les sections sont les 1-formes différentielles.

Le théorème suivant est bien connu dans le cas des formes différentielles et implique l'invariance birationnelle des plurigenres :

THÉORÈME 1. — *La variété* V *étant complète, soit* E *un fibré de base* V, *de groupe* $G_{n,r}$ *opérant linéairement dans la fibre type* $F = k^N$ *associé au fibré principal* E_n. *L'espace vectoriel sur le corps* $k(V)$ (2) (resp. le corps k) *formé des sections rationnelles* (resp. partout définies) *du fibré* E *est un* « invariant birationnel ».

3. Soit T_n le fibré dual de A_n; on peut identifier $(T_n)_x$ à l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{m}_x$ nulles sur $(\mathfrak{m}_x)^{n+1}$. Pour toute section rationnelle D de T_n et toute fonction rationnelle f sur V, il y a une fonction rationnelle $\tilde{D}f$ bien déterminée par la condition $(\tilde{D}f)(x) = D_x(f - f(x))$ si f et D sont définies en x. L'application $D \to \tilde{D}$ est une bijection de l'ensemble des sections rationnelles de T_n sur l'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre $\leq n$ du corps $k(V)$, qui annulent 1.

On pose $T_x(V) = k \oplus \bigcup_{n>0} (T_n)_x$; la somme directe $T(V)$ des espaces $T_x(V)(x \in V)$ est l'espace des *distributions* sur V; toute application rationnelle $f : V \to W$ partout définie, définit une application $f_* : T(V) \to T(W)$ et l'on peut identifier $T(V \times W)$ et $T(V) \otimes_k T(W)$. Si V est affine, $T(V)$ s'identifie à l'ensemble des formes linéaires sur l'anneau de coordonnées de V, nulles sur un idéal de codimension finie.

4. Nous supposons désormais le corps k de caractéristique $p \neq 0$. On peut alors montrer que les anneaux $\mathfrak{o}_x$ ont une p-base.

THÉORÈME 2. — *Soit* S *un sous-fibré vectoriel du fibré* T_n. *On suppose que les opérateurs différentiels associés aux sections rationnelles de* S *forment une algèbre. Il existe alors sur l'ensemble* V *une structure de variété algébrique* V/S *et une seule pour laquelle l'application identique* j *de* V *soit une application rationnelle partout définie de* V *sur* V/S *et pour laquelle* S *soit le noyau de* $j_* : T_n(V) \to T_n(V/S)$.

Le corollaire suivant est l'analogue du théorème de Frobenius sur les systèmes de Pfaff complètement intégrables :

COROLLAIRE. — *Soit* T *un sous-fibré vectoriel de* T_1; *on suppose que les sections rationnelles de* T *forment une p-algèbre de Lie de champs de vecteurs sur* V. *Il existe alors sur* V *une structure de variété* V/T *et une seule pour laquelle l'application identique* $j : V \to V/T$ *soit rationnelle et partout définie et pour laquelle* T *soit le noyau de l'application linéaire tangente à* j.

5. Soit G un groupe algébrique défini sur le corps k. On peut munir $T_e(G)$ ([3]) d'une structure d'hyperalgèbre au sens de ([4]) et qui, lorsque le groupe G est affine, se réduit à l'hyperalgèbre définie dans ([5]). Si $f: G \to H$ est un homomorphisme de groupes algébriques, f_* induit un homomorphisme d'hyperalgèbre de $T_e(G)$ dans $T_e(H)$; l'idéal $f_*^{-1}(o)$ est l'idéal à gauche engendré par N^+ ([6]) pour une sous-hyperalgèbre N bien déterminée, appelée « *noyau* » de f. De plus, au moyen des translations à gauche et à droite, on peut « trivialiser » les fibrés T_n de deux manières, qui ne coïncident que si G est commutatif.

THÉORÈME 3. — *Soit* N *une sous-hyperalgèbre de dimension finie de* $T_e(G)$ *telle que l'idéal* $T_e(G)N^+$ *soit bilatère. Il existe sur l'ensemble* G *une structure de variété algébrique* G/N *et une seule, compatible avec la structure de groupe et pour laquelle les homomorphismes de* G *dans un groupe algébrique* H *dont le « noyau » contient* N *soient les homomorphismes rationnels de* G/N *dans* H.

En particulier, on peut définir le quotient d'un groupe commutatif G par une p-sous-algèbre de Lie de la p-algèbre de Lie de G ([7]). Le théorème 3 montre aussi que la classification des isogénies inséparables entre groupes algébriques est la même que celle des isogénies entre les groupes formels associés ([8]). On a des résultats analogues au théorème 3 pour les espaces homogènes.

6. Soit ω une 1-forme différentielle sur V à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. On suppose que, pour tous champs de vecteurs X, Y on a $d\omega(X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)]$ et l'on pose $C\omega(X) = X^{p-1}.\omega(X) - \omega(X^p) + \omega(X)^p$. On a alors $C\omega(X+Y) = C\omega(X) + C\omega(Y)$ et $C\omega(fX) = f^p C\omega(X)$ pour $f \in k(V)$. Cette opération, lorsque G est le groupe additif à une variable, se réduit à l'opération introduite en ([9]). On peut alors généraliser le critère donné en ([9]) pour les différentielles logarithmiques, en montrant que la condition nécessaire et suffisante pour que ω soit image réciproque par une application rationnelle de V dans G de la forme différentielle invariante à droite canonique sur G, est que $C\omega = o$. Ce résultat est aussi un critère d'intégrabilité d'une connexion sans courbure sur un espace fibré principal de base V et de groupe G.

(*) Séance du 23 septembre 1957.

([1]) Cette définition et les résultats du n° 1 sont dus à A. Grothendieck.

([2]) On note $k(V)$ le corps des fonctions rationnelles sur V.

([3]) On note e l'élément neutre de tout groupe.

([4]) *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 540.

([5]) *Comptes rendus*, 242, 1956, p. 322.

([6]) On rappelle que N^+ est l'idéal d'augmentation de l'hyperalgèbre N.

([7]) Ce résultat est dû à Barsotti et J.-P. Serre.

([8]) *Cf.* DIEUDONNÉ, *Amer. J. Math.*, 79, 1957, p. 331.

([9]) *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 426.