

# Le château des groupes

Entretien de Javier FRESÁN<sup>1</sup> avec Pierre CARTIER

(23 février 2009)

“Je viens de rencontrer un type formidable. Il comprend tout, il a une curiosité insatiable et une ouverture d’esprit hors du commun. En plus, il a l’air sportif et il vient à Bures en vélo”. C’est en ces mots qu’Alain Connes a raconté à sa femme le jour où il a fait la connaissance de Pierre Cartier, il y a trente ans. Et c’est la même impression qu’il donne encore aujourd’hui aux mathématiciens qui se réunissent pour écouter ses nombreux exposés traitant de sujets aussi divers que la théorie des opérades, les groupes algébriques, les fonctions multizêtas ou l’intégrale fonctionnelle, à laquelle il a consacré récemment un livre en collaboration avec la physicienne Cécile DeWitt-Morette. Ancien élève de l’École Normale Supérieure, où il a fait sa thèse sous la direction d’Henri Cartan, Pierre Cartier a participé très activement au groupe Bourbaki pendant trente ans. En géométrie algébrique, la dualité entre les variétés abéliennes, ou entre les groupes formels, ainsi que les diviseurs qui peuvent être représentés par un recouvrement ouvert et par une collection de fonctions rationnelles, portent son nom.

Après avoir fini sa thèse, il a passé deux ans à l’Institute for Advanced Study (Princeton), puis il a enseigné à l’Université de Strasbourg avant de devenir professeur à l’Institut des Hautes Études Scientifiques auquel il reste toujours très lié. Homme de vaste culture, Pierre Cartier est aussi un passionné de musique, de philosophie et de littérature, comme en témoigne, par exemple, le choix des titres *La folle journée* et *Un pays dont on ne connaîtrait que le nom* pour des articles explorant l’évolution de l’idée d’espace et les motifs chez Grothendieck. Au début de cet entretien, qui confirme bien sa réputation de conteur, il revient sur ses premiers souvenirs d’apprentissage et l’irruption de Bourbaki dans sa vie ; ensuite, il nous parle de Grothendieck, qui a été longtemps pour lui un ami très proche. Dans la deuxième partie

---

<sup>1</sup>Je tiens à remercier l’énorme générosité de Pierre Cartier, qui a lu soigneusement toutes les versions de cet entretien et a fait des commentaires précieux. Je suis très reconnaissant à María Aguirre Roquero, Miguel de Benito, Cécile Gourgues, Jean-Baptiste Deyzac, Miguel Hernaiz, Ricardo Pérez-Marco et Riccardo Sarti pour leur aide indispensable lors de la préparation et transcription du texte.

du texte, plus mathématique, nous abordons la relation souvent tumultueuse entre les mathématiques et la physique, les problèmes des fondements de la théorie des catégories et le mystérieux “groupe de Galois cosmique” qu’il a lui-même baptisé ainsi.

\*\*\*\*\*

### Années d’apprentissage

*Après les premières années d’études à Sedan, puis au Lycée Saint-Louis, vous êtes entré à l’École Normale Supérieure en 1950, quand Henri Cartan y était professeur. Quels sont vos souvenirs de la découverte des vraies mathématiques à cette première époque ?*

Quand je suis né, Sedan était une toute petite ville, qui avait énormément souffert des guerres : c’était une des parties de la France dans lesquelles l’occupation de 1940 à 1944 était la plus oppressante ; parfois on ne savait pas si l’on était allemands ou français. La ville était détruite, pour manger il fallait beaucoup se débrouiller et le lycée survivait dans des conditions très précaires. Quand j’y suis entré, en 1942, il fonctionnait déjà à peu près normalement, mais on avait très peu de livres. Les mathématiques que je connaissait c’était grâce au frère de ma grand-mère et à un instituteur qui m’avait appris le tout début de l’algèbre et de la géométrie élémentaire. La première année où ma mère avait rouvert le lycée, j’avais huit ans et ses élèves douze, mais c’était moi qui corrigeait les devoirs de mathématiques.

Très rapidement, je me suis procuré tous les manuels que je pouvais lire. Je me souviens d’un livre qui s’appelait *Géométrie moderne* et qui racontait la géométrie synthétique comme on la faisait au XIXème siècle : les résultats étaient là, mais avec des fondements très insuffisants. En même temps, j’ai lu des livres sur la théorie d’Einstein ; je me souviens de ma grande difficulté pour comprendre un manuel très mauvais qui présentait la relativité sans mathématiques. Il y avait l’équation mystique  $\delta \int ds = 0$  d’une géodésique et, quelques pages plus loin, les symboles de Christoffel, introduits avec seulement la vague suggestion qu’il y avait un lien avec le principe de Fermat en optique. En me guidant sur l’idée intuitive d’un rayon lumineux dans l’atmosphère, j’avais réussi à peu près à les reconstituer. Vers quinze ans, j’ai commencé à lire des livres un peu plus avancés. J’ai travaillé sur un

manuel de calcul différentiel à l'anglaise et, toujours en essayant de comprendre les idées d'Einstein, j'ai appris à résoudre des équations différentielles. C'était tout à fait un travail d'autodidacte, parce que personne autour de moi n'avait la moindre idée des mathématiques. Par exemple, je regardais les encyclopédies en tournant toutes les pages pour trouver les articles qui parlaient de mathématiques. Je me souviens de cette entrée : “**Abélien** : Il y a trois types d'intégrales abéliennes : première espèce, deuxième espèce, troisième espèce”. Mais qu'était donc une intégrale abélienne ?

Une chose qui m'a beaucoup aidé, c'est un cadeau que m'avait fait le frère de ma grand-mère : une table de logarithmes. Il était expliqué là-dedans que la base naturelle n'est pas dix, mais un certain nombre  $e$  qui était 2,718281... dont on pouvait deviner que c'était la somme des inverses des factorielles. On disait aussi qu'il fallait faire des interpolations polynomiales et on rencontrait ainsi expérimentalement la notion de dérivée. Tout cela mis en place dans ma tête de manière pas très organisée, bien sûr : on me disait en classe que la somme des  $n$  premiers nombres ou des  $n$  premiers carrés correspondait à telle formule et je découvrais les polynômes de Bernoulli en me demandant ce qui se passait dans le cas général. Mon professeur de mathématiques était très bon, sa classe était toujours la meilleure aux examens ; ce qu'il devait enseigner, il le connaissait parfaitement, mais il ne savait pas ce qu'était un nombre complexe. Par contre, mon professeur de physique, qui avait moins de succès auprès des élèves, avait fait l'équivalent d'un mémoire de Master 2 en optique avec Paul Langevin, un des grands physiciens français de l'époque, et il m'a donné le goût de la physique.

*À seize ans, vous avez gagné le premier prix de mathématique au concours général et cela vous a donné accès à de nouveaux livres...*

Oui. La coutume était que le président de la République, qui s'appellait Vincent Auriol à l'époque, remettait lui-même le prix au vainqueur. Mais un des amis de ma famille, qui enseignait le grec au Lycée Henri IV, pensait que ce n'était pas suffisant et il a voulu me faire un cadeau lui aussi. Il m'a amené chez un libraire du Quartier Latin, juste à côté de la Sorbonne, où il m'a laissé pendant deux heures. Il a dit quelque chose à l'oreille du libraire (c'était le prix qu'il payait pour moi) et il est allé faire son cours. Le libraire a passé tout le temps à m'aider à choisir. Quand l'ami de mes parents est revenu, il a sorti le chèque déjà écrit, et ça coïncidait ! C'est là que j'ai vu pour la première fois les vraies mathématiques. J'avais seize ans.

Il y avait un livre d'algèbre et d'analyse linéaire, écrit par André Lichnerowicz, qui commençait avec le calcul tensoriel, les intégrales des formes différentielles, les équations de Fredholm : très bien fait. Tout l'été de 1948, j'ai lu ce manuel et aussi le premier volume de la topologie de Bourbaki, qui m'a paru un peu difficile parce que je ne connaissais pas les notations de la théorie des ensembles.

Quand je suis arrivé à Paris, l'enseignement que l'on nous donnait au Lycée Saint-Louis était solide, mais très dépassé : c'était un point de vue de la géométrie analytique et du calcul différentiel qui datait de 1920 à peu près. Cependant, j'ai eu la chance d'avoir un très bon professeur qui, même s'il ne connaissait pas la topologie de Bourbaki, ne m'a pas découragé quand je lui ai posé des questions. Je me souviens que, en même temps, pendant le temps libre de midi, je mangeais très vite et j'allais à la bibliothèque Sainte-Geneviève. C'est là que j'ai lu le livre de Chevalley sur les groupes de Lie et que j'ai commencé à étudier en allemand les œuvres de Hermann Weyl. Donc, quand je suis arrivé à l'École Normale, j'avais déjà une idée de ce qu'étaient les mathématiques du XXème siècle.

