SUR
LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN
ET LE
NOMBRE DES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS
A UNE LIMITE DONNÉE

PAR

Ch.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN
Correspondant de l'Académie royale de Belgique

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 4 juin 1898.)

OCT 9 1901

INTRODUCTION

RELATIVE A L'OBJET DU MÉMOIRE (*).

Je me suis occupé à plusieurs reprises, dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* de la théorie des nombres premiers.

La fonction de $\zeta(s)$ de Riemann joue dans cette théorie un rôle fondamental. J'ai démontré, pour la première fois, dans mes *Recherches sur la théorie des nombres premiers* (**), que la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de racines de la forme $1 + \beta i$. M. Hadamard a également, avant d'avoir eu connaissance de mes recherches, trouvé le même théorème par une voie plus simple. L'importance de ce théorème est considérable, par le nombre des conséquences asymptotiques que l'on peut en déduire.

(*) Voir le rapport de M. Mansion sur ce Mémoire (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique,* juillet 1898). — Depuis que ce Mémoire a été soumis à l'appréciation de l'Académie, nous avons refait tous les calculs numériques en y apportant plus de précision. Nous avons aussi perfectionné notre travail sur plusieurs points de détail, et nous avons tenu compte des conseils de M. Mansion. C'est ce qui explique les légères divergences que l'on remarquera entre le présent Mémoire et l'analyse que M. Mansion en a faite.

(**) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1896.

Celle qui a peut-être le plus d'intérêt par le nombre considérable de travaux auxquels elle a donné lieu, s'exprime par le théorème suivant :

Le nombre des nombres premiers inférieurs à x *a pour expression asymptotique, lorsque* x *est grand,*

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dy}{ly} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dy}{ly}$$

avec une erreur qui devient infiniment petite par rapport à Li (x) *quand* x *tend vers l'infini.*

La démonstration de ce théorème a été publiée pour la première fois dans un article de M. von Mangoldt (*).

On trouve aussi dans cet article des renseignements historiques qu'il est intéressant de reproduire (**).

Le pressentiment du théorème précédent a été d'abord exprimé par Dirichlet en 1838 (***), puis par Gauss en 1849 (IV). C'est Tchebychev qui a le premier donné deux limites certaines où l'on peut renfermer le nombre des nombres premiers (V). Mais cet intervalle, quand x croît indéfiniment, n'est pas une fraction infiniment petite de sa limite supérieure, car il reste égal au $\frac{1}{10^e}$ au moins de cette limite. Sylvester, dans

(*) *Ueber eine Anwendung der Riemann'sche Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze.* (Journ. f. d. reine u. angew. Math., Bd 119.)

(**) On lira aussi avec intérêt, à ce point de vue, le savant rapport de M. Mansion sur notre Mémoire.

(***) Lejeune-Dirichlet. *Werke*, Bd I, 2e note, p. 372.

(IV) Lettre à Encke. *Werke*, Bd II, pp. 444-447.

(V) *Journal de mathématiques,* t. XVII, 1852, p. 389.

son article sur le travail de Tchebychev (*) n'a pas réussi à pousser plus loin l'approximation. On voyait donc bien que $Li(x)$ représentait approximativement le nombre des nombres premiers $< x$, mais on n'avait pas encore pu démontrer que l'approximation surpassât $\frac{1}{10^e}$. Le travail de Riemann, qui devait finalement conduire à la solution du problème, était resté, jusque dans ces derniers temps, compliqué de difficultés qu'on ne savait surmonter. C'est la résolution au moins partielle de ces difficultés qui a permis d'établir le théorème rappelé ci-dessus et dont l'importance ne peut échapper, puisqu'il exprime que le logarithme intégral est, au sens mathématique du mot, l'expression asymptotique du nombre des nombres premiers $< x$, c'est-à-dire que l'erreur commise est infiniment petite par rapport à lui.

Lorsque l'on cherche à exprimer $Li(x)$ sous forme finie, on trouve une suite de termes de la forme

$$\frac{x}{lx} + \frac{x}{(lx)^2} + \frac{2x}{(lx)^3} + \frac{2.3x}{(lx)^4} + \ldots$$

Le premier terme est la valeur principale de $Li(x)$ et fournit donc aussi une expression asymptotique du nombre des nombres premiers $< x$. C'est ce que j'ai montré directement dans une note à la fin de l'article de M. von Mangoldt cité plus haut.

Le seul fait que $\zeta(s)$ n'a pas de racines de la forme $1 + \beta i$ ne permet pas de décider laquelle des deux expressions $\frac{lx}{x}$ ou $Li(x)$ est l'expression asymptotique la plus exacte.

(*) *On Tchebycheffs' theorem of the totalyty of the primnumbers comprised within given limits.* (AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS, vol. IV, 1881, pp. 230-247.)

Pour pouvoir trancher la question, il faut savoir trouver une limite supérieure < 1 des parties réelles α des racines imaginaires $\alpha + \beta i$ de $\zeta(s)$. C'est ce qui n'était fait ni dans mon Mémoire ni dans celui de M. Hadamard. C'est ce qui est fait dans celui-ci, où nous donnons une limite inférieure de $1 - \alpha$. Cette limite fournie par le théorème du n° 30 est très petite, il est vrai, dépend de β et tend vers zéro quand β augmente. Elle n'en a pas moins une très grande valeur. Elle nous permettra de démontrer que $\mathrm{L}i(x)$ représente le nombre $\mathrm{F}(x)$ des nombres premiers $< x$ avec une erreur qui ne peut surpasser une quantité de la forme.

$$a \frac{x}{lx} e^{-b\sqrt{lx}},$$

où a et b sont des nombres fixes, et que, par conséquent, *le logarithme intégral est une expression asymptotique de* $\mathrm{F}(x)$ *plus exacte que toutes ses expressions possibles sous forme finie.*

La méthode que nous allons suivre s'étend d'elle-même aux nombres premiers de la progression arithmétique. Nous y reviendrons plus tard.

SUR
LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN
ET LE
NOMBRE DES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS
A UNE LIMITE DONNÉE

PREMIÈRE PARTIE.
SUR LES ZÉROS DE $\zeta(s)$.

—

CHAPITRE PREMIER.
CALCULS PRÉLIMINAIRES.

§ 1. *Rappel de quelques formules connues* (*).

1. La forme $\zeta(s)$ est définie par les relations

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

la somme s'étendant à tous les entiers et le produit infini à tous les nombres premiers.

2. La fonction $\zeta(s)$ a des zéros sur l'axe réel qui sont les pôles de $\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$, mais elle a en outre une infinité de racines imaginaires dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Nous désignerons, en général, ces racines imaginaires par

$$\rho = \alpha + \beta i \qquad (0 < \alpha < 1).$$

(*) Voir mes *Recherches sur la théorie des nombres premiers,* 1re partie.

3. Ces racines jouissent des propriétés suivantes :

1° Elles sont conjuguées deux à deux ;

2° A toute racine ρ correspond une racine $1-\rho$;

3° Si la partie réelle α de ρ n'est pas $\frac{1}{2}$, les racines ρ et $1-\rho$ forment avec leurs conjuguées un système de quatre racines distinctes :

$$\begin{array}{cc} \alpha+\beta i & \alpha-\beta i \\ 1-\alpha+\beta i & 1-\alpha-\beta i. \end{array}$$

4° M. Van Mangoldt a démontré que la valeur absolue de β est toujours supérieure à 12 (*).

4. La dérivée logarithmique de $\zeta(s)$ vérifie la relation

$$(2) \qquad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{s-1} - \mathrm{D}\log.\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\rho}\frac{1}{s-\rho},$$

où les racines ρ doivent être rangées par ordre de modules croissants.

On en tire, en remplaçant $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ par sa valeur obtenue par la différentiation du produit infini (1),

$$(3) \qquad \sum_{\rho}\frac{1}{s-\rho} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\log\pi + \mathrm{D}\log.\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) - \sum\frac{lp}{p^s-1}.$$

Cette formule va jouer un rôle important dans notre étude. Nous allons d'abord en déduire une conséquence utile.

5. *Cas particuliers de la formule* (3). J'ai démontré dans mon Mémoire sur la fonction $\zeta(s)$, au n° 54, que l'on a

$$\lim_{s=1}\left(\frac{\zeta' s}{\zeta s} + \frac{1}{s-1}\right) = \mathrm{C},$$

(*) *Zu Riemann's Abhandlung : Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* (JOURN. FÜR DIE REINE UND ANGEW. MATHEMATIK, Bd. 114.)

où C désigne la constante d'Euler. L'équation (2) donne donc, pour $s = 1$,

$$\sum \frac{1}{1-\rho} = -\frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \mathrm{C}.$$

On a d'ailleurs, par une formule bien connue de Gauss,

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \mathrm{C} = \int_0^1 \frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{1-x}dx = 2\int_0^1 \frac{xdx}{1+x} = 2(1-l2),$$

de sorte que l'équation précédente donnera, eu égard à la propriété (2°) des racines ρ (n° 3),

$$(4)\ \ldots\ \sum\frac{1}{\rho} = \sum\frac{1}{1-\rho} = \frac{\mathrm{C}}{2} + 1 - l2 - \frac{1}{2}l\pi.$$

Comme on a

$$l2 = 0{,}69314\ 71805\ 60,$$

$$\frac{1}{2}l\pi = 0{,}57236\ 49429\ 24,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{C} = 0{,}28860\ 78324\ 51,$$

on en déduit

$$(4^{\text{bis}})\ \ldots\ \sum\frac{1}{\rho} = \sum\frac{1}{1-\rho} = 0{,}02309\ 57089\ 67\ldots$$

Les racines $\rho = \alpha + \beta i$ sont conjuguées deux à deux, de sorte que les parties imaginaires se détruisent dans les sommes précédentes. Par conséquent, la formule (4) peut s'écrire aussi

$$(5)\qquad \sum \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} = \sum \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2+\beta^2} = 0{,}02309\ 57089\ 67\ldots$$

La formule (4) entraîne aussi comme conséquence, qui peut être utile,

$$(6)\qquad \sum \frac{1}{\rho} + \sum \frac{1}{1-\rho} = \sum \frac{1}{\rho(1-\rho)} = 0{,}04619\ 14179\ 34\ldots$$

§ 2. *Sur une expression approchée de* D log Γ(a).

6. Schaar a établi, pour a réel et positif, la formule (*)

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi}$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{-\infty} \frac{a \log(1 - e^{2\pi x})\, dx}{a^2 + x^2}.$$

On obtient, en différentiant,

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \log a - \frac{1}{2a} + \frac{1}{\pi} \int_0^{-\infty} \frac{x^2 - a^2}{(x^2+a^2)^2} \log(1 - e^{2\pi x}) dx,$$

puis, par le changement de la variable x en ax,

$$(7)\qquad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \log a - \frac{1}{2a} + \frac{1}{\pi a} \int_0^{-\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2+1)^2} \log(1 - e^{2\pi a x}) dx.$$

Cette formule vient d'être établie pour a réel et > 0; mais comme ses deux membres représentent des fonctions synec-

(*) MEYER, *Bestimmte Integrale,* § 52. (Leipzig, 1871), et LIMBOURG, *Théorie de la fonction* Γ. (MÉMOIRE ACAD. DE BELGIQUE, t. XII.)

plexe en faisant précéder celle-ci de la caractéristique $\Re$. On a, pour $a = u + ti$,

$$\Re \log a = \frac{1}{2} \log (u^2 + t^2) = \log |t| + \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{u^2}{t^2}\right).$$

Si l'on suppose $u^2 < t^2$, on aura, en désignant par θ_1 une quantité > 0 et < 1,

$$\Re \log a = \log |t| + \frac{\theta_1}{2} \frac{u^2}{t^2}.$$

On a ensuite, eu égard à la signification de θ,

$$\Re \frac{\theta}{12au} = \frac{\theta}{12u\sqrt{u^2 + t^2}} = \frac{\theta_2}{12ut} \quad (-1 < \theta_2 < 1)$$

$$\Re \frac{1}{2a} = \frac{u}{2(u^2 + t^2)}.$$

Donc l'équation (8) donnera, pour $t^2 > u^2$,

$$(9)\ldots \quad \begin{cases} \Re \dfrac{\Gamma'(u + ti)}{\Gamma(u + ti)} = \log |t| - \dfrac{u}{2(u^2 + t^2)} + \theta\left(\dfrac{1}{12u|t|} + \dfrac{u^2}{2t^2}\right) \\ \qquad (-1 < \theta < 1). \end{cases}$$

§ 3. *Évaluation de* $\Sigma \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$.

8. Considérons de nouveau des sommes étendues à toutes les racines imaginaires $\rho = \alpha + \beta i$ de $\zeta(s)$.

On a identiquement

$$\sum \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha)^2 + \beta^2} = \sum \frac{1 - \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \sum \frac{(1 - \alpha)(2\alpha - 1)}{(\alpha^2 + \beta^2)(\overline{1 - \alpha}^2 + \beta^2)}.$$

Donc, en ajoutant membre à membre avec

$$\sum \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2+\beta^2} = \sum \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},$$

il vient

$$2\sum \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2+\beta^2} = \sum \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} + \sum \frac{(1-\alpha)(2\alpha-1)}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)}.$$

D'ailleurs la dernière somme ne devant pas changer par la permutation de α en $1-\alpha$, est aussi égale à

$$\frac{1}{2}\sum \frac{(1-\alpha)(2\alpha-1)+\alpha(1-2\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)} = -\frac{1}{2}\sum \frac{(2\alpha-1)^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)},$$

et l'on trouve, par conséquent,

$$(10)\qquad \sum \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} = 2\sum \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{1}{2}\sum \frac{(2\alpha-1)^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)}.$$

D'ailleurs, puisque β est toujours > 12 en valeur absolue et $(2\alpha-1)^2 < 1$, cette dernière somme est inférieure

$$\frac{1}{2}\frac{1}{12^2}\sum \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{288}\sum \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}$$

et l'équation (10) donne

$$(11).\qquad \sum \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} < \frac{2}{1-\frac{1}{288}}\sum \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} < \frac{0{,}046192}{1-\frac{1}{288}},$$

en vertu de l'équation (5).

§ 4. *Évaluation de* $\Sigma \frac{1}{(u-\rho)(1-\rho)}$.

