VECTEURS ANALYTIQUES DANS LES REPRESENTATIONS DE GROUPES DE LIE.*

par P. Cartier et J. Dixmier.[1]

Introduction. Soit π une représentation continue[2] du groupe de Lie G dans l'espace de Banach $\mathfrak{H}$. Selon Harish-Chandra [1], on dit qu'un élément $\phi \in \mathfrak{H}$ est un *vecteur analytique* pour la représentation π si l'application $s \rightarrow \pi(s)\phi$ de G dans $\mathfrak{H}$ est analytique. Les vecteurs analytiques de $\mathfrak{H}$ forment un sous-espace vectoriel, non fermé en général, de $\mathfrak{H}$. Lorsque le groupe G est semi-simple et que la représentation π est "permise," Harish-Chandra a démontré dans [1] que les vecteurs analytiques sont partout denses dans $\mathfrak{H}$; nous nous proposons de généraliser ce résultat au cas d'un groupe de Lie quelconque et d'une représentation bornée sur un certain sous-groupe discrét. Le résultat précis est énoncé dans le théorème du § 6, qui est le résultat central de cet article.

Nous suivrons une méthode de démonstration analogue à celle de Harish-Chandra: alors que Harish-Chandra démontrait d'abord que les vecteurs analytiques sont partout denses dans le cas d'une représentation d'un groupe quasi-nilpotent, nous commencerons par une étude approfondie du cas des groupes résolubles; une fois obtenu le résultat pour les groupes résolubles, la démonstration suivra de très près celle de Harish-Chandra.

1. Notations. On désigne par $\boldsymbol{N}$ l'ensemble des entiers $\geqq 0$, par $\boldsymbol{Z}$ celui des entiers rationnels, par $\boldsymbol{R}$ le corps des nombres réels et par $\boldsymbol{C}$ le corps des nombres complexes.

L'élément neutre d'un groupe sera toujours noté e. Si f est une fonction sur un groupe G, la translatée à gauche ${}_sf$ $(s \in G)$ est définie par ${}_sf(s') = f(ss')$. La translatée à droite f_s est définie par $f_s(s') = f(s's)$. Sur un groupe localement compact G, une mesure de Haar est une mesure $\geqq 0$ non nulle

* Received November 4, 1957.

[1] Les numéros entre crochets renvoient à la Bibliographie située à la fin de l'article.

[2] La représentation π est dite continue si l'application $(x, \phi) \rightarrow \pi(x)\phi$ de $G \times \mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}$ est continue, ou, ce qui revient au même, si pour tout $\phi \in \mathfrak{H}$, l'application $x \rightarrow \pi(x)\phi$ de G dans $\mathfrak{H}$ est continue.

invariante à gauche; l'élément d'intégrale correspondant sera noté ds si s désigne l'élément générique de G. Une *semi-norme* sur G est une fonction semi-continue inférieurement $\rho > 0$ vérifiant l'inégalité $\rho(ss') \leqq \rho(s)\rho(s')$ pour $s, s' \in G$; pour toute semi-norme ρ on notera $L^p{}_C(G, \rho)$ l'espace des fonctions numériques complexes sur G de puissance p^e intégrable ($p \geqq 1$) pour la mesure $\rho(s)\,ds$, muni de la norme définie par $\| f \|_{p,\rho} = (\int_G |f(s)|^p \rho(s)\,ds)^{1/p}$; la représentation régulière π de G dans $L^p{}_C(G, \rho)$ est définie par $\pi(s)f = {}_{s^{-1}}f$ pour $f \in L^p{}_C(G, \rho)$.

Les espaces de Banach sont toujours supposés complexes (mais il n'y aurait pratiquement rien de changé s'ils étaient supposés réels).

Si $\mathfrak{H}$ est un espace de Banach, on désigne par $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ l'espace de Banach des endomorphismes continus de $\mathfrak{H}$. Si ρ est une semi-norme sur le groupe localement compact G et π une représentation continue de G dans l'espace de Banach $\mathfrak{H}$ telle que $\| \pi(s) \| \leqq \rho(s)$ pour tout $s \in G$, on pose

$$\pi(f) = \int_G f(s)\pi(s)\,ds \quad \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$$

pour $f \in L^1{}_C(G, \rho)$.

Tous les groupes de Lie envisagés sont supposés réels, sauf mention du contraire.

Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$; on note exp l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G, et pour toute représentation continue π de G dans un espace vectoriel de dimension finie, on note $d\pi$ la représentation correspondante de $\mathfrak{g}$. On a alors, pour tout $S \in \mathfrak{g}$

$$(1) \qquad \pi(\exp S) = \exp d\pi(S)$$

où le second membre est défini comme d'habitude par $\exp T = \sum_{n \geqq 0} T^n/n!$,

Soient G_1 et G_2 des sous-groupes de G, on écrira $G = G_1 \cdot G_2$ si et seulement si les conditions suivantes sont remplies:

1) G_1 et G_2 sont des sous-groupes analytiques de G;

2) l'application $(s_1, s_2) \to s_1 s_2$ de $G_1 \times G_2$ dans G est un isomorphisme de la première variété analytique sur la seconde.

2. Rappel de certains lemmes.

LEMME 1. *Soient E un espace localement compact, μ une mesure $\geqq 0$ sur E, $\mathfrak{H}$ l'espace de Banach des fonctions numériques complexes μ-intégrables, V une variété analytique complexe et f une fonction numérique complexe continue sur $V \times E$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

(i) *il existe une fonction μ-intégrable $g \geqq 0$ sur E telle que l'on ait $|f(z,x)| \leqq g(x)$ pour tout $z \in V$ et tout $x \in E$;*

(ii) *pour tout $x \in E$, la fonction $z \to f(z,x)$ est holomorphe sur V.*

Si l'on note alors $\psi(z) \in \mathfrak{H}$ la fonction $x \to f(z,x)$, l'application $z \to \psi(z)$ de V dans $\mathfrak{H}$ est holomorphe.