Mais évidemment cela a changé complètement à l'École Normale. La première année, j'ai eu la chance que Samuel Eilenberg, le topologue, avait été invité par Henri Cartan pour une année à l'ENS, où ils écrivaient ensemble leur livre *Homological Algebra*. Dans ses cours à l'Institut Henri Poincaré et ses exposés au Séminaire Cartan, j'ai appris l'algèbre homologique et la théorie des faisceaux. Il faut dire que, à cette époque-là, Cartan dominait tout. Il y avait trente mathématiciens dans toute la France (on ne faisait soutenir que quatre ou cinq thèses chaque année) : ils étaient tous à Paris, tous élèves ou collègues de Cartan, sauf ceux qui avaient émigré à cause de la guerre, comme Weil ou Chevalley.

## **Les années Bourbaki**

*À la fin de cette année-là, vous avez été invité à une des rencontres de Bourbaki. Quelle était la situation du groupe quand vous l'avez rejoint pour la première fois ?*

Pendant la première année à l'École Normale, j'ai suivi tous les cours que je pouvais. Il y avait les cours de mathématiques de Cartan, bien entendu, mais aussi des cours de physique, qui étaient obligatoires pour nous. Yves Rocard, le père de l'ancien premier ministre Michel Rocard, nous faisait un

cours qui n'était pas très moderne. Comme ingénieur, Rocard était fantastique, mais il n'avait pas de goût pour la physique théorique. J'ai suivi aussi des cours de philosophie d'Althusser, le marxiste, très loin d'être orthodoxe. Donc, à la fin de l'année, il fallait que je choisisse. Althusser m'a donné des conseils en me disant que, pour toute sorte de raisons, il valait mieux passer les examens de mathématiques que ceux de philosophie. Il m'a dit : "Tu peux toujours continuer à faire de la philosophie". D'ailleurs, aujourd'hui encore, je dirige un séminaire sur la philosophie des mathématiques, qui a été créé par lui, certains lundis soir à l'ENS. Ensuite, Yves Rocard m'a proposé de construire la bombe atomique française avec lui et Henri Cartan m'a invité à participer à une réunion de Bourbaki. C'est ce qui m'a fait choisir.

La rencontre a duré deux semaines, et j'ai passé une semaine avec eux. Il y a d'ailleurs une photo qui est devenue très connue et qui existe toujours : sur un glacier, il y a André Weil, Serre, Schwartz, Henri Cartan, et je suis là aussi. C'était le début des très bonnes années de Bourbaki, qui vont de 1950 à 1970 à peu près. De 1935 à 1940, c'était le projet initial, qui se termine à la fin de 1939 par la publication du résumé sur la théorie des ensembles, un tout petit fascicule de quarante pages, très bien fait, et du premier volume de topologie, qui est paru l'année d'après. Puis, il y eut la guerre et une partie des membres de Bourbaki ont dû s'échapper à cause des nazis : André Weil et Claude Chevalley sont allés aux États-Unis, Laurent Schwartz, qui venait de rejoindre le groupe, s'est caché, et Pierre Samuel, qui le ferait un peu plus tard, n'a pas pu rester élève à l'ENS à cause des lois contre les juifs. Malgré toutes ces circonstances si difficiles, Bourbaki a réussi à fonctionner à moitié pendant les années de guerre, au moins assez pour qu'après 1945 il y ait déjà plusieurs volumes publiés.

En 1950, ils avaient complètement redémarré avec une nouvelle génération dont Serre était le leader naturel. C'était une période où l'on avait des ambitions énormes : Bourbaki voulait vraiment exposer toutes les mathématiques à cette époque-là. Le groupe venait de publier sept volumes et il en avait autant prêts pour la publication. En plus, il y avait Samuel Eilenberg, dit aussi SSPP (Smart Sammy Polish Prodigy), dont j'avais fait la connaissance lors de ses cours à l'Institut Poincaré et qui participait à la rencontre avec sa chaleur, son enthousiasme extraordinaires. Pour moi, c'était un éblouissement : j'ai appris beaucoup, beaucoup de choses. Selon la méthode Bourbaki, en deux semaines, on étudiait des rapports sur toutes sortes de sujets, qui devaient faire des livres à venir. En algèbre commutative, par exemple, c'est là que j'ai

appris ce qu'était une valuation ou la clôture entière d'un anneau, en lisant un rapport préparé par Pierre Samuel et que Serre m'avait communiqué à l'avance.

Pendant cette rencontre, j'ai fait la connaissance d'André Weil, avec qui j'ai été très lié tout le reste de sa vie. D'ailleurs, sa fille aînée est encore une amie et nous avons un projet commun. Elle vient d'écrire un livre sur son père et sa tante, la philosophe Simone Weil, et nous allons le présenter ensemble<sup>2</sup>. Il n'y a pas très longtemps, j'ai écrit un article d'hommage à André Weil qui est disponible en anglais, français et italien. À Bourbaki, j'ai rencontré aussi Claude Chevalley, Laurent Schwartz et, dans la jeune génération, Pierre Samuel. Serre et moi, nous nous connaissions déjà du Séminaire Cartan. J'ai toujours dit que, pour moi, Serre est un grand frère, même si la différence d'âge est chaque jour moins évidente. Ce n'est pas un père, mais il a plus d'expérience, il est plus avancé : c'est un grand frère.

*En fait, deux des pères fondateurs de Bourbaki, Henri Cartan et André Weil, sont devenus plus tard vos directeurs de thèse.*

C'est un peu plus compliqué. Officiellement, mon directeur de thèse était Roger Godement, qui à l'époque était à Nancy, et qui faisait de la théorie des groupes. J'avais commencé à travailler avec lui, mais je me sentais plus inspiré par ce que faisaient Cartan et, surtout, André Weil, donc j'ai changé de sujet. André Weil n'était pas en France, mais il revenait chaque été et j'allais le voir. Il me demandait d'expliquer les idées que j'avais eues, et il me disait "tu devrais faire ceci, cela", mais ce n'était pas strictement mon directeur de thèse. Au début de l'année 1952, il avait fait un cours aux élèves de mathématiques de l'École Normale sur la thèse de Tate et les méthodes d'Iwasawa, ce que l'on appelle aujourd'hui les adèles et les idèles. J'ai rédigé ce cours et j'y ai ajouté quelques petites contributions : des démonstrations plus simples, quelques notions supplémentaires. C'est là que j'ai vraiment fait la connaissance d'André Weil.

En plus, j'avais réussi à lire son livre *Foundations of Algebraic Geometry* ligne à ligne jusqu'à la moitié ; puis Serre est arrivé avec ses nouvelles méthodes et j'ai abandonné. Je me souviens que, lors de mes entretiens avec Weil, il m'a dit : "Je vois que mes *Foundations* sont périmées et que la géométrie birationnelle est terminée". Le meilleur résultat de ma thèse, la dualité des variétés abéliennes, était un problème posé par André Weil

---

<sup>2</sup>Sylvie Weil, *Chez les Weil. André et Simone*, Paris : Éditions Libella, 2009.

dans son livre sur les variétés abéliennes et les courbes algébriques. J'ai eu une inspiration un jour : j'étais au courant de ce que faisait Dieudonné sur les groupes formels, j'avais aussi en tête la question posée par André Weil et je me suis dit : "Ça va ensemble". Je l'ai vu immédiatement, mais il a fallu beaucoup de temps pour parfaire ce rapprochement, et cela constitue aujourd'hui le début de la cohomologie cristalline des schémas. Manin, de son côté, avait eu des idées analogues et, même si l'on n'était pas en contact à l'époque, on a tous les deux fait le lien entre les groupes formels et ce problème en géométrie algébrique.

J'ai retravaillé plusieurs fois dans ma carrière sur cette théorie très, très compliquée, qui a été développée en France essentiellement par Pierre Berthelot et Jean-Marc Fontaine. Je n'ai jamais abandonné la théorie des groupes : pour moi, cela reste le point central de tout ce que j'ai fait. À mon avis, le livre qu'il faut avoir lu, c'est *La théorie des groupes et la Mécanique Quantique* d'Hermann Weyl : c'est un texte que je lis encore aujourd'hui avec le même intérêt. La théorie des groupes a l'avantage qu'elle permet de faire de la physique comme l'avait proposé Weyl, donc c'est un outil important en physique. C'est aussi un outil important en géométrie, bien entendu, après les travaux d'Elie Cartan (le père d'Henri Cartan), et même avant ; c'est un outil important en arithmétique, comme on l'a vu avec André Weil. Pour moi, c'est comme si j'avais un château fort, le *château des groupes* : je peux aller butiner ici ou là, entrer dans une autre porte, mais enfin je reviens toujours dans mon château.