9. Nous désignons dans ce qui suit par u une quantité réelle et positive > 1.

On a, ρ étant égal à $\alpha + \beta i$,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} -\sum \frac{1}{(u-\rho)(1-\rho)} &= \sum \frac{\beta^2-(u-\alpha)(1-\alpha)}{[(u-\alpha)^2+\beta^2][1-\alpha)^2+\beta^2]} \\ &= \sum \frac{1}{(1-\alpha)^2+\beta^2} - \sum \frac{(u-\alpha)(u-2\alpha+1)}{[(u-\alpha)^2+\beta^2][(1-\alpha)^2+\beta^2]}. \end{aligned}\right.$$

Dans cette dernière somme, on a identiquement

$$\frac{1}{(u-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{(2\alpha-u)u}{[(u-\alpha)^2+\beta^2][\alpha^2+\beta^2]},$$

et par conséquent, en substituant cette valeur,

$$\begin{aligned} \sum \frac{(u-\alpha)(u-2\alpha+1)}{[(u-\alpha)^2+\beta^2][(1-\alpha)^2+\beta^2]} &= \sum \frac{(u-\alpha)(u-2\alpha+1)}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)} \\ &+ u\sum \frac{(u-\alpha)(2\alpha-u)(u-2\alpha+1)}{[(u-\alpha)^2+\beta^2][\alpha^2+\beta^2][(1-\alpha)^2+\beta^2]}. \end{aligned}$$

Si 2α est $< u$, on a, au dernier numérateur,

$$0 > (u-\alpha)(2\alpha-u)(u-2\alpha+1) > -u^2(u+1).$$

Si $2\alpha > u$ et $\alpha < u$, on a

$$0 < (u-\alpha).(2\alpha-u)[1-(2\alpha-u)] < (u-\alpha)\frac{1}{4} < \frac{u}{4}.$$

On peut donc poser, pour $u > 1$, puisque $\beta^2 > 144$,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \sum \frac{(u-\alpha)(u-2\alpha+1)}{[(u-\alpha)^2+\beta^2][(1-\alpha)^2+\beta^2]} &= \sum \frac{(u-\alpha)(u-2\alpha+1)}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)} \\ &+ \tau \sum \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)} \\ &\left(-\frac{u^3(u+1)}{144} < \tau < \frac{u^2}{4.144}\right). \end{aligned}\right.$$

Au second membre de l'équation (13) ci-dessus, la première somme ne doit pas changer, si l'on remplace α par $1-\alpha$.

On peut donc y remplacer les numérateurs par

$$\frac{1}{2}[(u-\alpha)(u-2\alpha+1)+(u-1+\alpha)(u+2\alpha-1)]=\frac{2u^2-u+(2\alpha-1)^2}{2}.$$

Faisons cette substitution dans (13), puis portons la valeur trouvée dans (12) et changeons α en $1-\alpha$; il vient

$$-\sum\frac{1}{(u-\rho)(1-\rho)}=\sum\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}-\left(u^2-\frac{u}{2}+\tau\right)\sum\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)}$$
$$-\frac{1}{2}\sum\frac{(2\alpha-1)^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)}.$$

Remplaçons encore $\Sigma\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}$ par sa valeur (10), nous trouverons l'expression définitive

$$(14)\quad\begin{cases}-\displaystyle\sum\frac{1}{(u-\rho)(1-\rho)}=2\sum\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-\left(u^2-\frac{u}{2}+\tau\right)\sum\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)}\\ \left(-\dfrac{u^3(u+1)}{144}<\tau<\dfrac{u^2}{4.144}\right).\end{cases}$$

10. Dans le second membre de la formule (14), le premier terme est connu, sa valeur 0,0461914... est donnée par l'équation (5). La seconde somme est très petite et sa valeur pourrait se calculer avec une très grande approximation en posant $u=1$ dans la formule (14), mais nous pouvons nous dispenser de faire ce calcul. La formule (14) représente donc, avec une grande approximation, vu la petitesse de τ, la manière dont varie son premier membre quand $u>1$ varie dans le voisinage de l'unité. C'est à ce point de vue que nous allons l'utiliser. Si l'on remarque que, dans la formule (14), on a par (11)

$$\sum\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)}<\frac{1}{12^2}\sum\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}<\frac{0{,}046192}{144-\frac{1}{2}},$$

cette formule pourra aussi s'écrire

$$(15).\quad \left\{\begin{aligned} & -\sum \frac{1}{(u-\rho)(1-\rho)} = 2\sum \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - \sigma \\ & \sigma = \left(u^2 - \frac{u}{2} + \tau\right) \sum \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)(\overline{1-\alpha}^2+\beta^2)} \\ & \quad < \frac{0{,}046192}{144-\frac{1}{2}} \left(u^2 - \frac{u}{2} + \tau\right). \end{aligned}\right.$$

§ 5. *Évaluation approchée de* $\dfrac{\Gamma'\left(\frac{u}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right)}$.

11. Nous allons encore indiquer la manière de faire ce calcul quand u est réel > 1 et voisin de l'unité.

On a, par la formule de Gauss,

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\,dx,$$

l'équation

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{u}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right)} = \int_0^1 \frac{x^{\frac{u}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{1-x}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^{u-1}-1}{1-x^2}\,x^2dx$$

$$= 2\int_0^1 (x^{u-1}-1)dx \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+u} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= -2(u-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + (2n+1)(u-1)}$$

$$= -2(u-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + 2(u-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} - \ldots$$

On a d'ailleurs (*)

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \sum \frac{1}{n^2} - 1 = 0{,}23370\ 05501$$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^3} = \left(1 - \frac{1}{8}\right) \sum \frac{1}{n^3} - 1 = 0{,}05179\ 97903$$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^4} = \left(1 - \frac{1}{16}\right) \sum \frac{1}{n^4} - 1 = 0{,}01467\ 80316$$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^5} = \left(1 - \frac{1}{32}\right) \sum \frac{1}{n^5} - 1 = 0{,}00452\ 37628$$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^6} = \left(1 = \frac{1}{64}\right) \sum \frac{1}{n^6} - 1 = 0{,}00144\ 70766$$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^7} = \left(1 - \frac{1}{128}\right) \sum \frac{1}{n^7} - 1 = 0{,}00047\ 15487$$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^8} = \left(1 - \frac{1}{256}\right) \sum \frac{1}{n^8} - 1 = 0{,}00015\ 51790$$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^9} = \left(1 - \frac{1}{512}\right) \sum \frac{1}{n^9} - 1 = 0{,}00005\ 13452$$

En substituant ces valeurs dans la formule précédente, on obtient la formule propre au calcul que nous voulions établir.

§ 6. *Évaluation approchée de* $\frac{\zeta' u}{\zeta u}$.

12. Nous avons besoin d'évaluer approximativement $\frac{\zeta' u}{\zeta u}$ pour u réel et voisin de l'unité par excès. Ce calcul est devenu facile, moyennant les résultats qui précèdent.

Changeons s en u, puis s en 1 dans l'équation (2) et sous-

(*) Les sommes $\Sigma n^{-2} = s_2$, $\Sigma n^{-3} = s_3$,... ont été calculées par Legendre. (Voir Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, t. III, seconde édition, p. 149.)

trayons membre à membre les deux équations ainsi obtenues, nous trouverons

$$\frac{\zeta' u}{\zeta u} + \frac{1}{u-1} = C - \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{u}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]$$
$$-(u-1)\sum \frac{1}{(u-\rho)(1-\rho)}.$$

Donc, par la formule (15) et par celle du paragraphe précédent, il viendra

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\zeta' u}{\zeta u} + \frac{1}{u-1} = {} & 0,57721\,5665 \qquad - 0,18750\,915\,(u-1) \\ & + 0,05179\,979(u-1)^2 - 0,01467\,803\,(u-1)^3 \\ & + 0,00452\,576\,(u-1)^4 - 0,00144\,708\,(u-1)^5 \\ & + 0,00047\,155(u-1)^6 - 0,00015\,518\,(u-1)^7 \\ & + 0,00005\,135(u-1)^8 - \ldots\ldots\ldots \\ & - (u-1)\,\sigma, \end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger, comme au n° 10,

$$(17)\ .\ .\quad \sigma = \left(u^2 - \frac{u}{2} + \tau\right)\sum \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)(\overline{1-\alpha}^2 + \beta^2)}.$$

Nous allons faire deux applications de cette formule.

13. *Première application*. Posons d'abord $u - 1 = \frac{1}{2}$; l'équation (16) donnera, en changeant les signes,

$$-\frac{\zeta'\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} - 2 = -0,57721\,566 + 0,09375\,456 + \frac{\sigma}{2}$$
$$\begin{aligned} & - 0,01294\,995 + 0,00183\,475 \\ & - 0,00028\,279 + 0,00004\,522 \\ & - 0,00000\,757 + 0,00000\,121 \\ & - 0,00000\,020 + \ldots . \end{aligned}$$

On trouve une limite inférieure du second membre en bornant la série, qui a ses termes alternativement positifs et négatifs, aux termes écrits ci-dessus, dont le dernier est négatif, et en négligeant le terme complémentaire $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, qui est positif. On obtient ainsi

$$(18)\quad \ldots\ldots\quad -\frac{\zeta'\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)} > 1{,}50517\,98$$

14. *Seconde application*. Nous allons supposer que $u - 1$, encore positif, est $< \frac{1}{12}\cdot$ Dans ce cas, comme le montre la formule (15), le dernier terme $(u-1)\,\sigma$ de la formule (16) est inférieur en valeur absolue à

$$\frac{1}{12}\frac{0{,}046192}{143{,}5}\left(u^2 - \frac{u}{2} + \tau\right) < 0{,}0000178,$$

cette valeur s'obtenant en remplaçant $\left(u^2 - \frac{u}{2} + \tau\right)$ par la quantité supérieure $\frac{2}{3}\cdot$

On a donc par la formule (16), pour $u - 1 < \frac{1}{12}$, en arrêtant la série à son quatrième terme qui est négatif,

$$\frac{\zeta' u}{\zeta u} + \frac{1}{u-1} > 0{,}57721\,56 - \frac{0{,}18751}{12} + \frac{0{,}05179}{(12)^2} - \frac{0{,}01468}{(12)^3}$$
$$- 0{,}00001\,78$$
$$> 0{,}56192\,29$$

§ 7. *La partie réelle* α *des racines* $\alpha + \beta i$ *ne peut différer de* $\frac{1}{2}$ *que si* $|\,\beta\,|$ *est* > 28 (*).

15. Reprenons la formule (3), qui peut s'écrire

$$(19)\quad \sum \frac{1}{s-\rho} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\,l\pi + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} - \sum \frac{lp}{p^{ms}},$$

(*) Dans le manuscrit soumis à l'examen des commissaires, nous avions la dernière somme s'étendant à toute les puissances p^m des nombres premiers.

Nous aurons, dans ce paragraphe, à considérer une série d'inégalités. Pour en simplifier l'écriture, nous conviendrons que lorsque nous écrirons des inégalités entre quantités imaginaires, ces inégalités se rapporteront toujours aux parties réelles des deux membres.

Soit, comme dans les paragraphes précédents, $s = u + ti$, où u et t sont réels; on aura d'abord

$$\sum \frac{lp}{p^{mu}} + \sum \frac{lp}{p^{ms}} > 0,$$

car cette inégalité revient, par la convention qui précède, à

$$\sum \frac{lp}{p^{mu}} [1 + \cos(mtlp)] > 0,$$

qui est évidente, tous les termes de la somme étant positifs.

Changeons s en u dans la formule (19) et ajoutons membre à membre; on aura, en vertu de l'inégalité précédente,

$$(20). \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum \frac{1}{s-\rho} + \sum \frac{1}{u-\rho} < \frac{1}{s-1} + \frac{1}{u-1} \\ & \qquad - l\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \frac{\Gamma'\left(\frac{u}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right)} \right]. \end{aligned} \right.$$

16. C'est sur cette inégalité (20) que nous allons raisonner pour trouver une limite inférieure de β quand α diffère de $\frac{1}{2}$. Pour cela nous supposerons que $\alpha + \beta i$ est une racine de ζs où α diffère de $\frac{1}{2}$ et où $\beta > 0$, et nous poserons, dans la for-

déduit la limite inférieure de β d'une formule que nous établirons plus loin. (Voir le Rapport de M. Mansion.) La méthode nouvelle exposée dans ce paragraphe fournit une limite un peu plus élevée.

mule (20), $u = 2$ et $t = \beta$, donc $s = 2 + \beta i$. Nous allons transformer, dans cette hypothèse, les différents termes qui s'y trouvent.

Nous avons d'abord à étudier la somme $\Sigma \frac{1}{s-\rho}$. Tous les termes de cette somme ont leur partie réelle positive, car celle de s est > 1 et celle d $\alpha < 1$. Nous diminuerons donc la partie réelle de la somme, en limitant celle-ci à un certain nombre de ses termes.

Nous bornerons cette somme aux deux racines $\alpha + \beta i$ et $1 - \alpha + \beta i$ qui existent toujours et sont différentes, α étant supposé différent de $\frac{1}{2}$ (n° 3, 3°). On obtient ainsi, pour $s = 2 + \beta i$,

$$(21) \qquad \sum \frac{1}{s-\rho} > \frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} = \frac{3}{(2-\alpha)(1+\alpha)} > \frac{4}{3},$$

ce minimum ayant lieu pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

Passons à l'évaluation du second terme de la formule (20). On peut l'écrire comme suit :

$$\sum \frac{1}{u-\rho} = \sum \frac{1}{1-\rho} - (u-1) \sum \frac{1}{(u-\rho)(1-\rho)}$$
$$= \sum \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - (u-1) \sum \frac{1}{(u-\rho)(1-\rho)}$$

et, par les formules (13) et (14),

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{1}{u-\rho} = (2u-1) \sum \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - (u-1)\sigma \\ &\qquad \sigma < \frac{0,046192}{143,5}\left(u^2 - \frac{u}{2} + \tau\right) \\ &\qquad \tau < \frac{u^2}{4.144}. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas actuel, $u = 2$ et il vient

$$\sum \frac{1}{2-\rho} > 3 \sum \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{0,046192}{143,5}\left(3 + \frac{1}{144}\right).$$

Ce dernier terme négatif est inférieur à 0,000968 en valeur absolue; le précédent se calcule par la formule (5). Il vient ainsi

$$(22) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum \frac{1}{2-\rho} > 0{,}068319.$$

Nous arrivons maintenant au dernier terme de la formule (20).