C'est le lemme 23 de [1].

LEMME 2. *Soient G un groupe de Lie réel, $\mathfrak{H}$ un espace de Banach, π une représentation continue de G dans $\mathfrak{H}$ et ψ un élément de $\mathfrak{H}$. On suppose que l'application $s \to \pi(s)\psi$ est analytique en e; alors le vecteur ψ est analytique pour la représentation π.*

Cf. [1], p. 209, lignes 7-11.

LEMME 3. *Soient G un groupe de Lie réel, $\mathfrak{H}$ un espace de Banach, π une représentation continue de G dans $\mathfrak{H}$. Soit ρ une semi-norme sur G telle que $\| \pi(s) \| \leqq \rho(s)$ pour tout $s \in G$. Alors, si les vecteurs de $L^1{}_C(G,\rho)$ analytiques pour la représentation régulière sont partout denses dans $L^1{}_C(G,\rho)$, les vecteurs de $\mathfrak{H}$ analytiques pour π sont partout denses dans $\mathfrak{H}$.*

Soit A l'ensemble des éléments de $L^1{}_C(G,\rho)$ analytiques pour la représentation régulière. Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs $\pi(f)x$, où $x \in \mathfrak{H}$ et $f \in A$. Les éléments de $\mathfrak{K}$ sont analytiques pour π ([1], lemme 24), et il suffit de prouver que $\mathfrak{K}$ est partout dense dans $\mathfrak{H}$, autrement dit, que si ϕ est une forme linéaire continue sur $\mathfrak{H}$ nulle sur $\mathfrak{K}$, on a $\phi = 0$. Or, pour toute $f \in A$ et tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$0 = \phi(\pi(f)x) = \int_G \phi(\pi(s)x)f(s)\,ds = \int_G \phi(\rho(s)^{-1}\pi(s)x)f(s)\rho(s)\,ds.$$

Puisque A est partout dense dans $L^1{}_C(G,\rho)$, on en déduit que $\phi(\rho(s)^{-1}\pi(s)x) = 0$ localement presque partout sur G, donc que $0 = \phi(\pi(e)x) = \phi(x)$ puisque la fonction $s \to \phi(\pi(s)x)$ est continue. D'où notre assertion (cf. aussi [1], lemme 25).

LEMME 4. *Soient X et Y deux variétés analytiques réelles, Y étant compacte, et f une application analytique de $X \times Y$ dans un espace de Banach $\mathfrak{H}$. Tout point de X possède alors un voisinage ouvert V ayant les propriétés suivantes:*

(i) *il existe un système de coordonnées analytiques $(t_1, \cdots, t_n)$ dans V;*

(ii) *il existe des applications analytiques f_e de Y dans $\mathfrak{H}$*

$$(\boldsymbol{e} = (e_1, \cdots, e_n) \in \boldsymbol{N}^n)$$

telles que pour $x \in V$ et $y \in Y$, on ait:

$$f(x, y) = \sum_{e \in N^n} f_e(y) t_1^{e_1}(x) \cdots t_n^{e_n}(x) \tag{2}$$

cette somme étant absolument et uniformément convergente dans $V \times Y$.

Il suffit de reprendre pratiquement sans changement, la démonstration de [1], de la ligne 20 le la p. 221 à la ligne 19 de la p. 222, en remplaçant partout G par X et K par Y.

3. Structure des groupes résolubles. Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie résoluble réelle et $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{h}$ contenant $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$; on note k la dimension de $\mathfrak{n}$ et n celle de $\mathfrak{h}$. Comme toute algèbre de Lie résoluble contient un idéal de codemnsion 1 et que tout sous-espace de $\mathfrak{h}$ contenant $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{h}$, il existe une suite de sous-espaces $\mathfrak{h}_i$ de $\mathfrak{h}$ ayant les propriétés suivantes:

a) $\mathfrak{h}_i$ est de dimension i pour $0 \leqq i \leqq n$;

b) $\mathfrak{h}_i$ est un idéal de $\mathfrak{h}_{i+1}$ pour $0 \leqq i \leqq n-1$;

c) $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{n}$.

La propriété a) nous permet de choisir une base $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathfrak{h}$ telle que $(X_1, \cdots, X_i)$ soit une base de $\mathfrak{h}_i$. Ces données resteront fixées dans tout ce paragraphe.

LEMME 5. *Il existe un groupe de Lie réel H ayant $\mathfrak{h}$ pour algèbre de Lie et jouissant des propriétés suivantes:*

(i) *l'application $\phi: (t_1, \cdots, t_n) \to \prod_{i=1}^{n} \exp t_i X_i$ de $\boldsymbol{R}^n$ dans H est un isomorphisme de variété analytique;*

(ii) *soit $h \to (x_1(h), \cdots, x_n(h))$ l'application réciproque de ϕ et soit A l'algèbre complexe de fonctions sur H engendrée par 1, les x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ et les* $\exp \alpha x_j$ $(\alpha \in \boldsymbol{C}, k < j \leqq n)$; *pour toute fonction $f \in A$, il existe des fonctions $f_p, f_p' \in A$ telles que l'on ait l'identité:*

$$f(hh') = \sum_{p=1}^{m} f_p(h) f_p'(h'). \tag{3}$$

Nous raisonnerons par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant trivial; nous supposerons donc $n > 0$ et nous poserons $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_{n-1}$, $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{h}'$; la dimension k' de $\mathfrak{n}'$ est égale à $n-1$ si $\mathfrak{n}=\mathfrak{h}$, et est égale à k si $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{h}'$; on peut alors construire un groupe de Lie réel H', une application ϕ', une algèbre A' ayant les propriétés (i) et (ii) de l'énoncé, où l'on doit remplacer n par $n-1$ et k par k'.

