C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série I, p. 297-301, 1988 

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

# Comparaison des diverses théories d'intégration en analyse non standard

Pierre CARTIER et Yvette FENEYROL-PERRIN

***Résumé*** — L'analyse non standard permet de donner un sens rigoureux à la notion d'intégrale comme somme d'un nombre infiniment grand de termes infiniment petits. Nous donnons dans cet esprit une présentation de l'intégrale de Lebesgue, au moyen de sommes de Riemann. Le problème essentiel est d'assurer l'invariance par rapport au changement de subdivision d'un intervalle. Comme application, nous donnons un théorème de décomposition qui peut servir de fondement à la théorie de la moyennisation, au moins pour les fonctions d'une variable.

## Comparison between various integration theories in non-standard analysis

***Abstract*** — *Non-standard analysis enables one to define an integral as a sum of infinitely many contributions each of which is infinitely small. It is therefore possible to construct Lebesgue's integral using Riemann sums. We solve in this set-up the main stability problem pertaining to the change of subdivision of an interval. As an application, we state a decomposition theorem of an integrable function into a rapidly oscillating part and a tame part. This provides a rational foundation for the widely used averaging methods such as mean field, etc.*

***Abridged English Version*** — Non-standard analysis is a rigorous method, first devised by Robinson [1] and steadily improved during the past 20 years, to deal with infinitely large and infinitely small quantities. It is relatively easy to justify the *differential calculus,* using only simple algebraic rules to manipulate the small and the large; one needs only to keep in the foreground the distinction between *true equality,* denoted $a=b$, and *approximate equality,* denoted $a \simeq b$ meaning that $a-b$ is infinitely small.

It is more difficult to justify Cavalieri's view that an integral is a sum of infinitely many quantities, each of which is infinitely small. In order to remove known paradoxes, like the sum $a_1+\ldots+a_N$ where $a_i$ is 1 or 0 according to whether $i$ is finite or not, one needs to resort to the distinction between *internal* and *external* functions, sequences or sets. The main new tool is a notion of *hyperfinite* sets, that is a set which looks finite in some respects, but whose cardinality is infinitely large, or in a word sets which are finite but large.

A theory of measure and integral over hyperfinite sets has been devised by Loeb [2] and in a simpler form by Nelson [3]. This theory mimics Lebesgue's theory with very simple tools and provides new convenient foundations for probability theory. This "abstract" theory may be applied to the case of functions of one real variable. It is only necessary to replace a given interval I of the real line **R** by a subdivision T into infinitely small subintervals. There are however some drawbacks: the space of integrable functions is much too big and depends heavily on the approximation T of I. It seems that this is the main reason which hindered the use of Loeb's integral in problems of functional analysis. The well-known theorem asserting that Riemann sums converge to a limit for continuous functions, as well as Lusin's criterion used by Bourbaki [4] as a definition of measurability, suggest that we restrict the notion of integrable functions by a suitable continuity assumption. Once this is done, the resulting Lebesgue space $L^1$ is independent of the subdivision T of I, and gives a true image of the classical $L^1$ space. Moreover, Lebesgue's derivation theorem may be given a rather short non-standard proof.

Note présentée par Gustave CHOQUET.

0249-6291/88/03070297 $ 2.00 

In various questions concerning the mechanics (or electrodynamics) of continuous media, one resorts to an averaging method to remove local fluctuations of physical quantities. The same method is well-known in the statistical analysis of time series, where one separates the trend from the fluctuations. Our theory enables one to formulate a general decomposition theorem supplementing Lebesgue's classical decomposition.

A few remarks about the logical framework. The most ambitious formal system to deal with non standard analysis has been devised by Hrbacek [5] including the full hierarchy: standard, internal, external sets. Nelson's Internal Set Theory excludes external sets *per se*. We have no use for standard sets and use only external and hyperfinite (internal) sets. Our point of view is therefore very close to the one advocated by Vopenka [6].