*Vous êtes devenu membre de Bourbaki finalement en 1955 et vous avez été secrétaire du groupe de 1970 à 1983, après Dieudonné, Samuel et Dixmier. Quel était le mode de travail ?*

Le mode de travail était bien établi : il y avait une réunion d'une semaine au printemps, une réunion de deux semaines en été et une réunion d'une semaine à l'automne, ce qui faisait un mois par an, à peu près. Pendant vingt-cinq ans, en gros ceux qui vont de 1955 à 1980, j'ai consacré un tiers de mon activité mathématique à Bourbaki : c'est beaucoup. Pour arriver aux trente volumes qui viennent d'être réimprimés (plus de quarante dans les premières éditions), on a publié chaque année un livre nouveau et une révision d'un autre déjà publié. Chaque livre a été récrit plusieurs fois, il même très difficile d'en faire l'histoire complète. On faisait d'abord un rapport : on disait à un des membres, celui qui en général connaissait le mieux le sujet, que l'on voudrait connaître les théorèmes fondamentaux sur,

par exemple, les algèbres de Lie. Dans ce dernier cas, ce fut Chevalley qui fit le rapport. D'ailleurs, quand on demandait à quelqu'un de faire un rapport, même s'il ne connaissait pas très bien le sujet, il l'apprenait pour de bon.

Donc, il y avait un premier rapport, que l'on discutait et, à partir de là, on essayait de faire un plan de ce que l'on voulait raconter et comment le rattacher aux sujets déjà publiés ou en projet. Puis, on commençait le processus : il y avait toujours un premier rédacteur, qui essayait de développer, et cela revenait au bout de six mois ou un an devant le groupe ; on discutait, on était contents ou pas. En général, on n'était pas content, ce n'était pas comme cela que l'on voulait faire. Parfois, le processus pouvait durer de sept à huit ans, avec beaucoup de modifications jusqu'au moment où Dieudonné tapait du point sur la table : "C'est fini, il faut publier". Alors, il prenait tous les documents de la discussion et, en deux mois, il faisait la synthèse et il nous amenait le volume tel qu'il devrait être imprimé. On relisait, mais il était convenu qu'à ce moment-là on ne faisait que de petites corrections. Ensuite, Dieudonné ajoutait tous les exercices, ce qui était une tâche énorme, il envoyait le livre à l'imprimeur et il corrigeait les épreuves.

*C'était lui le secret de Bourbaki ?*

Tout à fait ! Dieudonné était très fort et très grand, il faisait peur à beaucoup de gens à cause de cela, mais il était assez modeste. Il avait une capacité de travail inouïe. Il disait : "Je ne travaille pas beaucoup, je n'écris que cinq pages de mathématiques par jour, entre cinq heures et huit heures du matin". Mais tous les jours, toutes les semaines, tous les ans pendant soixante ans de carrière, cela fait 110.000 pages, à peu près. Je me rappelle l'époque où il avait plus de 60 ans ; il était le premier président de la nouvelle Université de Nice, il préparait le Congrès International des Mathématiciens de 1970 et il écrivait pour Grothendieck, en plus de ses propres livres ! Jusqu'à 1960 environ, c'était lui qui écrivait tout ce qui était publié sous le nom de Bourbaki, ainsi que des versions intermédiaires. Il a publié ensuite les *Éléments de Géométrie Algébrique* avec Grothendieck, puis une grande série de volumes intitulée *Éléments d'Analyse* et beaucoup d'autres livres. Il avait une puissance d'absorption et de synthèse absolument admirables : c'est lui qui a fait marcher le groupe pendant très longtemps. D'ailleurs, quand il l'a quitté, c'est devenu plus difficile. Bourbaki était un groupe en principe sans hiérarchie, mais comme dans tous les groupes officiellement sans hiérarchie, il y en avait un peu. On disait qu'André Weil était *primus inter pares*, il était le Pape, ce qui voulait dire que l'on suivait en général ses orientations. Mais



après son départ aux États-Unis, il ne venait qu'à la réunion d'été, tandis que Dieudonné était toujours là.

Si l'on y réfléchit maintenant, l'ambition de Bourbaki était de fournir une encyclopédie de *toutes les mathématiques*, avec le désir de montrer que toutes ses parties se répondent, qu'il y a une seule mathématique, et non des branches différentes des mathématiques. L'ambition était d'unifier les mathématiques : on voulait écrire les *Éléments de Mathématique*, au singulier. Pour cela, l'outil choisi était d'exprimer tout dans la théorie des ensembles. Il fallait fournir des standards, des définitions bien précises : quand il y avait une multiplicité de définitions connues, on choisissait celle que l'on pensait être la meilleure. Une autre caractéristique était l'emploi d'une terminologie et d'une notation très soignées, et une certaine manière très uniforme de rédiger. Beaucoup des termes inventés par Bourbaki ont été largement acceptés.

D'après Thomas Kuhn, dans son livre sur la structure des révolutions scientifiques, avec un schéma qui s'adapte plus ou moins bien aux mathématiques, il y a deux sortes de périodes : les *périodes de révolution scientifique* où l'on s'intéresse à de nouvelles questions et où l'on invente de nouvelles méthodes, et les *périodes de normalisation*, de consolidation, où l'on crée un paradigme nouveau qui dure jusqu'à ce qu'une nouvelle révolution le remplace. Bourbaki a beaucoup contribué à cette phase de normalisation. La grande révolution conceptuelle des mathématiques s'est produite de 1900 à 1930 essentiellement : c'est la théorie des ensembles de Cantor, la topologie générale de Hausdorff, la topologie algébrique de Poincaré-Lefschetz, la théorie des espaces de Hilbert et de leurs opérateurs, la théorie des groupes d'Elie Cartan et Hermann Weyl, l'algèbre dite moderne de Noether, Artin et van der Waerden. Après tous ces changements, problèmes et méthodes nouveaux, qui se sont produits pendant les trente premières années du XX<sup>ème</sup> siècle, Bourbaki représente la consolidation.

*Alors, contre les gens qui parlent de l'influence destructrice des textes de Bourbaki dans l'enseignement des mathématiques, cela serait à votre avis l'héritage indubitable du groupe ?*

Quand il s'agit de consolider en faisant une synthèse, on peut aussi trouver des idées nouvelles. Il y a au moins deux ou trois livres de Bourbaki où il y a des idées vraiment nouvelles. En algèbre linéaire et tensorielle, il suffit de comparer les premières et les dernières éditions des volumes :

Bourbaki a beaucoup ajouté au calcul tensoriel tel qu'il était utilisé par des géomètres comme Ricci. En algèbre commutative, vue comme le fondement de la géométrie algébrique (il y a d'ailleurs eu un accord explicite entre Bourbaki et Grothendieck : on irait jusque là et il commencerait ensuite, il serait absurde de faire deux fois la même chose), beaucoup d'idées nouvelles, introduites surtout par Serre, ont changé radicalement la manière de voir la théorie. D'après les archives de Bourbaki, qui ne sont pas encore disponibles, mais le seront dans pas trop longtemps, quand j'aurai donné mes propres archives, on trouve que l'algèbre commutative avait été rédigée en suivant un chemin très proche de Zariski-Samuel et d'André Weil. Il y avait plusieurs volumes faisant à peu près quatre cents pages, qui étaient prêts, mais on a tout jeté et on a recommencé en introduisant les nouvelles idées de Serre et Grothendieck sur la localisation, le spectre d'un anneau, les filtrations et topologies, l'algèbre homologique, etc.

Dans la théorie des groupes de Lie, par exemple, on a pris la décision, à un moment donné, de présenter les résultats en séparant la théorie des algèbres de Lie, qui était bien développée, de sa partie purement géométrique. On a donc isolé toute une géométrie assez élémentaire (les systèmes de racines, les groupes de Coxeter), ce qui a permis aussitôt un développement tout à fait nouveau : les groupes  $p$ -adiques et les groupes algébriques. On avait préparé l'étape suivante pour la théorie des groupes. De l'avis de beaucoup, cette série sur les groupes de Lie est une des meilleures de Bourbaki, mais elle a été terminée en 1975, il y a plus de trente ans. Comme Bourbaki a introduit des idées très nouvelles, s'il fallait réécrire aujourd'hui un traité sur les groupes de Lie, il faudrait le refaire complètement à cause de l'évolution du sujet (par exemple, il n'y avait pas les groupes quantiques et les groupes  $p$ -adiques étaient beaucoup moins développés), mais cela serait dans la même ligne. À mon avis, c'est une marque de succès que ce livre ait ouvert toute une voie de développement.

*Tandis que pour l'enseignement. . .*

Là, je serais beaucoup plus critique. Bourbaki est une encyclopédie, un livre qui fixe des standards, mais pas un manuel scolaire. Dans les années 70, Dieudonné a fait beaucoup de bruit en déclarant qu'Euclide était mort, ce que je ne crois pas, et André Lichnérowicz a eu une attitude très imprudente lui aussi. C'est vrai qu'un certain enseignement vieilli est mort, mais la géométrie euclidienne est toujours devant nos yeux, elle n'est pas près de disparaître. Dans une religion, le fondateur peut être un grand homme,

mais les disciples ne sont pas toujours au niveau de leur maître. Toute une série de disciples extrémistes de Bourbaki, qui n'étaient pas en général des mathématiciens créateurs, se sont précipités dans cette nouvelle vague et ont voulu créer un enseignement (même à l'école maternelle) en partant des bases les plus rigoureuses. Cela conduit à la petite fille de cinq ans qui revient chez sa maman en disant "Je ne veux pas être un ensemble". J'ai enseigné parfois au niveau élémentaire, et je sais qu'il faut partir de ce qui existe : on a dix doigts, avec ma règle je trace une droite, etc.