A) Pour toute fonction $f\in A'$, le sous-espace vectoriel de A' engendré par les translatées à droite de f est de dimension finie sur $\boldsymbol{C}$ d'après la formule (3) ; par suite, A' est réunion de ses sous-espaces de dimension finie invariants par les translations à droite. Soient V' un tel sous-espace et π' la représentation de H' dans V' définie par $\pi'(h)\cdot f=f_h$.

Soit $(f_j)_{1\leqq j\leqq m}$ une base de V'; d'après la condition (ii) de l'énoncé il existe des fonctions $a_{lj}\in A'$ telles que:

$$\pi'(h)f_l=\sum_{j=1}^{m}a_{lj}(h)f_j \qquad (1\leqq l\leqq m)\,; \tag{4}$$

mais, si $h=\exp tX_i$ avec $1\leqq i\leqq k'$, la définition des x_j' montre que $x_j'(h)=0$ pour $j>k'$ et $x_j'(h)=\delta_{ij}t$ (indice de Kronecker) pour $1\leqq j\leqq k'$. D'après la définition de A', on voit que pour tout $f\in A'$, $f(\exp tX_i)$ est un polynome en t pour $1\leqq i\leqq k'$; d'après la formule (4), la matrice de $\pi'(\exp tX_i)$ par rapport à la base (f_j) est donc un polynome en t puisque $a_{lj}\in A'$; mais d'après la formule (1), on a

$$\pi'(\exp tX_i)=\exp d\pi'(tX_i)=\sum_{r\geqq 0}\,(d\pi'(X_i))^r t^r/r\,!$$

ce qui impose que $d\pi'(X_i)$ soit nilpotent pour $1\leqq i\leqq k'$.

Soit $(V'_r)_{0\leqq p\leqq m}$ une suite de Jordan-Hölder de V' pour la représentation π' de H'; d'après le théorème de Lie sur les groupes résolubles, les espaces V_p'/V'_{p-1} sont de dimension 1. Pour $1\leqq i\leqq k'$, l'opérateur nilpotent $d\pi'(X_i)$ induit un opérateur nul dans V_p'/V'_{p-1}, autrement dit applique V_p' dans V'_{p-1}. Supposons la base (f_j) adaptée à la suite (V_p'), c'est-à-dire que V_p' admet $(f_1,f_2,\cdot\cdot\cdot,f_p)$ pour base; alors la matrice représentant $d\pi'(X_i)$ est de diagonale nulle pour $1\leqq i\leqq k'$. Il en résulte que si $Y(u)=X_i+\sum_j u_jX_j$ $(1\leqq j\leqq k';\ 1\leqq i\leqq n-1)$, la matrice qui représente $d\pi'(Y(u))$ est triangulaire et que ses termes non diagonaux sont linéaires en $u_1,\cdot\cdot\cdot,u_{k'}$; si $1\leqq i\leqq k'$, ses termes diagonaux sont nuls.[2a] Du lemme A de l'Appendice résulte que les coefficients de la matrice associée à l'opérateur $\pi'(\exp tY(u))$ $=\exp(td\pi'(Y(u)))$ sont de la forme

$$\sum_{\alpha}E_\alpha(t)P_\alpha(u_1,\cdot\cdot\cdot,u_{k'}) \tag{5}$$

[2a] On notera que dans vous les cas les termes diagonaux de $d\pi'(Y(u))$ sont indépendants $u_1,\cdot\cdot\cdot,u_{k'}$.

où les P_α sont des polynomes et où les E_α sont des exponentielles-polynomes[3] *et même des polynomes si $1 \leqq i \leqq k'$.*

Or, de la formule (4) résulte $f_l(h) = \sum_{j=1}^{m} a_{lj}(h) f_j(e)$ et par suite, f_l est de la forme (5); comme A' est réunion de sous-espaces analogues à V', on voit que, pour tout $f \in A'$, la fonction

$$(t, u) \to f(\exp t(X_i + \sum_{j=1}^{k'} u_j X_j))$$

est du type (5).

B) Soit D la dérivation $Y \to [X_n, Y]$ de $\mathfrak{h}'$ et soit $\sigma(v)$ l'automorphisme $\exp vD$ de $\mathfrak{h}'$; comme D applique $\mathfrak{h}'$ dans $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{h}' = \mathfrak{n}'$, on a $\sigma(v) \cdot Y - Y \in \mathfrak{n}'$ pour tout $Y \in \mathfrak{h}'$, et les coefficients de $\sigma(v) \cdot Y - Y$ par rapport à la base $(X_1, \cdots, X_{k'})$ de $\mathfrak{n}'$ sont des exponentielles-polynomes en v et même des polynomes si $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$.[3a] De ce qu'on a démontré en A), il résulte alors que pour toute fonction $f \in A'$, la fonction $(t_i, v) \to f(\exp t_i \sigma(v) \cdot X_i)$ est de la forme:

$$\sum_\alpha E_\alpha(t_i) E_\alpha'(v) \tag{6}$$

où les E_α sont des exponentielles-polynomes et même des polynomes si $1 \leqq i \leqq k'$, tandis que les E_α' sont des exponentielles-polynomes et même des polynomes si $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$.

Soit $\tau(v)$ l'automorphisme du groupe simplement connexe H' associé à l'automorphisme $\sigma(v)$ de $\mathfrak{h}'$; pour $h = \prod_{i=1}^{n-1} \exp t_i X_i$, on a:

$$\tau(v) \cdot h = \prod_{i=1}^{n-1} \exp t_i \sigma(v) \cdot X_i. \tag{7}$$

De la définition de A', de la formule (6) et de la formule analogue à la formule (3) pour $n-1$ facteurs (que se déduit de (3) par récurrence immédiate), on déduit finalement que, *pour toute fonction $f \in A'$, la fonction $(h, v) \to f(\tau(v) \cdot h)$ est de la forme:*

$$\sum_\alpha E_\alpha(v) f_\alpha(h) \tag{8}$$

où $f_\alpha \in A'$ et les E_α sont des exponentielles-polynomes. Si $k = n$ (c'est-à-dire $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$), *les E_α sont même des polynomes.*

[3] On appelle exponentielle-polynome à p variables $u_1, \cdots, u_p$ réelles ou complexes, une fonction de la forme: $\sum_i P_i(u_1, \cdots, u_p) \exp \sum_j a_{i,j} u_j$ où les P_i sont des polynomes à coefficients complexes et les $a_{i,j}$ des constantes complexes.