---

1. Mesure sur un ensemble hyperfini. — On dit qu'un ensemble F est *hyperfini* s'il est interne et s'il existe une bijection interne de F sur un intervalle $[1, \nu]$ de l'ensemble des entiers limités (=finis) ou illimités (=infiniment grands). Exprimé sous une forme un peu vague, le principe de transfert affirme que la catégorie des ensembles finis et des applications externes a les mêmes propriétés que celle des ensembles hyperfinis et des applications internes.

Une *mesure* sur l'ensemble hyperfini F est une fonction interne $t \mapsto m(t)$ à valeurs réelles positives sur F. Si A est une partie interne de F, et $f$ une fonction numérique interne sur F, on pose

$$m(\mathrm{A}) = \sum_{t \in \mathrm{A}} m(t), \qquad \int_{\mathrm{A}} f\,dm = \sum_{t \in \mathrm{A}} f(t)\,m(t) \tag{1}$$

(somme de suites internes). On suppose dans la suite que la mesure $m(\mathrm{F})$ de l'ensemble F est limitée.

Une partie interne A de F est dite *rare* (pour $m$) si la mesure $m(\mathrm{A})$ est infiniment petite. On étend cette définition aux parties externes: A est dite rare si, pour tout nombre $a>0$ non infiniment petit, il existe une partie interne B de F, contenant A et telle que $m(\mathrm{B})<a$.

Une fonction interne $f$ sur F est dite *intégrable au sens de Loeb-Nelson* si l'intégrale $\int_{\mathrm{F}} |f|\,dm$ est limitée et si $\int_{\mathrm{A}} f\,dm$ est infiniment petit pour tout ensemble interne rare A. Toute fonction à valeurs limitées est intégrable.

Voici l'analogue de quelques résultats classiques (*voir* Nelson [3]):

(*a*) *Si l'intégrale* $\int_{\mathrm{F}} |f|\,dm$ *est limitée, f prend des valeurs limitées sauf sur un ensemble rare.*

(*b*) *Si l'intégrale* $\int_{\mathrm{F}} |f|\,dm$ *est infiniment petite, f prend des valeurs infiniment petites sauf sur un ensemble rare.*

(*c*) *Si l'intégrale* $\int_{\mathrm{F}} |f|\,dm$ *est limitée, f est somme d'une fonction intégrable g et d'une fonction singulière h* (*c'est-à-dire nulle en dehors d'un ensemble rare*) (théorème de Radon-Nikodym).

2. Intégration des fonctions continues. — Soit I un intervalle de la droite **R**, d'extrémités $a$ et $b$ limitées. Soit T une partie hyperfinie de I; on peut énumérer les éléments de T sous forme d'une suite interne croissante

$$t_0<t_1<\ldots<t_i<t_{i+1}<\ldots<t_\nu.$$

On dit que T est une *approximation* de I (ou un quasi-intervalle) si l'on a $a\simeq t_0$, $b\simeq t_\nu$ et $t_{i-1}\simeq t_i$ pour $1\leqq i\leqq\nu$ (on écrit $u\simeq v$ si $u-v$ est infiniment petit). On note $\mathrm{T}^-$ l'ensemble des nombres $t_i$ pour $0\leqq i<\nu$; pour $t$ dans $\mathrm{T}^-$ de la forme $t_i$, on note $\mathrm{I}_t$ l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ et $d_\mathrm{T} t$ (ou simplement $dt$) sa longueur $t_{i+1}-t_i$. La mesure de Lebesgue définie par T est la mesure $m_\mathrm{T}$ sur $\mathrm{T}^-$ définie par $m_\mathrm{T}(t)=d_\mathrm{T} t$ pour $t\in\mathrm{T}^-$. Si $f$ est une fonction interne définie sur I, l'intégrale $\int f\,dm_\mathrm{T}$ est la somme de Riemann $\sum_{i=0}^{\nu-1} f(t_i)(t_{i+1}-t_i)$. On la note $\int_\mathrm{I} f(t)\,d_\mathrm{T} t$.