Il y a eu un excès évident d'abstraction dans la pédagogie, ce qui était une absurdité. D'ailleurs, ce n'était qu'un retour, parce qu'au XIX<sup>ème</sup> siècle Lewis Carroll voulait faire exactement la même chose avec la logique formelle. Le résultat est qu'aujourd'hui, la balançoire est repartie de l'autre côté, de sorte que les notions générales sur les ensembles, qui sont très importantes dès un certain moment, ne sont pas ou très mal enseignées, et l'idée de démonstration n'est pas considérée comme remarquable. En mathématiques, il y a les faits et les démonstrations, et ils sont tous également importants, bien sûr. Les démonstrations vous assurent que les faits sont corrects, que ce qui semble être une droite est bien une droite. Mais il y a aussi les faits : l'existence des angles droits, le théorème de Pythagore qui ont été découverts par toutes les civilisations, indépendamment les unes des autres et sous des présentations différentes. Cela reste à la base, on ne peut pas l'ignorer.

## Un divorce entre physique et mathématiques

*Vous avez essayé aussi d'introduire la physique mathématique, qui vous intéressait depuis votre jeunesse. Pourquoi ce refus dans Bourbaki ?*

Pourquoi ? C'est assez difficile à dire, mais il y a plusieurs histoires que l'on peut raconter. D'abord, quand Hermann Weyl est mort, André Weil et Claude Chevalley ont écrit un très bel article dans le journal suisse *L'Enseignement mathématique* où ils expliquent en détail les travaux mathématiques de Weyl, et puis il y a une phrase du genre "Hermann Weyl était un esprit curieux, il a donc fait des échappées vers la philosophie, la logique et la physique. Nous n'en parlerons pas.". C'est dommage, parce que l'influence de Weyl en physique a été énorme, et même beaucoup de philosophes considèrent que son œuvre est très inspirante. Toujours André Weil, dans ses *Souvenirs d'apprentissage*, a écrit : "J'étais en 1926 à Göttingen pour voir Hilbert ; on m'a dit plus tard qu'il s'est passé quelque chose d'important en physique cette

année-là”. C’était la naissance de la mécanique quantique ! Et qui n’était pas réservée aux physiciens : Hilbert, qui s’était intéressé à la relativité générale, Hermann Weyl, Courant, van der Waerden, se passionnaient tous pour la mécanique quantique.

Je n’arrive pas à comprendre ce refus de la physique chez André Weil. En outre, Yves Rocard, mon professeur de physique à l’École Normale, qui était plus un ingénieur qu’un physicien, était très ami d’André Weil. À tel point qu’au début de Bourbaki, il y a des documents où l’on peut lire “André Weil demandera à Rocard s’il faut dire ceci ou cela” ; il était considéré comme l’expert en mathématiques appliquées. Alors, pourquoi ? Weil connaissait très bien l’œuvre de Riemann, Gauss, Euler et Fermat, qui sont autant mathématiciens que physiciens. Gauss, par exemple, gagnait sa vie comme astronome et il a inventé la géométrie des surfaces à partir de travaux très concrets. Weil a écrit de très belles pages sur eux, mais toujours en laissant de côté leur œuvre en physique. Le résultat chez ceux qui ont participé à l’aventure de Bourbaki est que très peu se sont intéressés à la physique : un peu Laurent Schwartz, parce que ses distributions fournissaient un outil très important, moi-même toujours, mais je n’ai pas d’autres exemples en tête. Dieudonné a écrit quelque part : “Au XIXème siècle, il y avait des interactions entre mathématiques et physique ; au XXème, il n’y en a pas”.

Cela vient peut-être d’une exception française. La physique expérimentale a toujours été meilleure que la physique théorique en France. De 1900 à 1940, on a de grands physiciens expérimentaux : Paul Langevin, Jean Perrin (qui a fait la mesure du mouvement brownien dans les atomes), Maurice de Broglie (qui a fait des travaux intéressants sur les rayons X), toute la famille Curie, et Weiss, le beau-père d’Henri Cartan. En physique théorique, après la mort de Poincaré, il n’y avait que l’école de Louis de Broglie, qui a eu, pour toutes sortes de raisons, une influence catastrophique. Quand je suis arrivé à Paris, je me suis précipité à ses cours, mais j’ai compris très vite que je n’avais rien à apprendre là. Alors qu’en Allemagne, la physique théorique a toujours été extraordinaire : il y avait Planck, Einstein, Bohr, Heisenberg et combien d’autres. En France, encore en 1960, j’ai entendu dire aux physiciens : “Les mathématiques telles qu’on les apprend en *prépa* sont utiles, mais tout ce qu’ils utilisent après, ça ne sert à rien”, tandis que les mathématiciens croyaient que les physiciens n’étaient forts que pour chauffer, refroidir et faire des contacts électriques.

Il y avait en plus un divorce au niveau de la mécanique. Dans l’université

française, l'enseignement de la mécanique était complètement désuet. Il suffit de dire que l'on n'enseignait pas les équations de Hamilton à l'École Polytechnique jusqu'à il y a très peu de temps. Vers 1950, quand on a refait tous les programmes des classes préparatoires et des universités, on a dit : "La mécanique ne sert à rien". Comme résultat, un mathématicien formé en France, même s'il est de bon niveau, n'a jamais entendu parler de mécanique ni de relativité restreinte, alors qu'un étudiant qui apprend le début de la théorie des matrices et de la théorie des groupes peut la comprendre en trois heures. Bourbaki était persuadé que les mathématiques du XXème siècle s'étaient énormément développées, qu'ils allaient continuer, sinon à les développer, du moins à les consolider, mais qu'en physique il n'y avait rien de pareil. C'est triste. Au Séminaire Bourbaki, par exemple, vu ma position dans le groupe, je pouvais choisir les exposés que je voulais donner, mais chaque fois que je parlais de physique, et j'ai fait un certain nombre d'exposés sur la théorie quantique des champs, je sentais une résistance.

*Dans le cas de Grothendieck, c'est encore plus étonnant si l'on considère que ses idées sur l'espace ont radicalement changé les idées dans le domaine.*

Avec lui, c'est un peu différent : c'était surtout une question idéologique. Grothendieck a été toujours super-anarchiste, antimilitariste, écologiste, son engagement politique s'est beaucoup développé dans cette direction. Pour lui, la physique faisait partie du complexe militaro-industriel, ce qui n'est pas faux du tout, mais il y aussi d'autres choses qui en font partie. Je vois une certaine fierté chez Grothendieck, et peut-être aussi chez André Weil, d'avoir les mains propres. Pour Grothendieck, il y avait une équation évidente : physique = bombe d'Hiroshima. D'ailleurs, quand il a quitté l'IHÉS, d'une manière très grossière à mon avis, c'était sous le prétexte d'une subvention militaire que recevait son institut. Or, on a récemment exploré les archives et c'est beaucoup moins net que ça. Il a toujours dit que c'était à cause de la subvention, mais la quantité d'argent était toute petite et on aurait pu très bien trouver une façon de faire la paix. Mais il cherchait une raison pour s'en aller, il ne voulait pas faire la paix. Une fois, en août 1970, pendant le Congrès International des Mathématiciens à Nice, je me suis trouvé entre, d'un côté, le chef de la police de Nice et, de l'autre côté, Grothendieck. Grothendieck voulait aller en prison et le chef de la police ne voulait pas l'arrêter ! Moi, j'étais au milieu. Il a fallu que j'explique à Grothendieck : "Quand on est commissaire principal de la ville de Nice, on sait que c'est une ville plutôt difficile en France. Alors s'il a dit que ce n'est pas nécessaire de

te mettre en prison. . .”

## Grothendieck

*Quand l'avez-vous rencontré pour la première fois ?*

C'était en 1953. Pendant toute l'année, Laurent Schwartz, qui venait d'arriver à Paris, nous a fait un séminaire sur la thèse de Grothendieck, qui n'était pas encore publiée. J'ai collaboré très activement à ce séminaire ; je ne me souviens pas si j'ai fait des exposés ou si j'ai seulement rédigé des textes, mais c'était le premier séminaire auquel je ne me contentais pas d'assister, mais auquel j'ai participé. Puis, quand Grothendieck est revenu du Brésil, il a fait un exposé à l'Institut Henri Poincaré, pas tout à fait sur sa thèse, mais autour de problèmes d'algèbres d'opérateurs très voisins, et qui a été ajouté aux volumes des Séminaires Bourbaki. Ce jour-là, je me souviens d'avoir parlé avec lui après son exposé. Je l'avais à peine vu avant : c'est là que l'on s'est connu. Je me vois encore parcourant la rue d'Ulm à côté de lui. . . Quand il est revenu en France définitivement en 1955, il a participé au Séminaire Cartan et il a commencé lui-même à faire un séminaire d'algèbre homologique. C'était à l'époque où il écrivait son article *Sur quelques points d'algèbre homologique* (Tohoku). J'ai relu cet article récemment, et à plusieurs endroits il me remercie pour ma collaboration. J'ai parlé dans son séminaire et j'ai rédigé une partie du reste avec lui. Après, on allait ensemble aux réunions de Bourbaki (il a été recruté vers 1955, en même temps que Serge Lang et John Tate). On s'est très vite connus et on a toujours été en relation.