[3a] On notera que dans ce dernier cas, la dérivation D est nilpotente.

C) On peut maintenant former le produit semi-direct H de H' et $\boldsymbol{R}$ au moyen du groupe à un paramètre $\tau(v)$ d'automorphismes de H'. On rappelle que ce produit semi-direct est, en tant que variété, identique à $H' \times \boldsymbol{R}$ et que la loi de groupe est donnée par:

$$(h, v)(h', v') = (h \cdot \tau(v)(h'), v + v'). \tag{9}$$

Si l'on identifie X_n au générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $v \to (e, v)$ de H, on voit immédiatement que $\mathfrak{h}$ s'identifie à l'algèbre de Lie de H, H' étant identifié au groupe des (h, e).

On a alors:

$$\phi(t_1, \cdots, t_n) = (\phi'(t_1, \cdots, t_{n-1}), e)(e, t_n) = (\phi'(t_1, \cdots, t_{n-1}), t_n)$$

ce qui prouve que ϕ est un isomorphisme de variété analytique. De plus, d'après la définition des x_i, on a:

$$x_i(h, v) = x_i'(h), \quad 1 \leqq i < n; \qquad x_n(h, v) = v$$

et par suite A est l'ensemble des fonctions de la forme (8) (où les E_α sont des exponentielles-polynomes en général, des polynomes si $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$). La formule (3) pour $f \in A$ résulte alors immédiatement de la définition de la loi de composition dans H (cf. (9)) et de la conclusion de B).—c. q. f. d.

Nous allons, en vue de besoins ultérieurs, déterminer la mesure de Haar sur le groupe H. L'automorphisme $\tau(v)$ de H' transforme une mesure de Haar μ sur H' en $\Delta(v)\mu$, où $\Delta(v)$ est le déterminant de l'automorphisme contragrédient de $\sigma(v)$; on a donc

$$\Delta(v) = (\det \sigma(v))^{-1} = \exp - vTr(D).$$

Si ν est la mesure de Haar usuelle sur $\boldsymbol{R}$, la formule (9) montre que la translation à gauche par (h, v) transforme la mesure μ en la mesure $\Delta(v)\mu \otimes \nu$; la mesure $\Delta(v)\, d\mu(h) d\nu(v)$ est donc une mesure de Haar sur H. Raisonnant par récurrence sur n, on voit que la mesure de Haar sur H est $\exp(\alpha_{k+1}x_{k+1} + \cdots + \alpha_n x_n) dx_1 \cdots dx_n$ en posant $\alpha_i = -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X_i)$.

4. Vecteurs analytiques. Cas des groupes résolubles.

LEMME 6. *Soit N un groupe de Lie réel résoluble, connexe et simplement connexe. Soit ρ une semi-norme sur N. Les vecteurs de $L^1{}_C(N, \rho)$ analytiques pour la représentation régulière sont partout denses dans $L^1{}_C(N, \rho)$.*

A) Comme deux groupes de Lie connexes et simplement connexes ayant des algèbres de Lie isomorphes sont isomorphes, on peut d'après le lemme 5 trouver des fonctions $x_1, \cdots, x_n$ sur N ayant les propriétés suivantes:

a) l'application $h \rightarrow (x_1(h), \cdots, x_n(h))$ de N dans $\boldsymbol{R}^n$ est un isomorphisme de variété analytique;

b) il existe des exponentielles-polynomes P_i telles que:

$$(10) \quad x_i(hh') = P_i(x_1(h), \cdots, x_n(h);\ x_1(h'), \cdots, x_n(h')) \quad (1 \leqq i \leqq n);$$

c) la mesure de Haar sur N est de la forme $(\exp \sum \alpha_i x_i)\, dx_1 \cdots dx_n$. De plus, comme d'après (3) l'algèbre A du lemme 5 est réunion de ses sous-espaces de dimension finie invariants par les translations à gauche, on peut trouver des fonctions *réelles* y_j et a_{jk} $(1 \leqq j, k \leqq m)$ sur N, s'exprimant comme exponentielles-polynomes en les x_i et telles que:

d) $m \geqq n$ et $x_j = y_j$ pour $1 \leqq j \leqq n$;

e) on ait les identités:

$$(11) \qquad y_j(hh') = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(h) y_k(h').$$

Comme les exponentielles-polynomes se prolongent en des fonctions entières de variables complexes, on peut d'après le principe du prolongement des identités, plonger N dans un groupe de Lie complexe N^c, les fonctions x_i, y_j et a_{jk} se prolongeant en des fonctions holomorphes sur N^c de sorte que les x_i forment un système de coordonnées complexes sur N^c et que les identités (10) et (11) soient valables sur N^c.

Enfin, pour achever ces préliminaires, notons que sur $\boldsymbol{R}$, toute seminorme est majorée par une exponentielle: $\rho(x) \leqq M \exp A\,|x|$ $(M, A \in \boldsymbol{R})$ (cf. par exemple [2], chap. VI). Revenant à la définition des x_i (lemme 5) et utilisant l'inégalité $\rho(\prod_{i=1}^{n} \exp t_i X_i) \leqq \prod_{i=1}^{n} \rho(\exp t_i X_i)$ on déduit la majoration:

$$(12) \qquad \rho(h) \leqq M \exp A \sum_{i=1}^{n} |x_i(h)|, \qquad (h \in N)$$

pour une constante réelle A convenable et $M > 0$.