Pour $u = 2$, on a par la formule de Gauss, déjà utilisée au n° 11,

$$(23) \quad \ldots \quad \frac{\Gamma'\left(\frac{u}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = 1 - C.$$

Substituons les valeurs (21), (22) et (23) dans l'inégalité (20), où l'on a $u = 2$, $s = 2 + \beta i$; il viendra *a fortiori*, à cause du sens des inégalités 21 et 22,

$$\frac{4}{3} + 0{,}068319 < \frac{1}{1+\beta^2} + 1 - l\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(2+\frac{\beta}{2}i\right)}{\Gamma\left(2+\frac{\beta}{2}i\right)} + 1 - C\right]$$

On en tire, en multipliant par 2 et en effectuant les calculs numériques,

$$2{,}66998 < \frac{\Gamma'\left(2+\frac{\beta i}{2}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{\beta i}{2}\right)} + \frac{2}{1+\beta^2}.$$

Remplaçons encore $\Gamma' : \Gamma$ par son expression tirée de la formule (9); nous aurons encore *a fortiori*, β étant positif,

$$2{,}66998 < \log\frac{\beta}{2} + \frac{1}{12\beta} + \frac{8}{\beta^2} - \frac{4}{16+\beta^2} + \frac{2}{1+\beta^2}$$

d'où, en observant que $\frac{4}{16+\beta^2} > \frac{4}{\beta^2} - 4\,\frac{16}{\beta^4}$ et $\frac{2}{1+\beta^2} < \frac{2}{\beta^2}$,

$$(24) \quad . \quad . \quad \log\frac{\beta}{2} > 2{,}66998 - \frac{1}{12\beta} - \frac{1}{\beta^2}\left(6 + \frac{64}{\beta^2}\right).$$

Comme on sait déjà que β est > 12, la dernière parenthèse est inférieure à $6{,}5$; donc

$$\log\frac{\beta}{2} > 2{,}66998 - \frac{7{,}5}{144} > 2{,}617$$

$$\beta > 27{,}38.$$

On peut donc supposer maintenant $\beta > 27{,}38$ dans la formule (24). Dans ce cas, la parenthèse de cette formule est inférieure à $6{,}1$ et l'on a

$$\log\frac{\beta}{2} > 2{,}66998 - \frac{100.58}{12(27{,}38)^2} > 2{,}65879$$

$$\beta > 28{,}558;$$

de là le théorème suivant :

17. Théorème. *La fonction* $\zeta(s)$ *n'a pas de racine imaginaire* $\alpha + \beta i$ *où* α *diffère de* $\frac{1}{2}$, *à moins que* β *ne soit plus grand que* $28{,}558$ *en valeur absolue.*

CHAPITRE II.

Recherche d'une limite supérieure de la partie réelle des racines ρ.

§ 1er. *Démonstration d'une inégalité fondamentale.*

18. Posons $s = u + ti$. Nous supposerons, dans tout ce chapitre, que u est une quantité réelle, voisine de l'unité par excès, et que t est réel, positif et > 12.

L'équation (3), eu égard à l'identité

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \sum \frac{lp}{p^s - 1} = 0,$$

peut évidemment s'écrire

$$(25) \ . \ . \quad \sum_\rho \frac{1}{s-\rho} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\log \pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

$$- \sum \left[\frac{lp}{p^u - 1} + \frac{lp}{p^s - 1}\right] - \frac{\zeta' u}{\zeta u}\cdot$$

On a

$$\sum \frac{lp}{p^s - 1} = \sum \frac{lp}{p^{ms}} = \sum \frac{lp}{p^{mu}}[\cos mtlp + i \sin mtlp],$$

où la première somme s'étend à tous les nombres premiers successifs et les deux suivantes à toutes les puissances p^m des nombres premiers. On aura donc

$$\Re \sum \left[\frac{lp}{p^u - 1} + \frac{lp}{p^s - 1}\right] = \sum \frac{lp}{p^{mu}}(1 + \cos mtlp)$$

et la somme du second membre s'étend à toutes les puissances p^m des nombres premiers.

Remarquons maintenant qu'on a l'équation

$$\frac{1}{2}(1 - \cos mtlp)(1 + \cos mtlp) = \frac{1 - \cos 2mtlp}{4};$$

il viendra, en multipliant respectivement les termes de la dernière somme (qui sont tous positifs) par $\frac{1 - \cos mtlp}{2}$, qui est > 0 et < 1,

$$\Re \sum \left[\frac{lp}{p^u - 1} + \frac{lp}{p^s - 1}\right] > \frac{1}{4} \sum \frac{lp}{p^{mu}}(1 - \cos 2mtlp).$$

Afin d'abréger l'écriture, nous allons convenir une fois pour toutes que, lorsque nous écrirons des inégalités entre quantités imaginaires, ces inégalités se rapporteront aux parties réelles des deux membres seulement.

Moyennant cette convention, l'équation (25) nous donnera par l'inégalité précédente

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{1}{s-\rho} < \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \\ &\qquad - \frac{1}{4}\sum \frac{lp}{p^{mu}}(1-\cos 2mtlp) - \frac{\zeta' u}{\zeta u}. \end{aligned} \right.$$

Posons maintenant $s' = u + 2ti$.

On peut écrire une équation analogue à (25) en changeant le signe des deux termes en u qui se détruisent et en changeant s en s' dans cette équation ; ce sera

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{s'-\rho} = \frac{1}{s'-1} - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s'}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s'}{2}+1\right)} \\ + \sum\left[\frac{lp}{p^u-1} - \frac{lp}{p^{s'}-1}\right] + \frac{\zeta' u}{\zeta u}. \end{aligned}$$

Divisons cette équation par 4 et ajoutons-la membre à membre à l'inégalité précédente. Les parties réelles des sommes Σ se détruiront au second membre et nous trouverons ($s = u + ti$, $s' = u + 2ti$)

$$(27) \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{s'-\rho} < -\frac{5}{8}\log\pi + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \\ &\qquad - \frac{5}{4}\frac{\zeta' u}{\zeta u} + \frac{1}{4}\frac{1}{s'-1} + \frac{1}{8}\frac{\Gamma'\left(\frac{s'}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s'}{2}+1\right)}. \end{aligned} \right.$$

Cette inégalité qui a lieu entre les parties réelles des deux membres est l'inégalité fondamentale sur laquelle se base notre démonstration.

§ 2. *Limite supérieure de* $(1 - \alpha)$, *qui résulte immédiatement de l'inégalité fondamentale* (27).

19. La démonstration que nous poursuivons résulte déjà de la relation (27). On remarque en effet que, si u est > 1, tous les termes du premier membre ont leur partie réelle positive, puisque ρ a la sienne < 1. L'inégalité (27) subsistera donc *a fortiori* si l'on borne le premier membre au seul terme de la première somme relatif à la racine particulière $\rho = \alpha + \beta i$. Si l'on fait alors $t = \beta$, ce terme unique se réduit à

$$\frac{1}{u - \alpha}.$$

Faisons maintenant tendre u vers l'unité; il n'y a qu'un seul terme au second membre de (27) qui puisse croître indéfiniment, c'est le premier de la seconde ligne, qui devient infini comme

$$\frac{3}{4}\frac{1}{u - 1}.$$

Donc α est < 1, sans quoi le premier membre de (27) finirait par surpasser le second. Mais on voit facilement que l'on peut obtenir une limite inférieure de la différence $1 - \alpha$.

Nous ne nous contenterons pas de la démonstration générale qui résulte de la formule (27), parce qu'il y a moyen d'abaisser davantage la limite supérieure de α, comme on le verra au § 4. Nous allons cependant exposer en détail cette démonstration, parce qu'elle est plus simple que celle que nous exposerons ensuite et rendra l'intelligence de celle-ci plus facile. D'ailleurs, les calculs que nous allons faire ne nous seront pas inutiles.

20. Substituons au second membre de la formule (27) les valeurs suivantes, tirées de la formule (9) :

$$\mathfrak{R}\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{u+ti}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{u+ti}{2}+1\right)}=\frac{1}{2}\left[\log\frac{t}{2}-\frac{2(u+2)}{(u+2)^2+t^2}+\theta\left(\frac{1}{3(u+2)t}+\frac{(u+2)^2}{2t^2}\right)\right]$$

$$\mathfrak{R}\frac{1}{8}\frac{\Gamma'\left(\frac{u+2ti}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{u+2ti}{2}+1\right)}=\frac{1}{8}\left[\log t-\frac{2(u+2)}{(u+2)^2+4t^2}+\theta\left(\frac{1}{6(u+2)t}+\frac{(u+2)^2}{8t^2}\right)\right]$$

la formule (27) deviendra

$$(28)\qquad \sum\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{4}\sum\frac{1}{s'-\rho}<\frac{5}{8}\log\frac{t}{\pi}-\frac{l2}{2}-\frac{3}{4}\frac{\zeta' u}{\zeta u}+\varphi(u,t)$$

où $\varphi(u, t)$ désigne l'expression, évanouissante avec $1 : t$,

$$(29)\ldots\left\{\begin{aligned}\varphi=&\frac{u-1}{(u-1)^2+t^2}+\frac{1}{4}\frac{u-1}{(u-1)^2+4t^2}-\frac{u+2}{(u+2)^2+t^2}\\&-\frac{1}{4}\frac{u+2}{(u+2)^2+4t^2}+\theta\left[\frac{3}{16(u+2)t}+\frac{17}{64}\left(\frac{u+2}{t}\right)^2\right].\end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, θ est compris entre -1 et $+1$.

On peut aussi mettre $\varphi(u, t)$ sous la forme

$$(30)\ldots\left\{\begin{aligned}\varphi(u,t)=&-3\frac{t^2-(u-1)(u+2)}{[(u-1)^2+t^2][(u+2)^2+t^2]}\\&-\frac{3}{4}\frac{4t^2-(u-1)(u+2)}{[(u-1)^2+4t^2][(u+2)^2+4t^2]}\\&+\theta\left[\frac{3}{16}\frac{1}{(u+2)t}+\frac{17}{64}\left(\frac{u+2}{t}\right)^2\right].\end{aligned}\right.$$

Comme t est > 12, les deux premiers termes du second membre qui sont négatifs l'emportent certainement de beaucoup sur le second des termes entre crochets si $u - 1$ est petit; et l'on a, si φ est positif,

$$(31)\quad \ldots\ldots \quad \varphi(u,t) < \frac{3}{16}\frac{1}{(u+2)t} < \frac{1}{16t},$$

car, u étant > 1, $u + 2$ sera > 3.

21. Nous allons utiliser immédiatement ce résultat. La formule (28) peut s'écrire, en abrégé,

$$(32)\qquad \sum \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{s'-\rho} < \frac{3}{4}\frac{1}{u-1} + \frac{5}{8}\log t - m,$$

en posant

$$m = \frac{5}{8}\log \pi + \frac{l2}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{\zeta' u}{\zeta u} + \frac{1}{u-1}\right) - \varphi.$$

On a maintenant, pour $u - 1 \leqq \frac{1}{12}$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{5}{8}\log \pi &> 0{,}71545 \\ \frac{l2}{2} &> 0{,}34657 \\ \frac{3}{4}\left(\frac{\zeta' u}{\zeta u} + \frac{1}{u-1}\right) &> 0{,}42144 \end{aligned}\right\} = 1{,}48346\ldots,$$

la dernière inégalité se déduisant de la formule finale du n° **14**. Donc

$$m > 1{,}4834 - \frac{1}{16t}.$$

22. Soit maintenant $\rho = \alpha + \beta i$ une racine de $\zeta(s)$; bornons le premier membre de la formule (32) au seul terme de la première somme relatif à cette racine et faisons $t = \beta$; il viendra *a fortiori*

$$(33)\quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{u-\alpha} < \frac{3}{4}\frac{1}{u-1} + h\log\beta - m,$$

en posant, en abrégé,

$$(34). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad h = \frac{5}{8} \quad \text{et} \quad m = 1{,}4834 - \frac{1}{16\beta}.$$

On tire alors de la formule (33)

$$u - \alpha > \frac{1}{\frac{3}{4}\frac{1}{u-1} + (h\log\beta - m)}$$

et, comme $1 - \alpha = u - \alpha - (u-1)$,

$$1 - \alpha > \frac{\frac{1}{4} - (u-1)(h\log\beta - m)}{\frac{3}{4}\frac{1}{u-1} + (h\log\beta - m)}.$$

Posons, pour simplifier, x pouvant être choisi arbitrairement avec u,

$$(35) \quad (u-1)(h\log\beta - m) = x, \quad \text{d'où} \quad u - 1 = \frac{x}{h\log\beta - m};$$

il viendra

$$1 - \alpha > \frac{1}{h\log\beta - m}\cdot\frac{x - 4x^2}{3 + 4x}.$$

Le maximum de cette fraction en x a lieu pour

$$x = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}, \quad \text{d'où} \quad \frac{x - 4x^2}{3 + 4x} = \frac{7}{4} - \sqrt{3}.$$

On en conclut, par conséquent, comme $\sqrt{3} = 1{,}73205$,

$$(36). \quad . \quad 1 - \alpha > \left(\frac{7}{4} - \sqrt{3}\right)\frac{1}{h\log\beta - m} = \frac{0{,}01795}{h\log\beta - m}$$

$$(37). \quad . \quad u - 1 = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4(h\log\beta - m)} = \frac{0{,}11602}{h\log\beta - m}.$$

23. Si l'on remplace dans ces expressions h et m par leurs valeurs (34), il vient

$$(38) \quad . \quad . \quad . \quad 1 - \alpha > \frac{0{,}02872}{\log \beta - 2{,}5734 + \dfrac{1}{10\beta}}$$

$$(39) \quad . \quad . \quad . \quad u - 1 = \frac{0{,}18563}{\log \beta - 2{,}5734 + \dfrac{1}{10\beta}}.$$

La formule (38) donne la limite inférieure de $1 - \alpha$ que nous voulions obtenir. Mais, pour qu'on puisse l'appliquer, il faut, comme nous l'avons supposé, que $u - 1$ soit $< \frac{1}{12}$. Cela aura lieu, d'après la formule (39), si

$$\log \beta - 2{,}5734 > 12.0{,}18563 = 2{,}2275$$

$$\log \beta > 4{,}6009,$$

et, par conséquent,

$$\beta > 99{,}56.$$

Remarque — Si l'on substitue cette valeur limite de β et de son logarithme dans la formule (38), il vient

$$1 - \alpha > \frac{0{,}0287}{2{,}228} > 0{,}0128.$$

Si β est $< 99{,}56$ ou 100 environ, on ne peut plus appliquer la formule (38), mais la valeur de $1 - \alpha$ sera au moins égale à cette limite 0,0128 que fournit la formule pour $\beta = 100$. En effet, on peut toujours supposer $u - 1 = \frac{1}{12}$ dans la formule (33); alors, β étant < 100, il est clair que cette formule donne pour $u - \alpha$ et, par suite, pour $1 - \alpha$ une limite au moins égale à celle que l'on obtient pour $\beta = 100$, savoir 0,0128.