*Pourriez-vous nous décrire ce qui se passait à l'IHÉS dans les années du "royaume Grothendieck" ? Quelle était la relation entre Serre, Weil et Grothendieck ?*

Tout d'abord, il faut dire que dans les dix années principales des séminaires de Grothendieck, j'étais professeur à Strasbourg, donc, j'ai très peu assisté directement. Weil enseignait à Princeton et ne venait que trois mois par an en France, donc, il a très peu participé lui aussi. D'ailleurs, les relations entre Weil et Grothendieck étaient assez difficiles : j'ai assisté, par exemple, à une fâcherie très désagréable entre eux lors d'un congrès Bourbaki en 1961. Chacun des deux avait un caractère difficile, disons. Pour les relations

Serre-Grothendieck, je vous renvoie à leur correspondance<sup>3</sup>, qui montre la profondeur de leur amitié. Entre Weil et Serre, finalement, la relation était cordiale : ce n'était pas le grand amour, je dirais, mais il y avait une époque où Serre allait chaque année à Princeton, il assistait au séminaire de Weil et ils discutaient beaucoup ; on peut dire qu'ils se comprenaient très bien mathématiquement.

Pour moi, il y a deux miracles qui expliquent le succès de Grothendieck en géométrie algébrique. Premièrement, comme l'a expliqué David Mumford, il y avait aux États-Unis l'école de Zariski, qui utilisait la méthode de résolution des singularités telle qu'elle avait été développée par lui. Cela avait donné beaucoup de résultats, mais on sentait que l'on arrivait à la limite. "Nous étions un groupe qui avait des problèmes sans méthodes et, de l'autre côté de l'Atlantique, Grothendieck avait des méthodes sans problèmes". C'est de cette façon humoristique que Mumford m'a présenté les choses. Alors, Zariski a eu l'immense générosité de dire à tous ses élèves : "Allez chez Grothendieck apprendre ses idées" ; il a donné vers 1960 un séminaire sur les méthodes d'algèbre homologique de Serre et Grothendieck, qui étaient très éloignées de ce que lui-même avait fait. Ainsi, l'IHÉS a été une annexe de Harvard et de Princeton au début ; maintenant, c'est le lieu de refuge de nos collègues russes (parmi les permanents il y a trois russes : Gromov, Kontsevich et Nekrassov, et souvent la moitié des visiteurs sont russes), mais à cette époque-là, c'étaient les américains. Le deuxième miracle vient d'une collaboration totalement improbable entre trois personnes tout à fait différentes : Serre, Grothendieck et Dieudonné. Un trio absolument inattendu, n'importe qui aurait parié que cela ne réussirait pas. Grothendieck est un prophète qui s'intéresse plus aux idées générales qu'aux détails ; Serre, par contre, est un esprit extrêmement logique, précis, no *nonsense*, et puis il y a Dieudonné avec sa puissance de travail extraordinaire qui lui a permis d'arriver à cent mille pages à la fin de sa vie. C'est de la collaboration de ces trois hommes que sont sortis les *Éléments* et les *Séminaires de Géométrie Algébrique*.

Pour revenir un peu à ce que l'on disait tout à l'heure à propos de Bourbaki, il faut bien comprendre les raisons pour lesquelles les années 1950-1965 ont été tellement fantastiques pour les mathématiques françaises. Si cela leur a permis vraiment d'être en tête dans le monde entier, c'est d'abord parce qu'après la terrible guerre et tout ce qui a suivi, l'Allemagne était détruite

---

<sup>3</sup>*Grothendieck-Serre correspondance*, édition de Pierre Colmez et Jean-Pierre Serre, American Mathematical Society-Société Mathématique de France, 2003.

et ses meilleurs scientifiques étaient partis aux États-Unis, car juifs ou antifascistes. De plus, l'Angleterre a la faiblesse d'avoir la même langue que les États-Unis : un scientifique anglais trouve un poste là-bas très facilement, tandis qu'un français a beaucoup plus de mal à s'adapter. La France se trouvait entre l'Allemagne détruite et l'Angleterre très affaiblie, dans cette situation ambiguë d'être vainqueur/vaincu. Elle avait traversé la guerre avec un peu moins de difficultés. En France, il y avait un effort de reconstruction énorme : Bourbaki est arrivé au bon moment, il a occupé le terrain et il a permis un développement extraordinaire des mathématiques qui a donné sa position privilégiée à la France. De plus, la clairvoyance de Cartan a permis aussi de faire ce que l'on appelle en allemand *Versöhnung*, c'est-à-dire, le pardon mutuel entre la France et l'Allemagne. Cartan a construit une école française et a travaillé la main dans la main avec les allemands. Cela coïncide à peu près avec la grande période de Bourbaki, où les volumes sortaient les uns après les autres, chaque volume était attendu, chaque volume apportait quelque chose de nouveau.

*Même si cela pourrait paraître paradoxal, il y a beaucoup plus d'analogies entre la vie de Grothendieck et celle de Simone Weil qu'entre elle et son frère, n'est-ce pas ?*

C'est vrai : il y a beaucoup d'analogies entre les deux. Mais d'abord, les différences : Grothendieck a eu une enfance épouvantable, je recommande le livre de Winfried Scharlau sur la jeunesse allemande de Grothendieck et ses parents<sup>4</sup>. Il faut se rendre compte qu'en 1938 Grothendieck était, en Allemagne, dans une famille d'accueil pour des enfants juifs, donc menacée par Hitler, et on le met à la gare de Hamburg dans le train vers Paris sans qu'il sache qui l'attend à l'arrivée ; il avait dix ans ! Il a toujours vécu dans des conditions matérielles très, très difficiles, jusqu'au moment où il est arrivé à Bures et où il a tout de suite été payé au niveau le plus élevé de professeur d'université française ; mais jusque là, c'est-à-dire, jusqu'à environ trente ans, il avait vécu dans une misère épouvantable. Simone Weil, par contre, était d'une famille assez riche : son père était médecin, sa mère était originaire d'une bonne famille de Vienne émigrée en Russie, et la famille Weil avait un appartement magnifique près du Jardin du Luxembourg, que j'ai visité plusieurs fois. C'était des gens qui vivaient très à l'aise, elle n'a pas du tout connu la misère.

---

<sup>4</sup>Winfried Scharlau, *Wer ist Alexander Grothendieck?: Anarchie, Mathematik, Spiritualität*, Münster, 2008.



Alors, ce qui les rapproche est leur conviction anarchiste et le souci d'être proche des plus pauvres. Les parents de Grothendieck avaient déjà fait le choix de vivre pour la révolution ; son père avait été condamné deux fois à mort (une fois par le tsar, une fois par Lénine), et il avait combattu pendant deux ans dans une milice anarchiste pendant la révolution russe de 1905. Grothendieck m'a dit un jour avec énormément de fierté que son père avait fait de la prison politique sous dix-sept régimes différents ! Donc, il y avait une attirance vers la lutte révolutionnaire chez les parents de Grothendieck qui est semblable à celle de Simone Weil. Comme l'a écrit André Weil : "Tous les communistes dissidents trouvaient un abri chez ma sœur". On prétend, que la IVème Internationale de Trotsky a été fondée dans l'appartement de Simone Weil. C'est à peine une légende. Simone Weil avait rejoint les milices anarchistes de la colonne Durruti ; le père de Grothendieck faisait partie du P.O.U.M.<sup>5</sup> et il a combattu en Espagne dans le même secteur. Il n'y aurait rien d'étonnant qu'ils se soient rencontrés à Barcelone en 1937.