B) Soient $\mathfrak{Q}^c$ l'espace vectoriel complexe des formes quadratiques en des variables $Y_1, \cdots, Y_m$ à coefficients complexes, $\mathfrak{Q}$ le sous-espace réel formé des formes quadratiques à coefficients réels et $\mathfrak{Q}^+$ le cône ouvert de $\mathfrak{Q}$ formé des formes quadratiques positives et non dégénérées. Nous définirons une représentation holomorphe du groupe opposé au groupe complexe N^c dans $\mathfrak{Q}^c$ en posant:

$$(13) \quad (\pi(h)F)(Y_1, \cdots, Y_m) = F(\sum_k a_{1k}(h) Y_k, \cdots, \sum_k a_{mk}(h) Y_k)$$

pour $F \in \mathfrak{Q}^c$ et $h \in N^c$.

Comme $\mathfrak{Q}^+$ est ouvert dans $\mathfrak{Q}$, pour h appartenant à un certain voisinage ouvert V de e dans N^c et $F \in \mathfrak{Q}^+$, la forme $\Re(\pi(h)F) - \frac{1}{2}F$ appartient à $\mathfrak{Q}^+$ ($\Re$ désignant la partie réelle). On en déduit, pour $h \in V$, l'inégalité:

$$\Re F({}_h(y_1), \cdots, {}_h(y_m)) \geqq \tfrac{1}{2}F(y_1, \cdots, y_m)$$

d'où, si $f = \exp - F(y_1, \cdots, y_m)$:

$$|\,{}_hf\,| = \exp - \Re F({}_h(y_1), \cdots, {}_h(y_m)) \leqq \exp - \tfrac{1}{2}F(y_1, \cdots, y_m).$$

Or, puisque $F \in \mathfrak{Q}^+$, il existe une constante réelle $\alpha > 0$ telle que la forme $F(Y_1, \cdots, Y_m) - \alpha(Y_1{}^2 + \cdots + Y_n{}^2)$ soit positive; pour $h \in V$, on aura alors:

$$(14) \qquad |\,{}_hf\,| \leqq \exp - \tfrac{1}{2}\alpha(x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2).$$

D'après la formule (12), la formule (14) et la forme de la mesure de Haar sur N, on a donc ${}_hf \in L^1{}_C(N, \rho)$ pour $h \in V$; de plus, pour h' fixé dans N, ${}_hf(h') = f(hh')$ dépend holomorphiquement de $h \in V$. L'inégalité (14) et le lemme 1 montrent que l'application $h \rightarrow {}_hf$ de V dans $L^1{}_C(N, \rho)$ est holomorphe, de sorte que f est un vecteur analytique de $L^1{}_C(N, \rho)$ pour la représentation régulière (lemme 2).

C) Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des fonctions sur N de la forme $\exp - F(y_1, \cdots, y_m)$ axec $F \in \mathfrak{Q}^+$ et soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble des combinaisons linéaires complexes d'éléments de $\mathfrak{F}$. Pour démontrer le lemme, il reste à faire voir que $\mathfrak{G}$ est partout dense dans $L^1{}_C(N, \rho)$, ce que nous ferons par une méthode un peu différente de celle de [1], pp. 218-220. Observons pour cela que la famille $\mathfrak{F}$ a les propriétés suivantes:

1) Les fonctions de $\mathfrak{F}$ sont continues, partout > 0 sur N, et nulles à l'infini d'après (14).

2) Le produit de deux fonctions de $\mathfrak{F}$ est dans $\mathfrak{F}$.

3) La famille $\mathfrak{F}$ est invariante par les translations à gauche, car si $f = \exp - F(y_1, \cdots, y_m)$, on a ${}_hf = \exp - (\pi(h)F)(y_1, \cdots, y_m)$; mais pour $h \in N$, la matrice $\| a_{jk}(h) \|$ est réelle et par suite $\pi(h)F \in \mathfrak{Q}^+$ si $F \in \mathfrak{Q}^+$.

4) $\mathfrak{F}$ sépare les points de N: raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe $h_0, h_1 \in N$ avec $h_1 \neq e$ et $f(h_0h_1) = f(h_0)$ pour toute $f \in \mathfrak{F}$; d'après la propriété précédente, on aurait pour $f \in \mathfrak{F}$ et $h \in N$:

$$f(hh_1) = {}_{hh_0^{-1}}f(h_0h_1) = {}_{hh_0^{-1}}f(h_0) = f(h)$$

d'où $f(h) = f(hh_1{}^m)$ pour toute $f \in \mathfrak{F}$ et tout entier m. Mais lorsque m tend vers l'infini, il en est de même de h_1^{m}[4]; comme f est nulle à l'infini sur N, on en déduit $f=0$, ce qui est absurde.

Alors, $\mathfrak{G}$ est une algèbre de fonctions continues complexes sur N nulles à l'infini, séparant les points et stable par conjugaison. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, toute fonction complexe continue nulle à l'infini sur N est limite uniforme de fonctions de $\mathfrak{G}$; soit alors f une fonction continue à support compact sur N; pour toute $f_0 \in \mathfrak{F}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $f_1 \in \mathfrak{G}$ telle que $|ff_0^{-1} - f_1| \leqq \epsilon$, d'où $\int_N |f - f_0 f_1| \rho \, dh \leqq \epsilon \int_N \rho f_0 \, dh$. Comme $f_0 f_1$ appartient à $\mathfrak{G}$, on a montré que $\mathfrak{G}$ est partout dense dans $L^1_C(N, \rho)$.

5. Un lemme de transition. Nous considérerons dans ce paragraphe la situation suivante:

G est un groupe de Lie connexe, K et N deux sous-groupes analytiques de G tels que $G = K \cdot N$; enfin Z est un sous-groupe central de G contenu dans K tel que $K^* = K/Z$ soit compact.