§ 3. *Transformation de l'inégalité fondamentale* (27).

24. *Objet de ce paragraphe.* Dans la démonstration faite au paragraphe précédent, on a négligé complètement les sommes qui figurent au premier membre de la formule (26), sauf un seulement de leurs termes. Nous allons reprendre la démonstration en nous proposant de tenir compte autant que possible de ces termes.

A cet effet, nous distinguerons deux espèces de sommes Σ étendues aux racines ρ. Nous désignerons par Σ' des sommes étendues à toutes les racines dont la partie réelle α est $\overline{\gtrless} \frac{1}{2}$ et par Σ'' des sommes étendues à toutes les racines dont la partie réelle est $> \frac{1}{2}$.

25. *Recherche d'une inégalité relative aux sommes* Σ'. Nous allons d'abord chercher une limite inférieure des sommes Σ' que nous venons de définir. A cet effet, soit u' une quantité réelle $> u$; on a (u étant lui-même > 1)

$$\frac{u-\alpha}{(u-\alpha)^2+(t-\beta)^2} > \frac{u-\alpha}{u'-\alpha}\,\frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2}.$$

Mais $\frac{u-\alpha}{u'-\alpha}$, où $u' > u > \alpha$, diminue quand α augmente et acquiert sa plus petite valeur $\frac{2u-1}{2u'-1} > \frac{1}{2u'-1}$ quand α atteint le maximum $\frac{1}{2}$ qui lui est assigné. Il vient donc, en se rappelant que les inégalités se rapportent aux parties réelles des deux membres seulement,

$$(40) \qquad \sum{}' \frac{1}{s-\rho} > \frac{1}{2u'-1} \sum{}' \frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2}.$$

On a ensuite, pour $0 \overline{\gtrless} \alpha \overline{\gtrless} \frac{1}{2}$,

$$\frac{\dfrac{u'-(1-\alpha)}{(u'-1+\alpha)^2+(t-\beta)^2}}{\dfrac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2}}$$

$$= \frac{u'-1+\alpha}{u'-\alpha}\,\frac{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2}{(u'-1+\alpha)^2+(t-\beta)^2} < \frac{u'-\alpha}{u'-1+\alpha} < \frac{u'}{u'-1},$$

et l'on en déduit, par l'addition de l'unité aux deux membres,

$$\frac{u'-(1-\alpha)}{(u'-1+\alpha)^2+(t-\beta)^2}+\frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2}<\frac{2u'-1}{u'-1}\,\frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2}.$$

L'inégalité (40) devient donc *a fortiori*

$$\sum{}'\frac{1}{s-\rho}>\frac{u'-1}{(2u'-1)^2}\sum{}'\left[\frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2}+\frac{(u'-1+\alpha)}{(u'-1+\alpha)^2+(t-\beta)^2}\right].$$

Or, la somme au second membre contient maintenant tous les termes réels de la somme non accentuée

$$\sum\frac{1}{u'+ti-\rho},$$

étendue à toutes les racines ρ, et même deux fois ceux où $\alpha=\frac{1}{2}$ s'il y en a. Donc on aura *a fortiori*

$$(41)\quad\ldots\quad \sum{}'\frac{1}{s-\rho}>\frac{u'-1}{(2u'-1)^2}\sum\frac{1}{u'+ti-\rho}.$$

Nous allons maintenant choisir u' de manière à rendre maximum le coefficient de la somme du second membre. La dérivée fournit l'équation $2u'-1=4(u'-1)$, d'où l'on tire

$$(42).\quad\ldots\ldots\quad u'=\frac{3}{2},\qquad \frac{u'-1}{(2u'-1)^2}=\frac{1}{8},$$

de sorte que l'inégalité (41) devient

$$\sum{}'\frac{1}{s-\rho}>\frac{1}{8}\sum\frac{1}{u'+ti-\rho}.$$

Ajoutons à cette inégalité celle qui s'en déduit par le changement de t en $2t$ et par conséquent de s en s' (nº 18); il viendra

$$\sum{}'\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{4}\sum{}'\frac{1}{s'-\rho}>\frac{1}{8}\left[\sum\frac{1}{u'+ti-\rho}+\frac{1}{4}\sum\frac{1}{u'+2ti-\rho}\right].$$

Dans le cas particulier où $u - 1 \overline{\gtrless} \frac{1}{12}$ et où s a la même partie imaginaire $ti = \beta i$ que l'une des racines ρ, on peut encore ajouter $\frac{23}{39}$ au second membre de cette inégalité. En effet, celle-ci a été obtenue par la sommation d'une suite de relations de la forme

$$\frac{1}{s-\rho} > \frac{1}{8}\left[\frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2} + \frac{u'-1+\alpha}{(u'-1+\alpha)^2+(t-\beta)^2}\right]$$

où $u' = \frac{3}{2}$. Considérons celle où $t = \beta$ et, par suite, $s - \rho = u - \alpha$; la différence entre ses deux membres sera minimum si u reçoit sa plus grande valeur $\frac{13}{12}$ et α sa plus petite valeur 0. Ce minimum est $\frac{23}{39}$ et c'est *a fortiori* une limite inférieure de la différence entre les deux membres de l'inégalité obtenue après la sommation.

Dans la suite, nous supposerons toujours que s a la même partie imaginaire qu'une des racines ρ, de sorte qu'on aura l'inégalité

$$(43). \quad \left\{ \begin{aligned} \sum{}' \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum{}' \frac{1}{s'-\rho} > \frac{1}{8}\Big[\sum \frac{1}{u'+ti-\rho} \\ + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{u'+2ti-\rho}\Big] + \frac{23}{39}. \end{aligned} \right.$$

26. *Recherche d'une inégalité relative aux sommes* Σ''. Les sommes Σ se composent des sommes Σ' et Σ'' (n° 24); on aura donc en vertu de l'inégalité précédente

$$\begin{aligned} \sum{}'' \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum{}'' \frac{1}{s'-\rho} < \left[\sum \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{s'-\rho}\right] \\ - \frac{1}{8}\left[\sum \frac{1}{u'+ti-\rho} + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{u'+2ti-\rho}\right] - \frac{23}{39}. \end{aligned}$$

Remplaçons au second membre la première quantité entre crochets par le second membre de l'inégalité (28) et la seconde quantité entre crochets par le même second membre de (28), où l'on change seulement u en u'. Je dis que l'on aura *a fortiori*

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \sum{}'' \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum{}'' \frac{1}{s'-\rho} < \frac{7}{16}\left(\frac{5}{4}\log\frac{t}{\pi} - l2\right) - \frac{23}{39} \\ - \frac{5}{4}\frac{\zeta' u}{\zeta u} + \varphi(u, t) \\ + \frac{5}{32}\frac{\zeta' u'}{\zeta u'} - \frac{1}{8}\varphi(u', t). \end{aligned}\right.$$

Comme nous avons remplacé les deux crochets par des quantités plus grandes en vertu de l'inégalité (28), nous devons encore justifier que leur différence a été augmentée en même temps. Pour cela, il suffira de montrer que la différence des deux membres de l'inégalité (28) diminue quand u augmente et est, par suite, moindre pour u' que pour u. La différence entre les deux membres de (28) est la même que celle des deux membres de (27) ou de (26). Celle-ci, d'après la manière dont la formule a été établie au n° (18), a pour valeur

$$\sum \frac{lp}{p^{mu}}(1 + \cos mtlp) - \frac{1}{4}\sum \frac{lp}{p^{mu}}(1 - \cos 2mtlp)$$

et, en la mettant sous la forme

$$\frac{1}{2}\sum \frac{lp}{p^{mu}}(1 + \cos mtlp)^2,$$

on reconnaît immédiatement qu'elle diminue quand u augmente. L'inégalité (44) est donc justifiée.

Reportons-nous encore au raisonnement que l'on a fait au n° 20 pour passer de la formule (30) à la formule (31). On peut reproduire sur la différence des termes correspondants de $\varphi(u,t)$ et de $\frac{1}{8}\varphi(u',t)$ le raisonnement que l'on a fait sur chacun des termes de $\varphi(u, t)$. Il vient ainsi

$$\varphi(u, t) - \frac{1}{8}\varphi(u', t) < \frac{1}{16t} + \frac{1}{8}\frac{1}{16t}.$$

La formule (44) peut donc se mettre sous la forme suivante, analogue à celle de la formule (32),

$$(45) \qquad \sum{}'' \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum{}'' \frac{1}{s'-\rho} < \frac{5}{4}\frac{1}{u-1} + \frac{35}{64}\log t - m,$$

en posant, pour abréger,

$$(46). \quad . \quad \begin{cases} m = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{u-1} + \frac{\zeta' u}{\zeta u}\right) + \frac{7}{16}\left(\frac{5}{4}l\pi + l2\right) \\ \quad - \frac{5}{32}\frac{\zeta' u'}{\zeta u'} + \frac{25}{39} - \frac{9}{8}\frac{1}{16t}. \end{cases}$$

On a dans cette expression $u - 1 < \frac{1}{12}$ et $u' = \frac{3}{2}$.

§ 4. *Limite inférieure de* $(1-\alpha)$ *qui résulte de la formule* (45).

27. La valeur de m donnée par (46) se calcule au moyen des résultats obtenus aux numéros 13 et 14. On a, $u - 1$ étant $\overline{\overline{<}} \frac{1}{12}$ et u' égal à $\frac{3}{2}$,

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u-1} + \frac{\zeta' u}{\zeta u}\right) > 0{,}42144\,22$$

$$- \frac{5}{32}\frac{\zeta' u'}{\zeta u'} > 0{,}14111\,06$$

$$\frac{7}{16}\left(\frac{5}{4}l\pi + l2\right) = 0{,}92927\,60.$$

On peut donc faire

$$(47) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad m = 2{,}08157\,25 - \frac{9}{8}\frac{1}{16t}.$$

28. Limitons maintenant le premier membre de la formule (45) à une seule racine $\alpha + \beta i$ et posons $t = \beta$. Il viendra *a fortiori*

$$(48)\ldots\quad \begin{cases} \dfrac{1}{u-\alpha} < \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{u-1} + h\log\beta - m \\ h = \dfrac{35}{64} \\ m = 2{,}08157\,23 - \dfrac{9}{128\beta}. \end{cases}$$

29. Cette formule a exactement la même forme que la formule (33) sur laquelle on a raisonné au n° 22; il n'y a de changé que les valeurs de h et de m. Cette formule se transforme donc exactement comme celle du n° 22 et l'on trouve les formules correspondant à (36) et (37) :

$$(49)\qquad 1-\alpha > \left(\frac{7}{4} - \sqrt{3}\right)\frac{1}{h\log\beta - m} = \frac{0{,}01794\,92}{h\log\beta - m}$$

$$(50)\qquad u - 1 = \frac{2\sqrt{3}-3}{4(h\log\beta - m)} = \frac{0{,}11602\,54}{h\log\beta - m}.$$

En remplaçant maintenant h et m par leurs valeurs écrites plus haut, ces formules peuvent aussi prendre la forme

$$(51)\ldots\ldots\quad 1-\alpha > \frac{p}{\log\beta - \dfrac{m}{h}}$$

en posant, en abrégé,

$$(52)\ldots\ldots\quad \begin{cases} p = 0{,}03282\,14 \\ \dfrac{m}{h} = 3{,}80630\,36 - \dfrac{9}{70\beta}. \end{cases}$$

30. Pour que ces formules soient applicables, il faut, comme le suppose la démonstration, que la valeur de $(u - 1)$ donnée par (50) soit inférieure à $\frac{1}{12}$. Il faut donc que l'on ait

$$h \log \beta - m > 12.0,116025 = 1,3923.$$

Cela aura lieu, m étant $< 2,08157\,23$ (form. 48), si

$$h \log \beta > 3,473877,$$

$$\log \beta > 6,35223$$

et, *a fortiori*, si $\beta > 574$.

Dans ce cas, on a $9 : 70\,\beta < 0,000224$; la formule (52) donne

$$\frac{m}{h} > 3,806079$$

et, en substituant cette valeur dans la formule (51), on obtient le théorème suivant :

31. Théorème. *A partir de* $\beta > 574$, *on a, entre les parties réelles et imaginaires d'une racine* $\alpha + \beta i$ *de* $\zeta(s)$, *la relation*

$$(53) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1 - \alpha > \frac{0,03282\,14}{\log \beta - 3,806}.$$

Si β *est* < 574, *la valeur de* $1 - \alpha$ *sera au moins égale à celle que fournit cette relation pour* $\beta = 574$.

La dernière partie du théorème reste seule à démontrer, mais il suffit pour cela de reproduire la remarque qui termine le nº 23.

32. La formule (53) peut encore s'écrire sous une autre forme, qui est plus avantageuse au point de vue des démonstrations ultérieures.

Comme 3,806079 est le logarithme naturel de 44,9737, la formule s'écrira aussi sous la forme plus condensée

$$(54) \quad \ldots\ldots \quad 1 - \alpha > \frac{p}{l\beta - ln},$$

où l'on a

$$\begin{cases} p = 0{,}0328214 \\ n = 44{,}9737 \end{cases}$$

C'est cette formule (54) que nous allons appliquer maintenant dans la seconde partie du mémoire (*).

(*) En établissant la formule (54), nous n'avons pas encore tiré tout le parti possible de l'artifice utilisé au § 3. Nous indiquerons dans une note à la fin du Mémoire le moyen d'augmenter légèrement les valeurs de p et de n. Ces nouvelles valeurs seront applicables également dans la seconde partie du Mémoire.

DEUXIÈME PARTIE.

Lois asymptotiques relatives aux nombres premiers.

CHAPITRE III.

ÉVALUATION DE QUELQUES SOMMES OU FIGURENT LES RACINES ρ.

§ 1. *Évaluation de la somme* $\sum\limits_{\beta > b} \frac{y^{\alpha-1}}{\beta^2}$.

33. La somme indiquée dans le titre de ce paragraphe est supposée s'étendre à toutes les racines $\rho = \alpha + \beta i$ pour lesquelles β est positif et $> b$. Nous supposerons que b est assez grand pour que l'on puisse appliquer l'inégalité (54) du nº 32 dans tous les termes de cette somme.