Il y a chez Grothendieck, surtout dans la deuxième partie de sa vie, une volonté que j'appellerais de destruction personnelle, physique, qui est tout à fait voisine de celle de Simone Weil. Elle est morte à 34 ans d'une tuberculose mal soignée et de refus de manger. Grothendieck, depuis dix ou quinze ans mange extrêmement peu, mais il a une carcasse extraordinaire, que Simone Weil n'avait pas. Il y a aussi une manière excessive de voir les choses, chez l'un comme chez l'autre, et une expérience religieuse qui ne s'inscrit dans aucune religion ni église établie, bien entendu. C'est une religion à eux. Simone Weil a récusé son judaïsme pour s'inscrire dans le christianisme, non sans ambiguïté, car elle a toujours refusé d'être baptisée. Il y a un très beau texte d'elle qui s'appelle *Lettre à un religieux*, où elle explique toutes ses raisons pour ne pas entrer dans l'église catholique. André et Simone Weil étaient tous les deux très instruits de la culture indienne, ils lisaient les classiques de la philosophie en sanskrit, qu'ils avaient appris dans des cours au Collège de France. En fait, la foi de Simone Weil est un mélange de religion indienne et de christianisme vu à travers le prisme grec. Elle lisait les Évangiles en grec, elle refusait de lire l'Ancien Testament.

Quant à Grothendieck, les vingt dernières années de sa vie sont pleines d'une expérience religieuse complètement atypique. Comme presque tous les Shapiro, son père venait d'un milieu juif très pratiquant : les hassidim, qui représentent encore aujourd'hui l'extrême droite religieuse en Israël, une des

---

<sup>5</sup>Autre faction du camp antifranquiste : Parti Ouvrier d'Unification Marxiste.

sectes les plus intégristes. Il avait tout renié, comme beaucoup de jeunes juifs à l'époque ; c'était le *Zeitgeist*. Par contre, Grothendieck a toujours suivi des règles alimentaires très strictes, encore plus restrictives que celles du kosher. Alors que, pour les Weil, la religion était le Veda, Grothendieck s'est défini pendant longtemps par rapport au bouddhisme. Voilà les analogies : une expérience profondément religieuse, une volonté de se détruire par fanatisme religieux, ce qui est un peu brutal à dire, une attirance vers la révolution anarchiste, et peut-être le fait que Simone Weil a rencontré les parents de Grothendieck ; on en ferait une bonne pièce de théâtre. Ils sont tous les deux des témoins du XXème siècle.

### **Le problème de la nature de l'espace**

*Habituellement, on décrit l'œuvre mathématique de Grothendieck comme étant formée de deux étapes tout-à-fait séparées, sans aucune relation entre elles. Par contre, votre thèse est que dans les premiers travaux d'Analyse Fonctionnelle, on peut déjà trouver le point de vue fonctoriel qu'il va utiliser de manière si féconde dans la refondation de la Géométrie Algébrique. Pourriez-vous nous expliquer brièvement cette idée ?*

L'ambition de Grothendieck dans son article *Tohoku* était de construire la cohomologie des faisceaux dans le cadre le plus général. Henri Cartan avait consacré plusieurs séminaires à ce sujet, partant des travaux de Leray, qui avaient été interprétés d'abord par Armand Borel. Dans la théorie de Leray-Borel-Cartan, il y avait des restrictions sur l'espace, qui pour les applications usuelles n'étaient pas gênantes : en gros, il fallait un espace localement compact. C'est Serre qui a obligé deux fois à élargir ce cadre : premièrement, dans sa thèse, il considérait des espaces de lacets, qui ne sont pas localement compacts, donc *a fortiori* pas des variétés de dimension finie. Donc, il fallait adapter la suite spectrale de Leray à cette situation-là et Serre a dû construire une première théorie d'homologie différente de la théorie habituelle. La deuxième fois qu'il l'a fait, c'était dans son article sur les faisceaux algébriques cohérents, où il a été obligé d'introduire la topologie de Zariski qui à l'époque était à peine connue. Elle existait, bien sûr, elle avait été inventée par Zariski dans ses travaux sur la désingularisation des surfaces, mais n'avait pas été très développée. André Weil a donné un séminaire sur les espaces fibrés en 1948 à Chicago, où il a dit que si l'on veut faire en géométrie algébrique ce que l'on fait en géométrie habituelle avec

les espaces fibrés, il faut une topologie, qui ne peut être que celle de Zariski. Serre et André Weil se voyaient souvent, ils correspondaient ; Serre reprend donc ces idées de Weil pour réinventer *ad hoc* une cohomologie de faisceaux dans un cadre où les méthodes de Cartan ne fonctionnent pas (l'espace n'est pas du tout séparé au sens de Hausdorff).

Pour l'esprit généralisateur de Grothendieck, on avait affaire à trois théories d'homologie de faisceaux : c'était trop, il en fallait une seule qui couvre tous les cas. Donc, Grothendieck se donne comme but de refaire la théorie de la cohomologie des faisceaux dans le cadre le plus général. Dans l'algèbre homologique de Cartan et Eilenberg, il y a une technique importante qui s'appelle la *méthode des résolutions*. Traduit pour les faisceaux, ceci nécessitait de savoir que tout faisceau est un sous-faisceau d'un faisceau injectif, mais à l'époque personne ne savait démontrer cela. Grothendieck, au lieu de faire cette construction explicitement, développe toute une classe de catégories, qu'il appelle catégories abéliennes, plus précisément  $AB5^*$ , et il démontre que, si une catégorie possède une certaine limite infinie, on peut construire, pour tout objet, un objet injectif qui le contient. Ensuite, vérifier que cette condition  $AB5^*$  est valable pour les faisceaux est facile, donc il y a des faisceaux injectifs et on peut recommencer comme Cartan et Eilenberg. Cela fait du coup une énorme simplification. C'est la méthode typique de Grothendieck : envelopper par le haut. Godement, dès qu'il a connu le résultat de Grothendieck, a donné dans son livre une construction directe et élémentaire de l'enveloppe injective d'un faisceau.

Quand on regarde ce qui sépare l'article *Tohoku* de Grothendieck, qui est de 1957, du livre de Cartan et Eilenberg, on se rend compte que c'est la première fois que les idées de suite infinie, de limite infinie dans une catégorie sont prises au sérieux. Grothendieck a pris ces idées de l'article de Dieudonné et Schwartz sur la dualité dans les espaces  $F$  et  $LF$  ( $F$  de Fréchet,  $LF$  veut dire limite directe d'espaces de Fréchet) qui a servi de base à sa thèse. Grothendieck est très conscient que les espaces de Fréchet sont des limites inverses d'espaces de Banach et que, donc, les espaces  $LF$ , que Schwartz a utilisés dans sa théorie des distributions et que Dieudonné a étudiés avec lui de manière plus abstraite, sont des doubles limites d'espaces de Banach. En plus, Grothendieck étudie dans sa thèse des propriétés, que l'on peut appeler fonctorielles, du produit tensoriel d'espaces de Banach ou d'espaces plus généraux. Sa stratégie est celle des foncteurs : on a deux produits tensoriels dont l'un est exact à droite, comme d'habitude, et l'autre

est exact à gauche. Si l'on veut avoir une théorie intéressante, il faut qu'à un certain moment ces deux notions coïncident. Il déduit immédiatement de là des applications, par exemple, il démontre sans effort ce que l'on appelle aujourd'hui le lemme de Dolbeault-Grothendieck.

Son idée est qu'un espace de fonctions ou de distributions de deux variables est le produit tensoriel de l'espace correspondant pour la première variable avec l'espace correspondant pour la deuxième variable. Mais les raisonnements qu'il utilise sont des raisonnements d'algèbre homologique adaptés au contexte analytique. Donc, Grothendieck est totalement familier avec le concept de ce que l'on appellera plus tard les modules plats en algèbre, bien que ceux-ci n'aient été inventés que quelques années plus tard par Serre. Les propriétés fonctorielles des constructions concernant l'analyse fonctionnelle sont déjà parfaitement explicites dans la thèse de Grothendieck. D'une part, le théorème de Künneth vectoriel-topologique qu'il avait démontré permettait d'avoir tout de suite des applications en algèbre homologique. D'autre part, ces idées de limite sont extrêmement importantes pour les faisceaux. En résumé, je vois une continuité complète entre ce qu'il a fait en Analyse Fonctionnelle et ce qu'il a fait ensuite, alors que beaucoup de mathématiciens ont tendance à dire que ce qu'il a fait en Analyse Fonctionnelle est moins important. Ce n'est pas vrai : l'école de Gelfand, par exemple, s'est emparée des résultats de Grothendieck et en a fait des applications extraordinaires en probabilité.

*Quel était le statut ontologique des catégories pour Grothendieck ?*

D'abord, il s'agit de son outil fondamental : on ne peut même pas mentionner les problèmes qui ont été résolus par Grothendieck sans parler de catégories et de foncteurs. Comme cela est signalé dans les *Éléments de Géométrie Algébrique*, les schémas algébriques possèdent un produit cartésien qui ne correspond pas au produit des ensembles sous-jacents. Donc, ceci oblige à considérer le point de vue des catégories, qui sert à formuler les nombreuses notions introduites par Grothendieck. Son but était de démontrer les conjectures de Weil en construisant une théorie d'homologie qui vérifie certaines propriétés catégoriques. Ensuite, il a inventé le concept dont il était le plus fier : le topos (*lieu* en grec), qui représentait pour lui la vérité ultime sur ce qu'est un espace. Je suis un peu plus réservé : l'idée de topos est une idée très importante qui fournit un éclairage sur la notion d'espace, mais cette dernière est tellement profonde et tellement difficile, que les topos ne l'épuisent pas : la géométrie non commutative d'Alain Connes est, par exem-

ple, un autre très bon éclairage. Je m'intéresse actuellement à faire un lien entre les deux. Cela a déjà été fait en partie par d'autres mathématiciens, mais je voudrais comprendre en profondeur pourquoi c'est en fait la même chose.