Soit T′ une autre approximation de I, telle que $\mathrm{T}'\supset\mathrm{T}$. A toute fonction interne $f$ sur T on associe la fonction interne $\Pi f$ sur T′ telle que $\Pi f(t')=f(t)$ pour tout $t'$ tel que $t\leqq t'<t+d_\mathrm{T} t$. En sens inverse, on associe à toute fonction interne $g'$ sur T′ la fonction interne $\Pi^* g'$ sur T telle que $\Pi^* g'(t)=(d_\mathrm{T} t)^{-1}\int_t^{t+d_\mathrm{T} t} g'(t')\,d_{\mathrm{T}'} t'$. On a la formule d'adjonction

$$\int_\mathrm{I} f(t)\,\Pi^* g'(t)\,d_\mathrm{T} t=\int_\mathrm{I}\Pi f(t')\,g'(t')\,d_{\mathrm{T}'} t'. \tag{2}$$

S'il y a risque de confusion, on écrit $\Pi_{\mathrm{T}'\mathrm{T}}$ pour $\Pi$ et $\Pi^*_{\mathrm{T}\mathrm{T}'}$ pour $\Pi^*$.

On dit qu'une fonction $f$ définie dans une partie A de **R** est *continue* (ou plus précisément, S-continue au sens de Robinson [1]) si la relation $t\simeq t'$ entraîne $f(t)\simeq f(t')$ quels que soient les points $t$ et $t'$ de A. Le théorème de stabilité suivant traduit le classique résultat sur la convergence des sommes de Riemann attachées à une fonction continue.

Théorème 1. — (*a*) *Soit $f$ une fonction interne sur* T. *On a* $\Pi^*\Pi f=f$, *et*

$$\int_\mathrm{I} f(t)\,d_\mathrm{T} t=\int_\mathrm{I}\Pi f(t')\,d_{\mathrm{T}'} t'.$$

*De plus, si $f$ est continue, il en est de même de* $\Pi f$.

(*b*) *Soit $g'$ une fonction interne sur* T′. *On a* $\int_\mathrm{I} g'(t')\,d_{\mathrm{T}'} t'=\int_\mathrm{I}\Pi^* g'(t)\,d_\mathrm{T} t$. *Si $g'$ est continue, il en est de même de $\Pi^* g'$ et l'on a $g'(t')\simeq\Pi\Pi^* g'(t')$ pour tout $t'$ dans* T′.

(*c*) *Soit $f$ une fonction interne continue sur* I. *A un infiniment petit près, l'intégrale $\int_\mathrm{I} f(t)\,d_\mathrm{T} t$ est indépendante de l'approximation* T *de* I.

3. Intégrale de Lebesgue. — Soient I et T comme précédemment. On dit qu'une fonction interne $f$ sur T est *presque-continue* s'il existe une partie rare A de T telle que la restriction de $f$ à $\mathrm{T}\setminus\mathrm{A}$ soit continue. On dit que $f$ est intégrable au sens de Lebesgue si elle est presque-continue et intégrable au sens de Loeb-Nelson. On note $\mathrm{L}^1(\mathrm{T})$ l'espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur T.

Voici une version du théorème de dérivation de Lebesgue.

THÉORÈME 2. — *Soit $f$ une fonction dans* $L^1(T)$. *Il existe un ensemble rare* E *avec la propriété suivante: pour tout $t_0$ dans* $T\setminus E$ *et tout intervalle* J *de longueur infiniment petite contenant $t_0$, on a*

$$\frac{1}{m_T(J)}\int_J f(t)\,d_T t \simeq f(t_0). \tag{3}$$

La démonstration utilise le lemme suivant, du type de Vitali.

LEMME. — *Soit $\mu$ une mesure positive sur* T. *Il existe un ensemble interne* B *contenu dans* T *tel que l'on ait* $m_T(B) \leqq 3\mu(T)$ *et* $\mu(J) \leqq m_T(J)$ *pour tout intervalle* J *de longueur infiniment petite non contenu dans* B.