34. Rappelons d'abord un théorème établi par M. *von Mangoldt* et que nous aurons à appliquer (*) :

Si h *et* k *sont deux nombres réels vérifiant la condition*

$$\operatorname{tg} 1 = 1{,}5541 \overline{\gtrless} k \overline{\gtrless} h - 4,$$

le nombre des racines $\alpha + \beta$i, *pour lesquelles* β *est compris entre* h — k *et* h + k, *est inférieur à* klh.

35. Pour utiliser ce théorème, écrivons la somme à évaluer sous la forme suivante :

$$\sum \frac{1}{\beta^{1+\varepsilon}} \cdot \frac{y^{\alpha-1}}{\beta^{1-\varepsilon}},$$

où $0 < \varepsilon < 1$.

(*) *Zu Riemann's Abhandlung : Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* JOURN. F. DIE R. U. A. MATH., B. CXIV, p. 265.

On a, par la formule (54) de la première partie,

$$\frac{y^{\alpha-1}}{\beta^{1-\varepsilon}} < \frac{1}{\beta^{1-\varepsilon}} e^{-\frac{ply}{l\beta \cdot ln}}.$$

La dérivée par rapport à β de la fonction qui est au second membre est, à un facteur positif près,

$$ply - (1-\varepsilon)\left(l \cdot \frac{\beta}{n}\right)^2;$$

cette fonction deviendra donc maximum pour

$$(1). \quad . \quad l\frac{\beta}{n} = \sqrt{\frac{ply}{1-\varepsilon}}, \quad \text{d'où} \quad \beta = ne^{\sqrt{\frac{ply}{1-\varepsilon}}};$$

et ce maximum sera

$$\frac{1}{n^{1-\varepsilon}} e^{-2\sqrt{(1-\varepsilon)ply}}.$$

On a donc

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{\beta > b} \frac{y^{\alpha-1}}{\beta^2} = \frac{e^{-2\sqrt{(1-\varepsilon)ply}}}{n^{1-\varepsilon}} \sum_{\beta > b} \frac{1}{\beta^{1+\varepsilon}}.$$

36. Tout revient donc maintenant à l'évaluation de cette dernière somme.

A cet effet, désignons par Σ_r^s une somme étendue aux valeurs de β comprises entre r et s; on aura

$$\sum_{\beta > b} \frac{1}{\beta^{1+\varepsilon}} = \sum_{b}^{b+2k} + \sum_{b+2k}^{b+4k} + \sum_{b+4k}^{b+6k} + \cdots$$

et, par le théorème de M. von Mangoldt (n° 34),

$$(3) \quad . \quad . \quad \sum_{\beta > b} \frac{1}{\beta^{1+\varepsilon}} < k\left[\frac{l(b+k)}{b^{1+\varepsilon}} + \frac{l(b+3k)}{(b+2k)^{1+\varepsilon}} + \cdots\right].$$

Mais on a d'abord, par la formule $l(a+x) < la + \frac{x}{a}$,

$$\frac{l(b+3k)}{(b+2k)^{1+\varepsilon}} < \frac{l(b+2k)}{(b+2k)^{1+\varepsilon}} + \frac{k}{(b+2k)^{2+\varepsilon}};$$

ensuite, en intégrant par parties, on a

$$\frac{1}{2k}\int_0^{2k}\frac{l(b+x)dx}{(b+x)^{1+\varepsilon}}=\frac{l(b+2k)}{(b+2k)^{1+\varepsilon}}+(1+\varepsilon)\frac{1}{2k}\int_0^{2k}\frac{xl(b+x)dx}{(b+x)^{2+\varepsilon}}$$
$$-\frac{1}{2k}\int_0^{2k}\frac{xdx}{(b+x)^{2+\varepsilon}}.$$

Si donc b est assez grand pour qu'on ait

$$(1+\varepsilon)\int_0^{2k}\frac{xl(b+x)dx}{(b+x)^{2+\varepsilon}}>\int_0^{2k}\frac{xdx}{(b+x)^{2+\varepsilon}}+\frac{2k^2}{(b+2k)^{2+\varepsilon}},$$

ce qui aura certainement lieu si $lb > 2$ (*) et ce que nous supposons (n° 33), il viendra

$$\frac{l(b+3k)}{(b+2k)^{1+\varepsilon}}<\frac{1}{2k}\int_0^{2k}\frac{l(b+x)dx}{(b+x)^{1+\varepsilon}}.$$

Comme cette relation s'applique aussi aux termes suivants de la formule (3), il viendra, le premier terme seul au second membre n'étant pas transformé dans cette formule,

$$(4)\quad .\ .\ .\quad \sum_{\beta>b}\frac{1}{\beta^{1+\varepsilon}}<\frac{kl(b+k)}{b^{1+\varepsilon}}+\frac{1}{2}\int_b^{\infty}\frac{lxdx}{x^{1+\varepsilon}}.$$

On trouve, en effectuant l'intégration,

$$\int_b^{\infty}\frac{lxdx}{x^{1+\varepsilon}}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{lb}{b^{\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon}\int_b^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}=\frac{1}{\varepsilon b^{\varepsilon}}\left[lb+\frac{1}{\varepsilon}\right];$$

(*) On déduit, en effet, de $lb > 1 + 1$

$$\int_0^{2k}\frac{xl(b+x)dx}{(b+x)^{2+\varepsilon}}>\int_0^{2k}\frac{xdx}{(b+x)^{2+\varepsilon}}+\int_0^{2k}\frac{xdx}{(b+2k)^{2+\varepsilon}}$$
$$>\int^{2k}\frac{xdx}{(b+x)^{2+\varepsilon}}+\frac{2k^2}{(b+2k)^{2+\varepsilon}}.$$

et, en substituant dans (4),

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{\beta > b} \frac{1}{\beta^{1+\varepsilon}} < \frac{kl(b+k)}{b^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{2\varepsilon b^{\varepsilon}} \left[lb + \frac{1}{\varepsilon} \right].$$

37. Si l'on porte cette valeur dans (2), il vient

$$(6) \qquad \sum_{\beta > b} \frac{y^{\alpha-1}}{\beta^2} < \frac{1}{n^{1-\varepsilon} b^{\varepsilon}} \left[\frac{kl(b+k)}{b} + \frac{lb}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \right] e^{-2\sqrt{(1-\varepsilon)ply}}.$$

Cette formule, où l'on donnera à k sa plus plus petite valeur $k = 1{,}5541$ (n° 34), renferme encore un paramètre arbitraire $\varepsilon > 0$ et < 1, que l'on peut particulariser de différentes manières.

C'est ce que nous allons faire au paragraphe suivant.

§ 2. *Cas particuliers de la formule* (6) *qui précède.*

38. *Premier cas particulier*. Si l'on désire obtenir la formule la plus avantageuse au point de vue asymptotique, c'est-à-dire pour les valeurs indéfiniment croissantes de y, il faut poser

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{ply}},$$

ce qui rend minimum la valeur principale du second membre de (6). Si l'on observe alors que l'on a

$$\sqrt{1-\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} > (1-\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

d'où

$$\sqrt{(1-\varepsilon)ply} > \sqrt{ply} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{ply}},$$

la formule (6) prendra la forme

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{\beta > b} \frac{y^{\alpha-1}}{\beta^2} < \mathrm{A}\, ply\, e^{-2\sqrt{ply}},$$

où A est une quantité qui reste finie. On peut faire, b étant $> n$,

$$(2)\ .\ .\ .\ \ A = \frac{e^{1+\frac{1}{\sqrt{ply}}}}{2n}\left[1 + \frac{lb}{\sqrt{ply}} + 2\frac{kl(b+k)}{bply}\right].$$

Comme la valeur de A n'est pas très petite, la formule (1) ne devient avantageuse que pour de très grandes valeurs de y. On peut obtenir d'autres formules également utiles, en donnant à ε une valeur fixe. En voici un exemple.

39. *Deuxième cas particulier*. On obtient une formule simple en donnant à ε la valeur $\frac{3}{4}$. Si, en outre, pour déterminer complètement la formule (6), nous y posons $b = 5^4 = 625$, nous obtiendrons

$$(3)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \sum_{\beta > 625} \frac{y^{\alpha-1}}{\beta^2} < 0{,}01611\, e^{-\sqrt{ply}}.$$

Car on trouve, tous calculs faits,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}\,.\,125}\left[\frac{kl(5^4+k)}{625} + \frac{8l5}{3} + \frac{8}{9}\right] < 0{,}01611.$$

Rappelons, à ce propos, les valeurs de p et de n (n° 32)

$$p = 0{,}03282, \qquad n = 44{,}9757.$$

§ 3. *Évaluation de la somme* $\sum \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2}$ *ou* σ^2.

40. Nous supposerons dans le paragraphe actuel que cette somme s'étend à toutes les racines $\alpha + \beta i$ sans distinction.

Nous pouvons déjà la partager en deux parties, la première Σ' étendue aux racines $\alpha + \beta i$ où $\alpha \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$, la seconde Σ'' étendue aux racines où $\alpha > \frac{1}{2}$.

On a donc

$$(1)\ .\ .\ .\ .\ \sum \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2} = \sum{}' \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2} + \sum{}'' \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

41. La somme Σ' a comme limite supérieure la valeur obtenue en supposant que $\alpha = \frac{1}{2}$ pour toutes les racines. On a donc

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad \sum' \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2} \overline{\overline{<}} \frac{2}{\sqrt{y}} \sum \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \overline{\overline{<}} \frac{0,0462}{\sqrt{y}}$$

par la formule (5) du n° 5 de la première partie du mémoire.

42. Passons à la somme Σ''. Nous pouvons aussi la partager en deux parties

$$\sum_{\operatorname{mod}\beta<b}'' \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2} + \sum_{\operatorname{mod}\beta>b}'' \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

On a identiquement

$$\sum'' \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} = \sum'' \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \sum'' \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2+\beta^2}$$
$$+ \sum'' \frac{1-\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - \sum'' \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2+\beta^2}.$$

La différence écrite en seconde ligne est négative, puisque $1-\alpha < \alpha$; ensuite la somme écrite en première ligne ne peut surpasser la somme non accentuée $\Sigma \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$; il vient donc

$$\sum_{\operatorname{mod}\beta<b}'' \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} < \sum \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} < 0,0231.$$

Enfin, comme, pour $\beta < b$, on a $\alpha - 1 < -\frac{p}{lb-ln}$, il vient

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{\operatorname{mod}\beta<b}'' \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2} < 0,0231\, e^{-\frac{ply}{lb-ln}}.$$

Considérons maintenant la seconde partie

$$\sum_{\operatorname{mod}\beta>b}'' \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Celle-ci est inférieure à

$$\sum_{\text{mod}\,\beta>b}^{1\;''} \frac{y^{\alpha-1}}{\beta^2}.$$

Les formules des deux paragraphes précédents nous donnent une limite supérieure de cette somme. Elles nous donnent, en effet, une limite de

$$\sum_{\beta>b} \frac{y^{\alpha-1}}{\beta^2}.$$

Dans cette dernière somme, on ne tient pas compte d'une moitié des racines qui correspondent aux valeurs négatives de β ; mais, dans la somme précédente, il y a aussi la moitié au moins des racines qui ne figurent pas, celles où $\alpha \overline{\overline{\lessgtr}} \frac{1}{2}$. Les racines négligées dans les deux cas se correspondent deux à deux pour les mêmes valeurs de β^2, nous pouvons donc faire usage des mêmes limites.

43. En substituant ces valeurs, on trouve, suivant celles des deux formules (1) ou (3) du paragraphe précédent que l'on utilise,

$$(4) \qquad \sum \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2} < \frac{0{,}0462}{\sqrt{y}} + 0{,}0231\, e^{-\frac{\sqrt{ply}}{lb-ln}} + Aply e^{-2\sqrt{ply}},$$

ou bien

$$(5) \ldots \sum \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2} < \frac{0{,}0462}{\sqrt{y}} + \frac{0{,}0231}{y^{0{,}0124}} + 0{,}01611\, e^{-\sqrt{ply}},$$

car dans cette dernière formule $b = 625$, $lb = 6{,}43775$.

On a d'ailleurs dans les deux formules

$$p = 0{,}03282, \qquad n = 44{,}9757$$
$$ln = 3{,}806079$$

et l'expression de A se trouve au n° 38.

44. L'examen de la formule (4) permet d'écrire aussi immédiatement la formule, commode au point de vue des conséquences asymptotiques,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \sum \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2} < \mathrm{B} ply e^{-2\sqrt{ply}},$$

où B est une quantité qui reste finie quand y tend vers l'infini et dont l'expression complète, assez longue, s'obtient en remplaçant A par sa valeur (2) au n° 38 dans la formule

$$\mathrm{B} = \mathrm{A} + 0{,}0231\, e^{-\frac{ply}{lb-ln}+2\sqrt{ply}} + \frac{0{,}0462}{\sqrt{y}}\, e^{2\sqrt{ply}}.$$

Les formules (4), (5) et (6) montrent que la somme que nous étudions tend vers zéro quand y tend vers l'infini. Mais, à cause de la petitesse de p, cette décroissance est extrêmement lente et ne devient considérable qu'à partir des valeurs de y ayant au moins une centaine de chiffres. C'est, en tout cas, tout ce que l'on peut conclure de ces formules.

45. La somme que nous étudions ici reviendra souvent dans la suite. Pour abréger l'écriture, nous représenterons sa racine carrée par σ, ou, en d'autres termes, nous poserons

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \sigma^2 = \sum \frac{y^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

La quantité σ est donc une quantité qui tend vers zéro quand y tend vers l'infini, et les différentes formules de ce paragraphe permettent d'en déterminer approximativement la valeur quand y est donné.

En particulier, la formule (6) donnera

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \sigma < \sqrt{\mathrm{B}}\sqrt{ply}\, e^{-\sqrt{ply}},$$

où B est une quantité qui reste inférieure à une limite fixe que l'on pourrait facilement assigner.

De là découle le théorème suivant :

46. *L'expression désignée par σ est infiniment petite en même temps que 1 : y et elle est d'un ordre de petitesse au moins égal à celui de l'expression*

$$\sqrt{ply}\, e^{-\sqrt{ply}},$$

où $p = 0{,}03282..$

CHAPITRE IV.

FORMULES ASYMPTOTIQUES.

§ 1. *Évaluation de* $\sum\limits_{p^m<y} lp$.