Alors, pour Grothendieck, les mathématiques s'expriment dans le langage des catégories et il n'y en a pas d'autre. Toutes les questions auxquelles il s'intéresse ont un énoncé en termes de catégories. Tout ce qui tourne maintenant autour de la théorie des nombres et la géométrie différentielle et algébrique utilise énormément ces outils, mais il est vrai qu'il y a des parties des mathématiques où l'emploi des catégories est très faible ou même inexistant. Parfois les spécialistes ne connaissent pas le langage et ceci les empêche de l'utiliser. Je pense qu'en probabilité, par exemple, depuis le théorème de Kolmogorov de 1930 et les travaux de l'école russe, on pourrait bien formuler la théorie en termes de catégories, mais personne n'a jamais fait l'effort. Ce n'est pas capital, parce que cela ne va pas donner de résultats nouveaux, mais cela éclaire les choses. Dans les équations aux dérivées partielles, il n'y en a pas beaucoup non plus, sauf dans les méthodes particulières que l'on appelle *microfonctions* de Kashiwara-Saito-Shapira, où il y a, par contre, un usage intensif des catégories.

Ontologique, ontologique... Grothendieck a fait un petit effort pour résoudre le problème au niveau des fondements que posent toujours les catégories. Il a introduit ce qu'on appelle les *univers*, qui ont un intérêt, mais aussi l'inconvénient d'obliger à s'intéresser à des problèmes diaboliques de logique et de théorie des ensembles : les grands cardinaux, les cardinaux inaccessibles... De plus, il me semble que ce n'est pas important : on est obligé de se poser des problèmes tellement vicieux, tellement alambiqués, que l'on a l'impression de leur inutilité. On sait bien depuis Russell que la notion d'ensemble de tous les ensembles est une notion contradictoire, donc parler de la catégorie de toutes les catégories est encore plus contradictoire ! Grothendieck a fourni avec les univers une solution que, en fait, il n'a jamais utilisée pour de bon : il n'y a que ses élèves Gabriel et Demazure qui ont joué le jeu dans un exposé un peu lourd, inclus dans leur livre sur les groupes algébriques.

En pratique, même s'il a proposé une solution au problème des fondements, il ne s'en est heureusement pas occupé. C'est justement un des points intéressants pour le développement des mathématiques d'aujourd'hui. En ce qui concerne l'histoire de l'Analyse, par exemple, l'évêque Berkeley avait déjà signalé que les infinitésimaux étaient pleins de contradictions logiques, mais

cela n'a pas empêché les mathématiciens tels que Lagrange, Euler ou Laplace, d'utiliser les infiniment petits avec beaucoup de succès, tout en sachant qu'il s'agissait de notions formellement contradictoires. De même, dans la théorie des catégories, nous savons que tous les raisonnements que nous utilisons sont formellement contradictoires, mais pourtant on les utilise et on ne se trompe pas. Un jour, on trouvera une base satisfaisante, de la même manière que Cauchy, Weierstrass, Dedekind et Cantor ont donné des fondements solides à l'Analyse, grâce en particulier à la théorie des ensembles. Je pense que Grothendieck était du même avis : il faut être pragmatique, on se sert des catégories, elles donnent des résultats ; il y a des problèmes de fondement, c'est vrai, mais tant que l'on n'est pas obligé d'aller les regarder, on ne les regarde pas. Est-ce maintenant le moment de les regarder ? Peut-être : en février 2009, précisément, j'ai fait un exposé en Allemagne où j'ai essayé d'expliquer une voie possible. On verra ce que cela donne, mais, ce qui est certain, c'est que beaucoup de travail et un certain savoir-faire en logique sont requis.

*Vous avez écrit qu'une des lignes de continuation de l'œuvre de Grothendieck les plus prometteuses est la fusion de la logique et de la géométrie dans la théorie des champs et des topos...*

Cela a déjà été fait en partie : Bénabou et Lawvere, en particulier, ont développé des connexions entre la théorie des topos et la logique. Bénabou a démontré, dans des travaux dont j'ai rendu compte dans un séminaire Bourbaki<sup>6</sup>, que la logique apparaissait de manière naturelle dans les topos. Lawvere a beaucoup développé aussi l'utilisation des foncteurs adjoints en logique, et il y a d'autres essais, comme celui de l'italien Mazzola, qui a écrit un gros livre appelé *Topos et musique*. En termes de logique, un topos fournit un modèle intuitionniste de la théorie des ensembles, ce qui permet de reformuler un certain nombre de problèmes de la théorie des modèles. J'ai entendu, par exemple, il n'y a pas longtemps, un exposé sur une solution à un problème posé par Carnap et Tarski employant des techniques de catégories. Un mélange intime des catégories et de la logique peut éclairer beaucoup de choses, mais cela n'intéressera peut-être pas la majorité des mathématiciens.

*En ce qui concerne la compréhension de la nature de l'espace, vous parlez*

---

<sup>6</sup>P. Cartier, *Logique, catégories et faisceaux (d'après W. Lawvere et M. Tierney)*, Séminaire Bourbaki, 30e année (1977/78), Exp. No. 513, pp. 123-146, Lectures Notes in Math., 710, Springer, Berlin, 1979.

*d'un hypothétique "groupe de Galois cosmique", une idée que Grothendieck aurait probablement aimée. Que voulez-vous dire exactement ?*

D'abord, en science, il faut trouver de temps à autre un mot qui frappe. René Thom avait inventé le mot "catastrophe", Mandelbrot avait inventé le mot "fractal", Alain Connes a créé la "géométrie non commutative", etc. Ce sont des mots qui expriment non nécessairement une définition très précise, mais en tout cas un programme de recherche qui vaut la peine d'être poursuivi. Alors, qu'est le groupe de Galois cosmique ? Justement, ce qui m'a permis de formuler cette notion est que j'ai suivi de près tout au long de ma carrière les développements en physique mathématique. Ce qui m'a frappé est qu'Alain Connes et Kreimer ont reformulé de manière totalement nouvelle les problèmes de ce que l'on appelle la *renormalisation* en physique. Les problèmes de renormalisation répondent à une façon d'enlever des infinis dans des intégrales divergentes. Il y a soixante ans que les procédés pour rendre convergente une intégrale divergente telles que les parties finies de Hadamard, les méthodes de prolongement analytique ou la régularisation dimensionnelle constituent un sujet classique. Pour une intégrale déterminée, on peut utiliser l'une ou l'autre de ces techniques, le résultat étant essentiellement le même. La nouveauté chez Feynman est qu'il ne s'agit pas de régulariser une seule intégrale, mais toute une famille d'intégrales correspondant à divers phénomènes physiques, qui sont en relation avec ce qu'on appelle les diagrammes de Feynman. À chaque diagramme de Feynman est associée son intégrale, qui est en général divergente, et il faut enlever les infinis quand on passe d'un diagramme à un diagramme plus petit ou plus grand, de manière à conserver les relations algébriques qui expriment des lois physiques. Connes et Kreimer ont complètement reformulé cette procédure grâce à l'introduction d'un groupe nouveau qui se décrit directement en termes de ces diagrammes, autrement dit de dessins.

D'un autre côté, il y a un certain nombre de travaux auxquels j'ai collaboré, en mathématiques proprement dites, où l'on s'intéresse à des séries et à des intégrales qui représentent des nombres généralisant les puissances de  $\pi$  ou les valeurs de la fonction zêta de Riemann. Il est utile d'étudier les relations entre ces nombres, qui étaient implicites déjà dans le travail de Drinfeld, puis ont été développées par beaucoup de mathématiciens dont certains de mes élèves. On peut formuler ces propriétés en introduisant un autre groupe, un groupe de symétrie, qui correspond à peu près à ce que Grothendieck avait appelé le groupe de Galois motivique. Donc, il y a d'une

part le groupe de Connes et Kreimer, qui apparaît naturellement dans la renormalisation en physique théorique, et d'autre part le groupe de Galois motivique, qui fournit à peu près une théorie de Galois pour certains nombres non algébriques. Je connaissais bien les deux développements et j'ai été très frappé par l'analogie entre eux ; j'ai donc suggéré qu'en fait il s'agit du même groupe ou, en tout cas, de variations sur le même groupe, qui agit des deux côtés. Maintenant la question : pourquoi est-ce le même ?