π est une représentation continue de G dans un espace de Banach $\mathfrak{H}$

μ est une représentation continue de K dans $\mathfrak{H}$ telle que:

a) quels que soient $s \in K$ et $s' \in G$, on a $\mu(s)\pi(s') = \pi(s')\mu(s)$;

b) l'application μ de K dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ est analytique (au sens de la norme de $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$);

c) les restrictions de π et μ à Z sont identiques.

Soit $u \to u^*$ l'application canonique de K sur K^*; d'après c), l'opérateur $\mu(s)^{-1}\pi(s)$ est égal à 1 pour $s \in Z$, donc il existe une représentation continue π^* de K^* dans $\mathfrak{H}$ telle que $\mu(s)^{-1}\pi(s) = \pi^*(s^*)$ pour $s \in K$.

Ceci étant posé, on a le lemme suivant:

LEMME 7. *Soit f une fonction analytique sur K^* et soit ψ un élément de $\mathfrak{H}$, vecteur analytique de $\mathfrak{H}$ pour la représentation de N induite par π. Le vecteur $\phi = \int_{K^*} f(u^*)\pi^*(u^*)\psi \, du^*$ est un vecteur analytique de $\mathfrak{H}$ pour la représentation π.*

Nous pouvons étendre sans difficulté les raisonnements de [1], pp. 221-

[4] Si $h \in N$ est différente de e, h^m tend vers l'infini pour $m \to \infty$: sinon, d'après [4], chap. VI, lemme 2, les h^m seraient contenus dans un sous-groupe compact de G non réduit à e; mais si $x_i(h) \neq 0$ et $x_{i+1}(h) = \cdots = x_n(h) = 0$, la construction récurrente de H montre que l'on a $x_i(h^m) = m x_i(h)$, ce qui ne reste pas borné pour $m \to \infty$.

224. Pour $x \in G$, on a:

$$\pi(x)\phi = \int_{K^*} f(u^*)\pi(x)\pi^*(u^*)\psi\, du^*.$$

Posons, pour $x \in G$ et $u \in K$, $xu = u_x s(x, u)$ où $u_x \in K$ et $s(x, u) \in N$. Si $v \in Z$, on a $x(uv) = u_x s(x, u)v = (u_x v)s(x, u)$ puisque v est dans le centre de G. Donc $(u_x)^*$, $s(x, u)$ et $u^{-1}u_x$ ne dépendent que de x et de u^*. Nous noterons ces éléments u_x^*, $s(x, u^*)$ et $\gamma(x, u^*)$. Les applications $(x, u^*) \to u_x^*$, $(x, u^*) \to s(x, u^*)$ et $(x, u^*) \to \gamma(x, u^*)$ sont analytiques et l'on a:

$$\begin{aligned}\pi(x)\pi^*(u^*) &= \pi(x)\mu(u)^{-1}\pi(u) = \mu(u)^{-1}\pi(u_x)\pi(s(x, u)) \\ &= \mu(u)^{-1}\mu(u_x)\pi^*(u_x^*)\pi(s(x, u^*)) = \mu(\gamma(x, u^*))\pi^*(u_x^*)\pi(s(x, u^*)).\end{aligned}$$

Donc: $\pi(x)\phi = \int_{K^*} f(u^*)\mu(\gamma(x, u^*))\pi^*(u_x^*)\pi(s(x, u^*))\psi\, du^*.$

Pour x fixé, les applications $u \to u_x$ et $u \to u_{x^{-1}}$ sont des applications analytiques réciproques l'une de l'autre de K dans K. Donc les applications $u^* \to u_x^*$ et $u^* \to u_{x^{-1}}^*$ sont des automorphismes réciproques de la variété analytique K^*. Posons $du_x^* = D(x, u^*)\, du^*$, où D est une fonction analytique sur $G \times K^*$. On a:

$$\pi(x)\phi = \int_{K^*} \pi^*(u^*)D(x^{-1}, u^*)f(u_{x^{-1}}^*)\mu(\gamma(x, u_{x^{-1}}^*))\pi(s(x, u_{x^{-1}}^*))\psi\, du^*.$$

Posons: $\psi(x, u^*) = D(x^{-1}, u^*)f(u_{x^{-1}}^*)\mu(\gamma(x, u_{x^{-1}}^*))\pi(s(x, u_{x^{-1}}))\psi$. D'après le choix de ψ, $\pi(s(x, u_{x^{-1}}^*))\psi$ dépend analytiquement de (x, u^*); l'application $(\alpha, \beta, T, \eta) \to \alpha\beta(T \cdot \eta)$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \times \mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}$ est multilinéaire et continue et $(x, u^*) \to \mu(\gamma(x, u_{x^{-1}}^*))$ est une application analytique de $G \times K^*$ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Il en résulte que $\psi(x, u^*)$ dépend analytiquement de $(x, u^*) \in G \times K^*$; comme K^* est compact, il existe d'après le lemme 4 un voisinage V de e dans G et un système de coordonnées analytiques $(t_1, \cdots, t_n)$ dans V tels que, pour $(x, u^*) \in V \times K^*$, on ait:

$$\psi(x, u^*) = \sum_{e} \psi_e(u^*)t_1^{e_1}(x) \cdots t_n^{e_n}(x), \qquad \boldsymbol{e} = (e_1, \cdots, e_n) \in \boldsymbol{N}^n$$

où les applications ψ_e de K^* dans $\mathfrak{H}$ sont continues; la somme précédente converge uniformément et absolument dans $V \times K^*$. Alors:

$$\begin{aligned}\pi(x)\phi &= \int_{K^*} \pi^*(u^*)\psi(x, u^*)\, du^* \\ &= \sum_{e}\Big\{\int_{K^*} \pi^*(u^*)\psi_e(u^*)\, du^*\Big\}\, t_1^{e_1}(x) \cdots t_n^{e_n}(x)\end{aligned}$$

cette dernière famille de vecteurs étant encore sommable. Donc $x \to \pi(x)\phi$ est analytique dans V, ce qui, avec le lemme 2, achève la démonstration.