47. J'ai établi, dans la première partie de mon *Mémoire sur la théorie des nombres premiers* (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XX), n° 52, la formule

$$(1)\ .\ .\ \left\{\begin{aligned}&\sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^m}-\frac{1}{y}\sum_{p^m<y}lp = ly - C - 1 + \frac{1}{y}\frac{\zeta'(o)}{\zeta(o)}\\ &\qquad -\sum_{\rho}\frac{y^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}-\sum_{m}\frac{y^{-2m-1}}{2m(2m+1)}.\end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, les sommes du premier membre sont étendues à toutes les puissances des nombres premiers qui sont inférieures à y.

En d'autres termes, on a posé, en abrégé,

$$\sum_{p^m<y} lp = \sum_{p<y} lp + \sum_{p<y^{\frac{1}{2}}} lp + \cdots$$

$$\sum_{p^m<y}\frac{lp}{p^m} = \sum_{p<y}\frac{lp}{p} + \sum_{p<y^{\frac{1}{2}}}\frac{lp}{p^2} + \cdots$$

On peut aussi remplacer dans le second membre $\frac{\zeta' o}{\zeta o}$ par sa valeur connue

$$\frac{\zeta' o}{\zeta o} = l(2\pi).$$

48. Multiplions (1) par dy et intégrons de 1 à x ; il viendra

$$x\sum_{p^m<x}\frac{lp}{p^m}-\sum_{p^m<x}lp-\int_1^x\frac{dy}{y}\sum_{p<y}lp=x(lx-1)+1-(C+1)(x-1)$$
$$+\,lx\frac{\zeta'o}{\zeta o}-\sum\frac{x^\rho-1}{\rho^2(\rho-1)}+\sum\frac{x^{-2m}-1}{4m^2(2m+1)}.$$

Mais on a par (1)

$$x\sum\frac{lp}{p^m}-\sum lp=xlx-(1+C)x+\frac{\zeta'o}{\zeta o}-\sum\frac{x^\rho}{\rho(\rho-1)}-\sum\frac{x^{-2m}}{2m(2m+1)}.$$

De cette équation soustrayons la précédente ; il vient

$$\int_1^x\frac{dy}{y}\sum_{p^m<y}lp=x-1-(1+C)+\frac{\zeta'o}{\zeta o}-\sum\frac{1}{\rho^2(1-\rho)}+\sum\frac{1}{4m^2(2m+1)}$$
$$-\,lx\frac{\zeta o}{\zeta o}-\sum\frac{x^\rho}{\rho^2}-\sum\frac{x^{-2m}}{4m^2}.$$

49. Remplaçons dans cette équation x par $(1+k)x$, où k est une constante positive quelconque, et soustrayons membre à membre ; nous trouvons, en divisant par k,

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{1}{k}\int_x^{(1+k)x}\frac{dy}{y}\sum_{p^m<y}lp&=x-\frac{l(1+k)}{k}\frac{\zeta'o}{\zeta o}\\&-\sum\frac{(1+k)^\rho-1}{k}\frac{x^\rho}{\rho^2}\\&-\sum\frac{(1+k)^{-2m}-1}{k}\frac{x^{-2m}}{4m^2}.\end{aligned}\right.$$

50. La somme qui est sous le signe d'intégration au premier membre étant constante ou croissante, on a

$$\frac{1}{k}\sum_{p^m<x}lp\int_x^{(1+k)x}\frac{dx}{x}\overline{\lesseqgtr}\frac{1}{k}\int_x^{(1+k)x}\frac{dx}{x}\sum lp\overline{\lesseqgtr}\frac{1}{k}\sum_{p^m<(1+k)x}lp\int_x^{(1+k)x}\frac{dx}{x},$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad \frac{l(1+k)}{k}\sum_{p^m<x} lp \overset{=}{<} \frac{1}{k}\int_x^{(1+k)x}\frac{dx}{x}\sum lp \overset{=}{<} \frac{l(1+k)}{k}\sum_{p^m<(1+k)x} l.p$$

La première de ces inégalités donne par (2)

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{l(1+k)}{k}\displaystyle\sum_{p^m<x} lp \overset{=}{<} x - \dfrac{l(1+k)}{k}\dfrac{\zeta' o}{\zeta o} \\ \qquad\qquad - \displaystyle\sum \dfrac{(1+k)^\rho - 1}{k}\dfrac{x^\rho}{\rho^2} - \displaystyle\sum \dfrac{(1+k)^{-2m} - 1}{k}\dfrac{x^{-2m}}{4m^2}. \end{cases}$$

Changeons dans (2) et (3) x en $\frac{x}{1+k}$, nous aurons de même, par la deuxième inégalité (3),

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{l(1+k)}{k}\displaystyle\sum_{p^m<x} lp \overset{=}{>} \dfrac{x}{1+k} - \dfrac{l(1+k)}{k}\dfrac{\zeta' o}{\zeta o} \\ \qquad\qquad - \displaystyle\sum \dfrac{1-(1+k)^{-\rho}}{k}\dfrac{x^\rho}{\rho^2} - \displaystyle\sum \dfrac{1-(1+k)^{+2m}}{k}\dfrac{x^{-2m}}{4m^2}. \end{cases}$$

Ces inégalités (4) et (5) peuvent aussi s'écrire *a fortiori*

$$(6)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{p^m<x} lp \overset{=}{<} \dfrac{kx}{l(1+k)} - \dfrac{\zeta' o}{\zeta o} + \displaystyle\sum \dfrac{(1+k)^\alpha + 1}{l(1+k)}\left|\dfrac{x^\rho}{\rho^2}\right| \\ \qquad\qquad - \displaystyle\sum \dfrac{(1+k)^{-2m} - 1}{l(1+k)}\dfrac{x^{2m}}{4m^2} \\ \displaystyle\sum_{p^m<x} lp \overset{=}{>} \dfrac{kx}{(1+k)l(1+k)} - \dfrac{\zeta' o}{\zeta o} - \displaystyle\sum \dfrac{(1+k)^{-\alpha} + 1}{l(1+k)}\left|\dfrac{x^\rho}{\rho^2}\right| \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum \dfrac{(1+k)^{2m} - 1}{l(1+k)}\dfrac{x^{-2m}}{4m^2}. \end{cases}$$

51. On est ainsi conduit à prendre, pour valeur approchée du premier membre, la demi-somme des seconds. L'erreur commise Δ sera inférieure à leur demi-différence.

Posons en abrégé

$$(7)\ldots\ldots\quad \frac{1}{2}\frac{k(2+k)}{(1+k)l(1+k)} = 1 + w;$$

on trouvera

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{p^m<x} lp = (1+w)x - \frac{\zeta'o}{\zeta o} + \sum \frac{(1+k)^{\alpha} - (1+k)^{-\alpha}}{2l(1+k)} \left| \frac{x^{\rho}}{\rho^2} \right| \\ + \sum \frac{(1+k)^{2m} - (1+k)^{-2m}}{2l(1+k)} \frac{x^{-2m}}{4m^2} + \Delta \end{aligned} \right.$$

et l'on aura

$$(9)\quad \bmod \Delta < \frac{k^2 x}{2(1+k)l1+k)} + \sum \frac{2+(1+k)^{\alpha}+(1+k)^{-\alpha}}{2l(1+k)} \left| \frac{x^{\rho}}{\rho^2} \right| + \sum \frac{2-(1+k)^{+2m}-(1+k)^{-2m}}{2l(1+k)} \frac{x^{-2m}}{4m^2}$$

52. Observons que l'on a toujours

$$2+(1+k)^{\alpha}+(1+k)^{-\alpha}) < 2+(1+k)+(1+k)^{-1} < 4+\frac{k^2}{1+k};$$

on voit que nous aurons *a fortiori*, en négligeant une somme négative,

$$\bmod \Delta < \frac{x}{2}\left[\frac{k^2}{(1+k)l(1+k)}\left(1+\sum\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2}\right) + \frac{4}{l(1+k)}\sum\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2}\right].$$

On a posé, en abrégé,

$$\sum \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2} = \sigma^2,$$

de sorte que l'on aura

$$\bmod \Delta < \frac{x}{2}\left[\frac{k^2}{(1+k)l(1+k)}(1+\sigma^2) + \frac{4\sigma^2}{l(1+k)}\right].$$

Ensuite, comme on a, par la formule (7),

$$\frac{1}{l(1+k)} = \frac{1+k}{k}\,\frac{1+w}{1+\frac{k}{2}},$$

il vient

$$\text{mod}\,\Delta < \frac{x}{2}\left[k(1+\sigma^2) + \frac{1+k}{k}\,4\sigma^2\right]\frac{1+w}{1+\frac{k}{2}}$$

$$\text{mod}\,\Delta < \frac{x}{2}\left[k + \left(\frac{4}{k} + 4 + k\right)\sigma^2\right]\frac{1+w}{1+\frac{k}{2}}.$$

Donnons à k la valeur

(10). . . . . $k = 2\sigma;$

il viendra

(11) . . . . $\text{mod}\,\Delta < 2x\left[\sigma + \sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^3\right]\frac{1+w}{1+\frac{k}{2}}.$

L'évaluation de Δ est donc ramenée par cette formule à celle de la somme σ^2 qui a été étudiée au paragraphe 4 du chapitre précédent et à celle de w que nous allons réduire aussi à celle de σ.

53. La formule (8) peut se mettre sous la forme

(12). . . . . $\sum_{p^m<x} lp = (1+\varepsilon)x - \frac{\zeta'0}{\zeta 0}$

en posant

(13). . $\left\{\begin{aligned} \varepsilon = w &+ \sum\frac{(1+k)^{\alpha} - (1+k)^{\ \alpha}}{2l(1+k)}\left|\frac{x^{\rho-1}}{\rho^2}\right| \\ &+ \sum\frac{(1+k)^{2m} - (1+k)^{-2m}}{2l(1+k)}\,\frac{x^{-2m-1}}{4m^2} + \frac{\Delta}{x} \end{aligned}\right.$

et w est donné par la formule (7).

54. En vertu de l'inégalité

$$(1+k)^{\alpha}-(1+k)^{-\alpha}<(1+k)-(1+k)^{-1}=\frac{2k+k^2}{1+k},$$

on a

$$\sum \frac{(1+k)^{\alpha}-(1+k)^{-\alpha}}{2l(1+k)}\left|\frac{x^{\rho-1}}{\rho^2}\right|<\frac{2k+k^2}{2(1+k)l(1+k)}\sum\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Opérons comme au n° 52 ; faisons la substitution

$$\sum\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2}=\sigma^2,$$

remplaçons $(2k+k^2):2(1+k)l(1+k)$ par sa valeur $1+w$; on aura

$$(14)\qquad \sum \frac{(1+k)^{\alpha}-(1+k)^{-\alpha}}{2l(1+k)}\left|\frac{x^{\rho-1}}{\rho^2}\right|<(1+w)\sigma^2.$$

Considérons maintenant la quantité w qui est donnée par la formule (7); elle est positive et l'on a, par (7),

$$w=\frac{k+\frac{k^2}{2}}{k+\frac{k^2}{1.2}-\frac{k^3}{2.3}+\cdots}-1=\frac{\frac{k^2}{2.3}-\frac{k^3}{3.4}+\frac{k^4}{4.5}-\cdots}{1+\frac{k}{1.2}-\frac{k^2}{2.3}+\cdots}$$

donc

$$w<\frac{k^2}{6}\,\frac{1-\frac{k}{2}+\frac{3k^2}{10}}{1+\frac{k}{2}-\frac{k^2}{6}}<\frac{k^2}{6}(1-k+k^2)$$

et, k étant égal à 2σ,

$$(15)\quad .\ .\ .\ .\ .\quad w<\frac{2}{3}\sigma^2(1-2\sigma+4\sigma^2)$$

La dernière somme

$$\sum \frac{(1+k)^{2m} - (1+k)^{-2m}}{2l(1+k)} \frac{x^{-2m-1}}{4m^2}$$

tend avec une grande rapidité vers zéro quand x augmente.

En effet, elle est inférieure à

$$\frac{1}{2l(1+k)} \cdot \frac{1}{x} \cdot \sum \frac{1}{4m^2} \left(\frac{1+k}{x}\right)^{2m} < \frac{k}{2l(1+k)} \cdot \frac{1}{kx} \cdot \left(\frac{1+k}{x}\right)^2 \frac{\pi^2}{24}.$$

Mais on a $k = 2\sigma$ et, en remplaçant σ par sa valeur, on en tire

$$kx = 2\sqrt{x}\sqrt{\sum \frac{x^{\alpha}}{\alpha^2 + \beta^2}} > 2\sqrt{x}\sqrt{\sum \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}} > 0{,}4\sqrt{x},$$

par la formule (11) de la première partie du Mémoire. La somme en question sera donc encore inférieure à

$$\frac{\pi^2 k}{48 l(1+k)} \frac{1}{0{,}4\sqrt{x}} \left(\frac{1+k}{x}\right)^2 < \frac{\pi^2}{19{,}2} \frac{(1+k)^3}{x^2\sqrt{x}} < \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

et l'on aura, en définitive,

$$(16) \quad . \quad . \quad \sum \frac{1+k)^{2m} - (1+k)^{-2m}}{2l(1+k)} \frac{x^{-2m-1}}{4m^2} < \frac{1}{x^2\sqrt{x}}.$$

En substituant ces différentes valeurs 11, 14 et 16 dans 13, on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} \varepsilon &< w + (1+w)\left(2\sigma + \sigma^2 + \frac{\sigma^3}{1+\sigma}\right) + \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \\ &< w + (1+w)(2\sigma + \sigma^2) + \sigma^3 + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}; \end{aligned}$$

puis, par (15), il vient *a fortiori*

$$(17) \qquad \operatorname{mod} \varepsilon < 2\,\sigma + \frac{5}{3}\sigma^2 + \sigma^3 + \frac{8}{3}\sigma^4 + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}.$$

L'évaluation de ε se ramène donc enfin à celle de la somme $\Sigma \frac{x^\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \frac{1}{} = \sigma^2$ que nous avons faite au chapitre précédent.