Il suffit de démontrer le théorème 2 lorsque $f$ est positive. Soit $\varepsilon > 0$ non infiniment petit. Comme $f$ est presque-continue, il existe un ensemble interne A tel que $m_T(A) \leqq \varepsilon$, $\int_A f(t)\,d_T t \leqq \varepsilon$, et que $f$ soit continue sur $T\setminus A$. On applique le lemme à la mesure $\mu$ définie par $\mu(B) = \alpha \int_{B \cap A} f(t)\,d_T t$, où $\alpha$ est un nombre strictement positif convenable. On construit alors un ensemble externe rare $E_\varepsilon$ tel que l'on ait

$$\left|\frac{1}{m_T(J)}\int_J f(t)\,d_T t - f(t_0)\right| \leqq \varepsilon$$

pour tout $t_0$ dans $T\setminus E_\varepsilon$ et tout intervalle J de longueur infiniment petite contenant $t_0$.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème de stabilité pour les espaces $L^1(T)$.

THÉORÈME 3. — *Soient* T *et* T′ *deux approximations de* I *telles que* $T \subset T'$.

(*a*) *Pour toute fonction $f$ dans* $L^1(T)$, *la fonction* $\Pi f$ *appartient à* $L^1(T')$, *et l'on a* $\Pi^* \Pi f = f$.

(*b*) *Pour toute fonction $g'$ dans* $L^1(T')$, *la fonction* $\Pi^* g'$ *appartient à* $L^1(T)$ *et l'on a* $g'(t') \simeq \Pi \Pi^* g'(t')$ *pour tout $t'$ dans le complémentaire d'une partie rare de* T′.

4. COMPARAISON DE L'INTÉGRATION DE LOEB-NELSON ET DE LEBESGUE. — Soient I et T comme précédemment. On dit qu'une fonction interne $f$ sur T est *rapidement oscillante* si l'on a $\int_J f(t)\,d_T t \simeq 0$ pour tout intervalle J.

THÉORÈME 4. — *Soit $f$ une fonction interne sur* T, *intégrable au sens de Loeb-Nelson. La fonction $f$ possède une décomposition $f = g + h$, où $g$ est intégrable au sens de Lebesgue, et $h$ est rapidement oscillante. De plus, il existe une approximation* S *de* I, *avec* $S \subset T$ *telle que $g$ soit infiniment proche dans* $L^1(T)$ *de* $\Pi_{TS}\Pi^*_{ST} f$.

La démonstration utilise la théorie des martingales. On considère une suite interne croissante $(S_n)_{0 \leqq n \leqq \nu}$ de parties internes de T telle que $S_\nu = T$, que $S_n$ soit finie pour $n$ limité, et que $S_n$ soit une approximation de I pour $n$ illimité. On pose $g_n = \Pi_{TS_n}\Pi^*_{S_n T} f$ pour $0 \leqq n \leqq \nu$ (en généralisant un peu le sens des opérateurs $\Pi$ et $\Pi^*$). Toutes ces fonctions sont intégrables au sens de Loeb-Nelson, et $g_n$ appartient à $L^1(T)$ pour $n$ limité. La suite $(g_n)_{0 \leqq n \leqq \nu}$ est une martingale. En améliorant un peu les résultats de Nelson [3], on montre qu'il existe un nombre illimité $\mu \leqq \nu$ tel que la suite $g_0(t), \ldots, g_\mu(t)$ soit convergente pour $t$ en dehors d'une partie (externe) rare de T. Il suffit de poser $g = g_\mu$.

Note reçue le 2 mai 1988, acceptée le 5 mai 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. ROBINSON, *Non-standard Analysis*, North Holland Publ. Co, 1966.

[2] P. LOEB, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 211, 1975, p. 113-122.

[3] E. NELSON, *Radically elementary probability theory*, Ann. of Math. Studies, 117, Princeton, 1987.

[4] N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. 1 à 4, Hermann, Paris, 1965.

[5] K. HRBACEK, *Fundamenta Math.*, 98, 1978, p. 1-19.

[6] P. VOPENKA, *Mathematics in the alternative set theory*, Teubner, Leipzig, 1979.

[7] P. CARTIER et Y. FENEYROL-PERRIN, Méthodes infinitésimales appliquées au calcul des probabilités, *Lecture Notes in Maths*, Springer (à paraître).

P. C. : *Centre de Mathématiques, École polytechnique,* 91128 *Palaiseau Cedex;*

Y. F.-P. : *Département de Mathématiques, Université Blaise-Pascal,* B. P. n° 45, 63170 *Aubière.*