6. Vecteurs analytiques. Cas général. Nous commencerons par démontrer un lemme concernant la structure des groupes de Lie réels généraux. Ce lemme est contenu dans les résultats d'Iwasawa [3].

LEMME 8. *Soit G un groupe de Lie réel connexe et simplement connexe. Il existe des sous-groupes fermés K et N de G, et un sous-groupe discret Z du centre de G, avec les propriétés suivantes:*

(i) $$G = K \cdot N;$$

(ii) *N est résoluble connexe et simplement connexe;*

(iii) *K est produit direct d'un groupe compact K' et d'un groupe abélien connexe et simplement connexe A;*

(iv) *$Z \subset A$ et A/Z est compact.*

Comme G est simplement connexe, il est produit semi-direct d'un groupe de Lie semi-simple connexe et simplement connexe S et d'un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe R (utiliser une décomposition de Levi de l'algèbre de Lie de G et construire *a priori* un tel produit semi-direct, qui sera isomorphe à G, puisque deux groupes de Lie connexes et simplement connexes ayant des algèbres de Lie isomorphes sont isomorphes). Les groupes S et R sont des sous-groupes fermés de G, et R est le radical de G. L'application $(s, r) \to sr$ est un isomorphisme de la variété analytique $S \times R$ sur la variété analytique G.

Il existe d'autre part (cf. par exemple [1], p. 223) des sous-groupes fermés K et M de S et un sous-groupe discret Z^0 du centre de S, possédant les propriétés suivantes:

a) $$S = K \cdot M;$$

b) M est résoluble connexe et simplement connexe;

c) K est produit direct d'un groupe compact K' et d'un groupe abélien connexe et simplement connexe A contenant Z^0, avec A/Z^0 compact.

Soit Z' l'intersection des noyaux des représentations linéaires continues de dimension finie de S. On sait que Z' est contenu dans le centre de S, et que S/Z' a un centre fini, de sorte que Z' est d'indice fini dans le centre de S. Donc $Z = Z' \cap Z^0$ est d'indice fini dans Z^0 et par suite A/Z est compact. Soit ρ la représentation adjointe de G dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G; sa restriction à S est une représentation linéaire continue de dimension finie de S; son noyau contient donc Z' et par suite, pour $s \in Z$, on a $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\, s = 1$; donc Z est contenu dans le centre de G.

Soit $N = M \cdot R$; comme R est distingué dans G, N est un sous-groupe fermé de G. En outre N/R est isomorphe à M, donc résoluble, de sorte que N est résoluble; comme M et R sont simplement connexes et que $N = M \cdot R$, N est simplement connexe. Enfin, comme $G = S \cdot R$ et que $S = K \cdot M$, on a $G = K \cdot N$.—c. q. f. d.

Nous allons maintenant démontrer le résultat central de cet article.

THÉORÈME. *Soient G un groupe de Lie réel, $\mathfrak{H}$ un espace de Banach et π une représentation continue de G dans $\mathfrak{H}$. Les vecteurs de $\mathfrak{H}$ analytiques pour π sont partout denses dans chacun des trois cas suivants:*

1) *G est connexe et simplement connexe; si Z désigne le sous-groupe introduit dans le lemme 8, les opérateurs $\pi(z)$ pour $z \in Z$ sont scalaires.*

2) *G est connexe et simplement connexe, et l'ensemble des opérateurs $\pi(z)$ pour $z \in Z$, est borné dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.*

3) *La représentation π est bornée, c'est-à-dire que l'ensemble des opérateurs $\pi(s)$ pour $s \in G$, est borné dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.*

Lorsque G est *résoluble* connexe et simplement connexe, les vecteurs analytiques sont partout denses dans $\mathfrak{H}$, comme il résulte des lemmes 3 et 6.

Supposons G connexe et simplement connexe et introduisons les groupes K, A, N et Z du lemme 8; comme A est abélien connexe et simplement connexe, il est produit direct de deux sous-groupes A' et A'', Z étant contenu dans A'' et image de $\boldsymbol{Z}^p$ par un isomorphisme ϕ de $\boldsymbol{R}^p$ sur A'' ($p = \dim A''$).

Dans le cas 1), posons $\pi(z) = \chi(z) \cdot 1$ pour $z \in Z$; il est clair que l'homomorphisme χ de Z dans le groupe multiplicatif $\boldsymbol{C}^*$ des nombres complexes se prolonge en un homomorphisme continu χ' de A'' dans $\boldsymbol{C}^*$. Comme K est produit direct de K', A' et A'', on peut prolonger χ' en un homomorphisme χ'' de K dans $\boldsymbol{C}^*$ égal à 1 sur K' et A'; on posera $\mu(u) = \chi''(u) \cdot 1$ et l'homomorphisme μ de K dans le groupe des opérateurs continus inversibles de $\mathfrak{H}$, est une application analytique de K dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

Dans le cas 2), l'expression $\rho(s) = \sup \| \pi(sz) \|$, $z \in Z$, est finie pour tout $s \in G$ et représente une semi-norme sur G telle que $\rho(sz) = \rho(s)$ pour $z \in Z$ et $s \in G$; introduisons la représentation régulière π' de G dans $L^2{}_{\boldsymbol{C}}(G, \rho)$. Comme ρ est invariante par les translations par les éléments de Z, les opérateurs $\pi'(z)$ sont unitaires pour $z \in Z$; posons:

$$\pi'(\phi(e_1, \cdots, e_p)) = U_1{}^{e_1} \cdots U_p{}^{e_p} \qquad (e_1, \cdots, e_p \in \boldsymbol{Z})$$

où les U_i sont unitaires. On peut écrire $U_i = \exp H_i \sqrt{-1}$, où l'opérateur hermitien continu H_i commute à tout opérateur commutant à U_i; soit alors

μ la représentation de A'' dans $\mathfrak{H}$ definie par:

$$\mu(\phi(t_1,\cdots,t_p))=\prod_{i=1}^{p}\exp\sqrt{-1}\,t_iH_i \qquad (t_1,\cdots,t_p\in\boldsymbol{R})$$

que nous prolongerons à K en posant $\mu(k'a'a'')=\mu(a'')$ pour $k'\in K'$, $a'\in A'$ et $a''\in A''$. L'application μ de K dans $\mathcal{L}(L^2{}_C(G,\rho))$ est alors analytique et les opérateurs $\mu(u)$ commutent à tout opérateur commutant aux U_i, en particulier ils commutent aux $\pi'(s)$ $(s\in G)$. On a enfin $\mu(u)=\pi(u)$ pour $u\in Z$.