55. En rapprochant la formule (17) de l'énoncé du théorème du n° 46 du chapitre précédent et en observant que y est remplacé ici par x, on obtient le théorème suivant :

Si l'on pose

$$\frac{1}{x} \sum_{p^m<x} lp = 1 + \eta,$$

la quantité η *tendra vers zéro quand* x *tendra vers l'infini, et cette quantité sera un infiniment petit d'un ordre de petitesse au au moins égal à celui de l'expression*

$$\sqrt{\rho lx}\, e^{-\sqrt{\rho lx}},$$

où $\rho = 0{,}03282\ldots$

56. Si l'on remarque que l'on a

$$\sum_{p^m<y} lp - 2 \sum_{p^m<y^{\frac{1}{2}}} lp = \sum_{p<y} - \sum_{p<y^{\frac{1}{2}}} + \sum_{p<y^{\frac{1}{3}}} - \cdots < \sum_{p<y} lp,$$

on reconnaîtra immédiatement que la différence entre $\sum\limits_{p<y} lp$ et $\sum\limits_{p^m<y} lp$ est de l'ordre de $\sqrt{y}$. On peut donc énoncer cet autre théorème analogue au précédent :

Le rapport

$$\frac{1}{x} \sum_{p<x} lp,$$

où la somme s'étend aux logarithmes des nombres premiers $<$ x, *est de la forme*

$$1 + \eta_1,$$

où η_1 *est infiniment petit avec* $\frac{1}{x}$ *et d'un ordre de petitesse au moins égal à celui de*

$$\sqrt{\rho lx}\, e^{-\sqrt{\rho lx}},$$

où l'on a encore $\rho = 0{,}03282\ldots$

Ce théorème entraîne aussi le suivant :

57. *On peut assigner un nombre fixe* H, *indépendant de* x, *et tel qu'il y ait toujours au moins un nombre premier compris entre*

$$x \quad \text{et} \quad x + \mathrm{H}\sqrt{plx}\, e^{-\sqrt{plx}}\, x.$$

Les calculs qui précèdent permettraient facilement de trouver une valeur de ce nombre H, mais, comme elle serait assez grande, son calcul ne présenterait pas grand intérêt.

§ 2. *Évaluation de* $\sum\limits_{p^m < x} \frac{lp}{p^m}$.

58. Remplaçons dans la formule (1) du paragraphe précédent Σlp par sa valeur tirée de la formule (12) et changeons y en x ; il viendra

$$\sum_{p^m<x} \frac{lp}{p^m} = lx - \mathrm{C} + \varepsilon - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} - \sum_{m} \frac{x^{-2m-1}}{2m(2m+1)}.$$

L'évaluation de ε se fait par la formule (17) du paragraphe précédent. Il reste donc à évaluer

$$\sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}.$$

Cette somme est inférieure en valeur absolue à

$$\sum \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{(1-\alpha)^2+\beta^2}} = \sum \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{1+\frac{1-2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}}}.$$

Les termes de cette dernière somme sont inférieurs à $\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2}$, sauf si $\alpha > \frac{1}{2}$, et, dans ce cas, β étant > 28, ils sont inférieurs à

$$\frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{1-\frac{1}{(28)^2}}} < 1{,}00064\,\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha^2+\beta^2},$$

Il vient donc

$$\operatorname{mod} \sum \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)} < 1{,}00064\, \sigma^2.$$

Nous sommes donc ramenés encore une fois aux évaluations du § 4 du chapitre III.

On déduit de là et du théorème du nº 46 le théorème suivant :

59. *Si l'on pose*

$$\sum_{p^m < x} \frac{lp}{p^m} = lx - C + \eta_2,$$

la quantité η_2 *tendra vers zéro quand* x *tendra vers l'infini et elle sera un infiniment petit d'un ordre au moins aussi élevé que celui de l'expression*

$$\sqrt{\mathrm{p} l x}\, e^{-\sqrt{\mathrm{p} l x}},$$

où $\mathrm{p} = 0{,}03282$.

60. On peut établir un théorème analogue relativement à la somme

$$\sum_{p<x} \frac{lp}{p-1},$$

qui s'étend aux nombres premiers $< x$. En effet, les deux sommes

$$\sum_{p<x} \frac{lp}{p-1} \quad \text{et} \quad \sum_{p^m<x} \frac{lp}{p^m}$$

ont une différence égale à

$$\sum_{p>x^{\frac{1}{2}}}^{p<x} \frac{lp}{p^2} + \sum_{p>x^{\frac{1}{3}}}^{p<x} \frac{lp}{p^3} + \sum_{p>x^{\frac{1}{4}}}^{p<x} \frac{lp}{p^4} + \cdots$$

et par suite inférieure à

$$lx \left[\sum_{n>x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n>x^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{n^3} + \sum_{n>x^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{n^4} + \cdots \right]$$

où n est maintenant un entier quelconque. Le premier des termes entre crochets est le plus grand et le nombre de ces termes est égal au degré de la plus grande puissance de 2 contenue dans x, et ne surpassera pas $\frac{lx}{l2}$. La somme ci-dessus sera donc évidemment inférieure à

$$\frac{(lx)^2}{l2} \sum_{n>\sqrt{x}} \frac{1}{n^2} < \frac{(lx)^2}{\sqrt{x}\, l2}$$

et tendra vers zéro plus rapidement que la limite assignée à n dans le théorème précédent. Donc la première des sommes (**4**) vérifie ce théorème comme la seconde.

D'où le théorème :

61. *Si l'on pose l'équation*

$$\sum_{p<x} \frac{lp}{p-1} = lx - C + \eta_5,$$

la quantité η_5 *tendra vers zéro avec* $\frac{1}{x}$ *et elle sera d'un ordre de petitesse au moins égal à celui de la fonction*

$$\sqrt{\mathrm{p}\, lx}\, e^{-\sqrt{\mathrm{p}\, lx}},$$

où $\mathrm{p} = 0{,}03282\ldots$

CHAPITRE V.

NOMBRE DES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS A UNE LIMITE DONNÉE.

62. Pour simplifier l'écriture, nous désignerons par $F(x)$ la fonction qui exprime combien il y a de nombres premiers $< x$ et nous définirons une autre fonction $f(x)$ par l'équation

$$(1)\quad . \quad . \quad . \quad f(x) = F(x) + \frac{1}{2} F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

63. Nous allons utiliser une formule que j'ai démontrée dans mes *Recherches sur la théorie des nombres premiers* au n° 28 de la première partie, et que voici :

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{p^m<x} \frac{lp}{p^{mu}} - \frac{1}{x^u}\sum_{p^m<x} lp = \frac{1}{x^u}\frac{\zeta'o}{\zeta o} - \frac{\zeta' u}{\zeta u} + \left(\frac{1}{1-u} - 1\right)x^{1-u} \\ \displaystyle\qquad - \sum_\rho \frac{ux^{\rho-u}}{\rho(\rho-u)} - \sum \frac{ux^{-2m-u}}{2m(2m+u)}. \end{cases}$$

On a, dans cette relation,

$$\frac{\zeta'o}{\zeta o} = l(2\pi),$$

et l'on peut, si l'on veut, substituer cette valeur dans l'équation.

Le variable u est quelconque, réelle ou imaginaire.

Multiplions l'équation par du et intégrons de u à ∞ ; il viendra

$$\sum_{p^m<x} \frac{1}{m}\frac{1}{p^{mu}} - \frac{1}{x^u lx}\sum_{p^m<x} lp$$
$$= \frac{1}{x^u lx}\frac{\zeta'o}{\zeta o} - \frac{x^{1-u}}{lx} + \int_u^\infty \left(\frac{x^{1-u}}{1-u} - \frac{\zeta' u}{\zeta u}\right) du$$
$$- \sum_\rho \int_u^\infty \frac{ux^{\rho-u}du}{\rho(\rho-u)} - \sum_m \int_u^\infty \frac{ux^{-2m-u}du}{2m(2m+u)}.$$

Posons $u = 0$ dans cette équation et supposons que l'intégration se fasse le long de l'axe réel. Les fonctions sous le signe resteront finies et continues dans chaque intégrale et l'on aura

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle f(x) - \frac{1}{lx}\sum_{p^m<x} lp = \frac{1}{lx}\frac{\zeta'o}{\zeta o} - \frac{x}{lx} + \int_0^\infty \left(\frac{x^{1-u}}{1-u} - \frac{\zeta' u}{\zeta u}\right) du \\ \displaystyle\qquad - \sum_\rho \int_0^\infty \frac{ux^{\rho-u}du}{\rho(\rho-u)} - \sum_m \int_0^\infty \frac{ux^{-2m-u}du}{2m(2m+u)}. \end{cases}$$

64. Nous allons maintenant transformer ces différentes intégrales. En introduisant des termes qui se détruisent, on peut écrire l'équation suivante, dans laquelle les fonctions restent continues sous les signes d'intégration :

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x^{1-u}}{1-u}-\frac{\zeta' u}{\zeta u}\right)du = \lim_{\varepsilon=0}\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty}\frac{x^{1-u}du}{1-u}$$

$$-\int_0^2\left(\frac{\zeta' u}{\zeta u}+\frac{1}{u-1}\right)du - \int_2^{\infty}\frac{\zeta' u}{\zeta u}du$$

$$+\lim_{\varepsilon=0}\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{du}{u-1} + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\frac{x^{1-u}-1}{1-u}du.$$

Le terme écrit en dernière ligne est nul ; celui qui est écrit sur la ligne précédente a pour valeur

$$-[\log(u-1)\zeta u]_0^2 - [\log\zeta u]_2^{\infty} = \log(-\zeta o) = -l2,$$

car la relation (voir mon Mémoire déjà cité n° 4)

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\zeta(s)$$

donne, pour $s=1$,

$$\zeta(o) = \lim_{s=1}\frac{1}{\pi}\,\frac{\cos\frac{s\pi}{2}}{s-1} = -\frac{1}{2}.$$

Il vient donc

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x^{1-u}}{1-u}-\frac{\zeta' u}{\zeta u}\right)du = -l2 + \lim_{\varepsilon=0}\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty}\frac{x^{1-u}du}{1-u}.$$

Mais, en faisant le changement de variables

$$1-u = \frac{lt}{lx},$$

on trouve

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^{1-u}du}{1-u} = \int_{x^{\varepsilon}}^{x} \frac{dt}{lt}, \quad \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{1-u}du}{1-u} = \int_0^{x^{-\varepsilon}} \frac{dt}{lt}.$$

Par suite,

$$(5)\ldots\left\{\begin{aligned} &\int_0^{\infty}\left(\frac{x^{1-u}}{1-u}-\frac{\zeta' u}{\zeta u}\right)du = -l2 + \mathrm{Li}(x),\\ &\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon=0}\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{lt}.\end{aligned}\right.$$

Passons aux intégrales suivantes de la formule (4).
On a, par décomposition puis intégration par parties,

$$(6)\left\{\begin{aligned} \int_0^{\infty}\frac{ux^{\rho-u}dx}{\rho(\rho-u)} &= -\frac{1}{\rho}\int_0^{\infty} x^{\rho-u}du + \int_0^{\infty}\frac{x^{\rho-u}du}{\rho-u}\\ &= -\frac{x^{\rho}}{\rho lx} + \frac{x^{\rho}}{\rho lx} + \frac{1}{lx}\int_0^{\infty}\frac{x^{\rho-u}}{(\rho-u)^2}\\ &= \frac{1}{lx}\int_0^{\infty}\frac{x^{\rho-u}du}{(\rho-u)^2}.\end{aligned}\right.$$

De même

$$(7)\ldots \int_0^{\infty}\frac{ux^{-2m-u}du}{2m(2m+u)} = \frac{1}{lx}\int_0^{\infty}\frac{x^{-2m-u}du}{(2m+u)^2}.$$

Substituons les valeurs (5), (6) et (7) dans (4); il vient

$$(8)\left\{\begin{aligned} f(x) = \mathrm{Li}(x) - l2 &+ \frac{1}{lx}\left[\sum_{p^m<x} lp - x - \frac{\zeta' o}{\zeta o}\right]\\ &- \frac{1}{lx}\left[\sum_{\rho}\int_0^{\infty}\frac{x^{\rho-u}du}{(\rho-u)^2} + \sum_m\int_0^{\infty}\frac{x^{-2m-u}du}{(2m+u)^2}\right].\end{aligned}\right.$$

Cette équation est celle qui paraît donner l'expression la plus commode de la fonction $f(x)$.

65. Si l'on remplace dans (8) le premier crochet par sa valeur déduite de la formule (12) du chapitre précédent, il vient

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{L}i(x) - l2 \\ &+ \frac{1}{lx}\left[\varepsilon x - \sum\int_0^\infty \frac{x^{\rho-u}du}{(\rho-u)^2} - \sum\int_0^\infty \frac{x^{-2m-u}du}{(2m+u)^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

La valeur de ε est donnée par la formule (13), et la formule (17) du chapitre précédent en donne une limite supérieure propre au calcul. Comme ε tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$, la formule précédente montre déjà que $\mathrm{L}i(x)$ est la valeur principale de $\mathrm{F}(x)$.

Il reste encore à évaluer les deux autres sommes qui figurent dans la formule (9). On a, par intégration par parties,

$$\int_0^\infty \frac{x^{\rho-u}du}{(\rho-u)^2} = \frac{x^\rho}{\rho^2 lx} + \frac{2}{lx}\int_0^\infty \frac{x^{\rho-u}du}{(\rho-u)^3};$$

ensuite

$$\begin{aligned} \bmod . \int_0^\infty \frac{x^{\rho-u}du}{(\rho-u)^3} &< \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-u}du}{\beta^3} = \frac{x^\alpha}{\beta^3 lx} \\ &< \frac{1}{lx}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^3}\right)\frac{x^\alpha}{\alpha^2+\beta^2}. \end{aligned}$$

il vient donc

$$(10)\quad \bmod \int_0^\infty \frac{x^{\rho-u}du}{(\rho-u)^2} < \left[\frac{1}{lx} + \frac{2}{(lx)^2}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{(12)^3}\right)\right]\sum \frac{x^\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Enfin, on a

$$(11)\quad \sum_m \int_0^\infty \frac{x^{-2m-u}du}{(2m+u)^2} < \frac{1}{4x^2}\left(\sum\frac{1}{m^2}\right)\int_0^\infty x^{-u}du < \frac{1}{2x^2 lx}.$$

En se servant de ces relations (10) et (11) et de la formule (17) du chapitre précédent qui donne une limite supérieure de ε, on voit que l'on peut poser

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x) = \mathrm{L}i(x) - l2 + \tau \frac{x}{lx},$$

où l'on a

$$(13) \qquad |\tau| < 2\sigma + \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{lx} + \frac{0,168}{(lx)^2}\right)\sigma^2 + \sigma^3 + \frac{8}{3}\sigma^4 + \frac{3}{2x^2}.$$

L'évaluation de τ est donc encore une fois ramenée à celle de la somme

$$\sum \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha^2 + \beta^2} = \sigma^2$$

qui a fait l'objet du § 4 du chapitre 3.