Comme je viens de le dire, le groupe de Galois motivique représente une théorie de Galois des automorphismes des nombres non algébriques, dont on n'a pas une définition générale, mais dont on connaît quand même un certain nombre de phénomènes. Quand on fait des calculs explicites des intégrales liées aux diagrammes de Feynman, les constantes que l'on trouve sont du même type que celles que l'on étudie en théorie des nombres. Alors, je me suis dit : "Il y a un groupe" et cela m'a conduit à une interprétation du groupe d'Alain Connes et Kreimer comme un *groupe de symétrie qui porte sur les constantes fondamentales de la physique*. Dans le modèle standard des particules élémentaires, il y a une vingtaine de constantes, dont la seule détermination connue est expérimentale : on a un tableau de vingt nombres avec une plus ou moins grande précision pour faire coïncider les prédictions des modèles avec les observations. Ce sont des constantes dont on n'a pas d'explication mathématique, que l'on ajuste simplement pour que cela colle avec les résultats expérimentaux. Je pense que ce groupe-là exprime des symétries d'un type nouveau entre ces constantes fondamentales de la physique. On n'a pas encore étudié les implications cosmologiques des idées de Connes et Kreimer, mais il y en a certainement. Il est possible que l'histoire de notre univers dépende de manière très précise de valeurs numériques comme le rapport entre les masses des quarks. Mon rêve est une fusion complète entre les idées de Connes-Kreimer et le groupe de Galois motivique de Grothendieck, Drinfeld... , mais pour l'instant ce n'est qu'un programme de recherche.

## **Un homme de la Renaissance**

*Vous avez quitté Bourbaki en 1983, selon la règle qui contraint ses membres à la retraite après l'âge de 50 ans. Vous avez écrit quelque part qu'un des moments scientifiques les plus importants de votre vie était l'exposé que vous avez donné au Congrès International des Mathématiciens en 1986 à*



*Berkeley. Quelles sont les nouvelles lignes de travail que cette contribution a ouvert ?*

D'abord, dans ce congrès, j'ai fait l'exposé au nom de Drinfeld, qui avait été invité à participer et avait envoyé un texte en anglais<sup>7</sup>. Il n'avait pas pu venir à cause du régime soviétique. Le premier jour du congrès, le texte m'a été remis par le président russe de l'Union Mathématique Internationale, en disant qu'il ne savait quoi en faire. Il y avait aussi un texte de Manin, et il m'a demandé si je voulais remplacer l'un des deux. J'ai réfléchi une seconde, puis j'ai dit : "Drinfeld". "Tu sais que sur le programme c'est cette après-midi ?" J'ai pris le manuscrit et j'ai dit : "Je vais essayer". Ensuite, j'ai expliqué la situation au président américain du comité d'organisation, Kaplansky, et je lui ai dit : "Il faut que tu m'aides". Alors, il a ouvert son bureau, il m'a enfermé dans une pièce qui était juste à côté, il m'a amené des sandwiches et du café et il m'a laissé. J'ai eu six heures. Les algèbres de Hopf sont un sujet que je connaissais, mais c'était entièrement nouveau et quand je suis arrivé pour l'exposé, il y avait quatre cents personnes pour écouter Drinfeld, c'est-à-dire moi. Les jours suivants, j'ai distribué autant de copies du texte, faites par des moyens artisanaux.

À cette époque-là, j'étais un petit peu à bout de mon programme de recherche mathématique, j'avais fait beaucoup de choses jusqu'à ce moment, mais j'étais dans une période d'attente. Du coup, je me suis dit que, dans les groupes quantiques, il y avait quelque chose de tout-à-fait nouveau, qui pouvait être traité avec des techniques que j'avais déjà utilisées autrefois (groupes de Lie, géométrie différentielle) et que je connaissais bien. Il y avait aussi la motivation par la physique là-dedans, même si elle n'était pas toujours visible, et cela a réorienté mes intérêts pendant une bonne dizaine d'années. D'ailleurs, j'organise toujours un séminaire à l'École Polytechnique qui s'appelle "Groupes quantiques et géométrie de Poisson" et qui est la suite de cela, vingt ans plus tard. . .

*Si l'on regarde vos publications et séminaires, on trouve une variété de sujets et de terrains de recherche vraiment admirable. On a l'impression que vous avez touché à tout ce qu'il valait la peine de toucher. Comment décidez-vous des problèmes auxquels vous travaillez ? Pensez-vous normalement à plusieurs questions en même temps ?*

---

<sup>7</sup>V.G. Drinfeld, *Quantum groups*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798-820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

Feynman aurait dit : “Si vous voulez être un génie, c’est très facile : vous avez dix problèmes dans votre tête, vous les regardez tout le temps. À chaque chose qui passe devant vous, vous dites *Voyons, ça peut m’aider là ?* Au bout d’un certain temps, il y a une boîte pleine et vous ne devez plus que la descendre”. Ma méthode, c’est mon caractère : il est fait de telle sorte que je suis curieux et que je m’intéresse à tout. Je vous ai dit que, dans ma première année à l’École Normale, je suivais des cours de philosophie, de physique et de mathématiques. J’ai toujours gardé en tête plusieurs problèmes à la fois ; même quand j’étudie un problème, j’ai plusieurs méthodes en tête, ce qui fait que j’y songe en permanence et que si j’arrive à un point de blocage, je repasse à côté, et je reviens ensuite. Les meilleures choses que j’ai faites sont des analogies entre sujets assez différents, comme ce qu’avait fait Dieudonné dans les groupes formels et les problèmes posés par André Weil. Deux ou trois fois dans ma carrière, j’ai vu comme cela des liens se forger instantanément : après, il fallait travailler. Comme j’ai acquis un certain savoir-faire dans beaucoup de directions différentes, je l’ai utilisé dans ma curiosité, j’essaye toujours d’être curieux.

Quand je retourne à mes antécédents familiaux, je vois que j’ai eu la chance d’avoir un père qui avait trop d’imagination ; dans sa vie, il a fait des choses un peu aberrantes, parce qu’il avait toujours de l’imagination et de la curiosité et il voulait tout en même temps. De l’autre côté, ma grand-mère était la juive alsacienne solide, le bon-sens, très joyeuse d’ailleurs, pas du tout triste. Le mélange du bon-sens alsacien de ma grand-mère, la mère de ma mère, et de l’imagination un peu délirante de mon père, m’a forgé une grande curiosité : je suis curieux des gens, ce qui fait que je suis curieux de visiter les pays, je lis beaucoup, dans beaucoup de sujets différents. Tout ce qui peut être intéressant m’intéresse. De plus, ma femme n’était pas mathématicienne, pour moi c’était une chance : elle a fait des études littéraires, puis elle a enseigné dans un lycée classique. Elle avait des intérêts différents des miens, mais nous les partageons facilement. Je n’ai pas eu d’éducation musicale, mais ma femme m’a fait partager son goût pour la musique : elle avait appris le piano dans son enfance et elle a joué jusqu’à ses dernières heures. Actuellement, il y a un groupe autour d’Yves André qui collabore avec des musiciens de l’équipe de Pierre Boulez ; nous avons un projet ensemble, parce que je me suis intéressé à un livre classique d’Euler sur la musique. Donc, c’est une curiosité naturelle. Mon petit-fils de treize ans m’a dit un jour : “Quand je serai grand, je serai comme toi : j’espère être aussi solide que toi,

je voyagerai autant que toi, j'aurai autant d'amis que toi".

*Vous avez aussi développé un intérêt très profond pour la philosophie des mathématiques. Quels sont les sujets dans cette aire qui vous attirent de plus ?*

Je dirais que ce qui m'attire dans l'épistémologie des mathématiques, c'est l'effort de comprendre comment les mathématiques font partie de la civilisation. Ce qui m'intéresse, c'est le développement des mathématiques vues comme un élément de la culture, c'est-à-dire, comment, à une certaine époque, il y a des concepts mathématiques qui surgissent à cause de certaines préoccupations dans la société : les échanges mutuels, le *Zeitgeist*. J'ai eu une élève qui s'est spécialisée en histoire des mathématiques en Chine, et qui a fait sa thèse en partie avec moi et mon frère sinologue. Par ailleurs, André Weil m'a donné le goût de l'histoire des mathématiques ; il m'a enseigné à fréquenter les mathématiciens du passé (Euclide, Archimède, Fermat, Euler, Gauss) en les considérant comme nos contemporains. La troisième source est la lecture d'Hermann Weyl, qui a éveillé en moi un souci de comprendre l'articulation physique-mathématiques et m'a permis de replacer quelques problèmes purement mathématiques dans une optique philosophique. Dans ces dernières années, je me suis intéressé à l'histoire des catégories, en partie parce que j'ai participé à leur développement et que mes souvenirs sont donc utilisables. C'est peut-être une des branches des mathématiques où l'on est le plus proche des problèmes philosophiques ; cela m'attire beaucoup plus que la logique formelle par elle-même. La question centrale est toujours la même : qu'est-ce qui assure que les mathématiques disent le vrai ? Comment le disent-elles ? Pourquoi le disent-elles toujours ?

Javier Fresán