On notera alors, que pour tout groupe compact, les fonctions analytiques sont partout denses dans l'espace des fonctions intégrables pour la mesure de Haar, puisqu'il en est ainsi des coefficients des représentations continues de dimension finie. Le lemme 7 et ce qu'on a vu des groupes résolubles montrent alors que, dans le cas 1) les vecteurs analytiques sont partout denses dans $\mathfrak{H}$, et dans le cas 2) les vecteurs analytiques pour la représentation π' sont partout denses dans $L^2{}_C(G,\rho)$. D'autre part, l'application $(f,g)\rightarrow fg$ est une application bilinéaire continue de $L^2{}_C(G,\rho)\times L^2{}_C(G,\rho)$ dans $L^1{}_C(G,\rho)$; donc les vecteurs de $L^1{}_C(G,\rho)$ analytiques pour la représentation régulière sont partout denses dans $L^1{}_C(G,\rho)$. D'après le lemme 3, les vecteurs analytiques pour la représentation π sont donc partout denses dans $\mathfrak{H}$, dans le cas 2).

Dans le cas 3), soit G_0 la composante connexe de e dans G et soit $G_0{}^*$ le revêtement universel de G_0; la représentation π de G définit de manière bien déterminée une représentation continue bornée π^* de $G_0{}^*$. D'après 2), les vecteurs de $\mathfrak{H}$ analytiques pour π^* sont partout denses dans $\mathfrak{H}$; mais comme $G_0{}^*$ est localement isomorphe à G_0, un vecteur de $\mathfrak{H}$ analytique pour π^* est analytique pour la restriction de π à G_0 et donc pour π (lemme 2).—c.q, f. d.

Appendice.

Lemme A. *Soit* $U=\|u_{ij}\|$ *une matrice à coefficients complexes, à* n *lignes et* n *colonnes; on suppose* $u_{ij}=0$ *pour* $i<j$; *on considère les* $u_{ii}=a_i$ *comme des constantes et l'on note* t *une variable complexe. Dans ces conditions, les coefficients de la matrice* $\exp tU$ *sont de la forme*

$$\sum_{\alpha}E_\alpha(t)P_\alpha(u_{21},u_{31},\cdots,u_{n,n-1})$$

où les P_α *sont des polynomes de degré* $<n$ *et les* E_α *sont tous de la forme*

$$\sum_{i=1}^{n}e^{a_it}Q_i(t), \tag{15}$$

Q_i *étant un polynome de degré* $<n$.

Soit $V(t) = \exp tU$. On sait que $dV(t)/dt = U \cdot V(t)$, d'où

$$\prod_{i=1}^{n} (d/dt - a_i) V(t) = \prod_{i=1}^{n} (U - a_i \cdot 1) \cdot V(t) = 0$$

puisque, d'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a $\prod_{i=1}^{n} (U - a_i \cdot 1) = 0$. Les coefficients de $V(t)$ sont donc, lorsque les u_{ij} $(i > j)$ sont fixés, solutions de l'équation differentielle $\prod_{i=1}^{n} (d/dt - a_i) f(t) = 0$, donc de la forme (15).

Considérons maintenant t comme fixé. On peut décomposer de manière unique U en somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice N avec $n_{ij} = 0$ pour $i \leqq j$ (et donc $n_{ij} = u_{ij}$ pour $i > j$). Soit (e_i) la base canonique de $\boldsymbol{C}^n$, et considérons D et N comme des endomorphismes de $\boldsymbol{C}^n$; si V_i est le sous-espace de $\boldsymbol{C}^n$ de base $(e_i, e_{i+1}, \cdots, e_n)$, on a $D(V_i) \subset V_i$ et $N(V_i) \subset V_{i+1}$, il en résulte que tout monôme (non commutatif) en D et N dont le degré en N est $\geqq n$ est nul; par suite, pour tout entier m, les coefficients de $(D + N)^m$ sont, pour D fixé, des polynomes de degré $< n$ en les u_{ij} $(i > j)$; il en résulte que, pour t et D fixés, les coefficients de $\exp t(D + N) = \sum_{m \geqq 0} t^m (D + N)^m / m!$ sont des polynomes de degré $< n$ en les u_{ij} $(i > j)$:

Ceci posé, le lemme A est une conséquence du lemme facile suivant, dont on laisse la démonstration au lecteur:

Lemme B. *Soient X et Y deux ensembles, K un corps, V (resp. W) un espace vectoriel de dimension finie de fonctions sur X (resp. Y). Soit f une application de $X \times Y$ dans K telle que:*

a) *pour tout $x \in X$, l'application $y \to f(x, y)$ est dans W;*

b) *pour tout $y \in Y$, l'application $x \to f(x, y)$ est dans V.*

Alors f est de la forme $f(x, y) = \sum_{\alpha} g_\alpha(x) h_\alpha(y)$ avec $g_\alpha \in V$ et $h_\alpha \in W$.

University of Paris.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Harish-Chandra, "Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space I," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 75 (1953), pp. 185-243.

[2] E. Hille, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 31, New York, 1948.

[3] Iwasawa, "On some types of topological groups," *Annals of Mathematics*, vol. 50 (1949), pp. 507-558.

[4] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, 2ème édition, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, no. 1154, Paris, Hermann.