66. Reportons-nous à la formule (6) de ce même paragraphe ; comme le premier terme de la valeur de τ dans (13) donne aussi la valeur principale de τ, on a le théorème suivant :

Si l'on pose

$$f(x) = \mathrm{L}i(x) - l2 + \tau \frac{x}{lx},$$

la quantité τ sera infiniment petite avec $\frac{1}{x}$, et elle sera d'un ordre de petitesse au moins égal à celui de l'expression

$$\sqrt{plx}\, e^{-\sqrt{plx}},$$

où $p = 0,03282$.

67. Observons maintenant que la relation

$$f(x) = \mathrm{F}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{F}(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\mathrm{F}(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

donne

$$f(x)-f(x^{\frac{1}{2}})=\mathrm{F}(x)-\frac{1}{2}\,\mathrm{F}(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\,\mathrm{F}(x^{\frac{1}{3}})-\cdots<\mathrm{F}(x);$$

on aura les inégalités

$$f(x)>\mathrm{F}(x)>f(x)-f(\sqrt{x}),$$

et, comme $f(\sqrt{x})$ est $<\sqrt{x}$, on voit que le théorème précédent s'applique aussi à la fonction $\mathrm{F}(x)$, qui exprime combien il y a de nombres premiers inférieurs à x.

Nous énoncerons ce théorème comme il suit :

Si l'on désigne par F (x) *la fonction qui exprime combien il y a de nombres premiers* < x, F (x) *aura pour valeur asymptotique* Li (x) *quand* x *tendra vers l'infini. De plus, la différence entre ces deux fonctions ne pourra pas être d'un ordre de grandeur supérieur à celui de la fonction*

$$\frac{x}{lx}\sqrt{plx}\,e^{-\sqrt{plx}},$$

où p = 0,03282.

Ce théorème est celui auquel nous avons fait allusion dans l'introduction en insistant sur son importance.

CHAPITRE VI.

SUR LA CONVERGENCE DE LA SÉRIE $\sum\frac{\mu(k)}{k}$.

68. Définissons, avec M. *Mertens* (*), la fonction numérique $\mu(k)$ d'un paramètre entier k de la manière suivante :

$\mu(k)=1$ pour $k=1$,

$=0$ si k a un facteur carré autre que 1,

$=1$ si k est formé d'un nombre impair et

$=+1$ si k est formé d'un nombre pair de facteurs premiers différents.

(*) *Ueber einige asymtotische Gesetze der Zahlentheorie,* Journal f. d. r. u. a. Math. B. 77, 1874, p. 289.

D'après cette définition, on a, s étant une variable réelle ou imaginaire dont la partie réelle est supérieure à l'unité,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} = \prod\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Si la série, qui est au premier membre, converge pour $s = 1$, il résulte de cette relation que sa valeur sera 0, mais le point délicat est de prouver la convergence.

69. *Euler* paraît être le premier qui ait considéré cette série, et il a affirmé le résultat auquel nous venons de faire allusion, mais sans l'établir rigoureusement (*).

Quoique de nombreux mathématiciens, Mertens, Stieltjes, Gram, etc., se soient occupés de cette fonction, la démonstration du théorème énoncé par Euler n'a été établie que dans ces tout derniers temps par M. *von Mangoldt* (**).

La démonstration de M. von Mangoldt est assez détournée et d'ailleurs elle se borne strictement à établir la convergence de la série, sans fournir aucune approximation de la rapidité de la convergence. Nous pensons donc qu'il y a quelque intérêt à revenir sur cette question, d'abord pour présenter une démonstration plus directe et plus simple, ensuite pour donner une limite supérieure du reste de cette série, ce qui n'a pas encore été fait jusqu'à présent.

70. Différentions l'équation.

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{m>1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s},$$

où $\mathfrak{R}(s) > 1$; il vient, en changeant les signes,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)^2} = \frac{\zeta' s}{\zeta s} \cdot \frac{1}{\zeta s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(k) lk}{k^s}.$$

(*) *Introductio in analysis infinitorum*, t. I. Lausanne, 1748, Cap. XV, n° 277.

(**) *Sitzungsberichte der K. P. Akademie der Wiss. zu Berlin*, 22 Juli 1897. (Voir aussi cet article pour les renseignements bibliographiques.)

Faisons les substitutions

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum \frac{lp}{p^s - 1} = -\sum \frac{lp}{p^{ms}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum \frac{\mu(k)}{k^s};$$

il viendra

$$\sum \frac{\mu(k)}{k^s} \sum \frac{lp}{p^{ms}} = -\sum \frac{\mu(k) lk}{k^s}.$$

Si l'on effectue les multiplications au premier membre et réduit les termes semblables, on devra trouver les mêmes termes dans les deux membres, parce que des exponentielles différentes ne sont pas du même ordre de grandeur pour s infini. Supposons implicitement ces multiplications effectuées, et égalons la somme des termes des deux membres dans lesquels la base de l'exponentielle est $< x$. Ce résultat peut s'écrire :

$$\sum_{k<x} \left[\frac{\mu(k)}{k^s} \sum_{p^m < \frac{x}{k}} \frac{lp}{p^{ms}} \right] = -\sum_{k<x} \frac{\mu(k) lk}{k^s}$$

et, pour $s = 1$,

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{k<x} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{p^m < \frac{x}{k}} \frac{lp}{p^m} = -\sum_{k<x} \frac{\mu(k) lk}{k}.$$

La somme relative à p^m a été étudiée au § 2 du chapitre IV, et l'on peut poser, par le théorème du n° (59) de ce paragraphe,

$$\sum_{p^m < \frac{x}{k}} \frac{lp}{p^m} = lx - lk - C + \eta\left(\frac{x}{k}\right).$$

Substituons cette valeur dans l'équation précédente et supprimons les termes qui se détruisent; il restera simplement

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad (lx - C) \sum_{k<x} \frac{\mu(k)}{k} + \sum_{k<x} \frac{\mu(k)}{k} \eta\left(\frac{x}{k}\right) = 0.$$

Telle est l'équation fondamentale dont nous allons déduire les conséquences que nous avons en vue. A cet effet, nous allons utiliser les formules que nous avons établies pour l'approximation de η.

71. Il résulte immédiatement du théorème du n° (59) que l'on peut poser

$$\operatorname{mod} \eta\left(\frac{x}{k}\right) < b e^{-a\sqrt{l\frac{x}{k}}},$$

où a et b désignent deux nombres positifs fixes, indépendants de x et de k, et auxquels les résultats que nous avons obtenus dans les chapitres antérieurs permettent d'attribuer des valeurs précises. En particulier, on peut donner à a toute valeur $< \sqrt{p} = 0,03282$ et la valeur de b en résultera.

Cela fait, la seconde somme de l'équation (2) sera certainement inférieure en valeur absolue à

$$b \sum_{k<x} \frac{1}{k} e^{-a\sqrt{l\frac{x}{k}}},$$

et nous allons montrer qu'elle ne peut surpasser un nombre que nous allons assigner.

Si l'on remarque que la fonction à sommer, ayant pour dérivée, à un facteur positif près

$$a - 2\sqrt{l\frac{x}{k}},$$

est d'abord décroissante, pour devenir ensuite constamment croissante quand k tend vers x, il est clair que l'on peut poser, le premier terme étant < 1, et le dernier $< \frac{1}{x}$,

$$\sum_{k<x} \frac{1}{k} e^{-a\sqrt{l\frac{x}{k}}} < 1 + \int_1^x \frac{dk}{k} e^{-a\sqrt{l\frac{x}{k}}} + \frac{1}{x}.$$

Par les changements de variables $k = \frac{x}{t}$, puis $lt = z^2$, on a

$$\int_1^x \frac{dk}{k} e^{-a\sqrt{l\frac{x}{k}}} = \int_1^x \frac{dt}{t} e^{-a\sqrt{lt}} = 2\int_1^{\sqrt{lx}} ze^{-az}dz$$

$$= 2\,\frac{1 - e^{-a\sqrt{lx}}(a\sqrt{lx} + 1)}{a^2} < \frac{2}{a^2},$$

et, par conséquent

$$b\sum_{k<x} \frac{1}{k} e^{-a\sqrt{l\frac{x}{k}}} < b\left(1 + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{x}\right) < 2b\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\cdot$$

Le dernier membre de cette inégalité est un nombre fixe h auquel nous sommes en état d'assigner une valeur précise et qui est aussi la limite supérieure de la seconde somme de l'équation (2). Cette équation nous donne donc immédiatement

$$\operatorname{mod} \sum_{k<x} \frac{\mu(k)}{k} < \frac{h}{lx - C}\cdot$$

De là le théorème suivant :

Théorème. *La somme*

$$\sum_{k<x} \frac{\mu(k)}{k}$$

tend vers zéro quand x *tend vers l'infini, et sa valeur absolue reste inférieure à une expression de la forme*

$$\frac{h}{lx},$$

où h *est un nombre fixe, auquel nos calculs antérieurs permettent d'assigner une valeur précise.*

Ce théorème résout la question que nous nous étions proposée.

NOTE COMPLÉMENTAIRE DE LA PREMIÈRE PARTIE.

73. *Objet de cette note.* Nous nous proposons, dans cette note, d'apporter un léger perfectionnement aux calculs numériques de la première partie. L'analyse des paragraphes 3 et 4 du chapitre II, qui conduit à la relation

$$1 - \alpha > \frac{p}{l\beta - ln},$$

a son point de départ dans les inégalités du n° (25). Nous avons remarqué qu'on peut les remplacer par d'autres un peu plus avantageuses. Nous allons les établir, et nous reproduirons sur elles tous nos raisonnements antérieurs; les calculs numériques seuls seront changés et nous trouverons pour p et n des valeurs un peu plus élevées que celles du n° (31).

74. *Inégalité relative aux sommes* Σ' (voir n° 25). En supposant $u' > u > 1$, nous avons trouvé au n° 25 :

$$\frac{u-\alpha}{(u-\alpha)^2+(t-\beta)^2} > \frac{u-\alpha}{u'-\alpha}\,\frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2},$$

$$\frac{u'-1+\alpha}{(u'-1+\alpha)^2+(t-\beta)^2} : \frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2} < \frac{u'-\alpha}{u'-1+\alpha}.$$

On tire de la seconde de ces inégalités

$$\frac{u'-1+\alpha}{(u'-1+\alpha)^2+(t-\beta)^2} + \frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2} < \frac{2u'-1}{u'-1+\alpha}\,\frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2};$$

puis, par la première,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{u-\alpha}{(u-\alpha)^2+(t-\beta)^2} > \frac{u-\alpha}{u'-\alpha}\,\frac{u'-1+\alpha}{2u'-1}&\left[\frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2}\right.\\ &\left.+\frac{u'-1+\alpha}{(u'-1+\alpha)^2+(t-\beta)^2}\right]. \end{aligned} \right.$$

Je dis que si α est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, u et u' entre 1 et 2, on aura

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{u-\alpha}{u'-\alpha}\,\frac{u'-1+\alpha}{2u'-1} \geqq \frac{u'-1}{u'(2u'-1)},$$

ce minimum étant atteint pour $(u=1,\ \alpha=0)$. En effet, la différence des deux membres de (2) a le signe de la quantité

$$u'(u-\alpha)(u'-1+\alpha)-(u'-\alpha)(u'-1),$$

qui peut s'écrire aussi

$$u'(u'-1)(u-1)+\alpha[u'(u-\alpha)-(u'-1)^2].$$

Comme u et u' sont >1, le premier terme est positif; le second l'est aussi, car α étant $\overline{\overline{<}}\,\frac{1}{2}$, donc $u-\alpha>\frac{1}{2}$, ce terme surpasse

$$\alpha\left[\frac{u'}{2}-(u'-1)^2\right]=\alpha\left(u'+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{u'}{2}\right),$$

qui est positif pour u' compris entre 1 et 2.

Choisissons maintenant u' de manière à rendre maximum le second membre de la formule (2). En annulant sa dérivée, on trouve

$$(3) \qquad u'=1+\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{u'-1}{u'(2u'-1)}=3-2\sqrt{2}.$$

Cette valeur de u' étant comprise entre 1 et 2, peut se mettre dans (2), et il vient par (1)

$$\frac{u-\alpha}{(u-\alpha)^2+(t-\beta)^2}>(3-2\sqrt{2})\left[\frac{u'-\alpha}{(u'-\alpha)^2+(t-\beta)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{u'-1+\alpha}{(u'-1+\alpha)^2+(t-\beta)^2}\right].$$

On peut sommer toutes les inégalités analogues pour toutes les racines $\alpha + \beta i$ où $\alpha \gtreqless \frac{1}{2}$; soient Σ' une somme étendue à ces racines particulières et Σ une somme étendue à toutes les racines sans distinction; on aura *a fortiori* (l'inégalité ayant lieu entre les parties réelles des deux membres)

$$\sum' \frac{1}{s-\rho} > (3-2\sqrt{2}) \sum \frac{1}{u'+ti-\rho}.$$

Ajoutons à cette inégalité celle qui s'en déduit par le changement de t en $2t$ et, par suite (nº 18), de s en s'; il vient

$$\sum' \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum' \frac{1}{s'-\rho} > (3-2\sqrt{2})\left[\sum \frac{1}{u'+ti-\rho} + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{u'+2ti-\rho}\right].$$

Comme on supposera dorénavant que s a la même partie imaginaire $ti = \beta i$ que l'une des racines ρ, on peut encore ajouter au second membre la différence des deux membres de (4) pour cette racine, savoir

$$\frac{1}{u-\alpha} - (3-2\sqrt{2})\left[\frac{1}{u'-\alpha} + \frac{1}{u'-1+\alpha}\right].$$

Cette différence, où $u' = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et où nous ferons $u - 1 \gtreqless \frac{1}{12}$, surpasse la quantité

$$\frac{12}{13} - 2(3-2\sqrt{2}).$$

Nous trouvons donc, sous ces conditions, l'inégalité

$$(5) \quad . \quad . \left\{\begin{aligned} &\sum' \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum' \frac{1}{s'-\rho} > (3-2\sqrt{2})\left[\sum \frac{1}{u'+ti-\rho}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{u'+2ti-\rho}\right] + \frac{12}{13} - 2(3-2\sqrt{2}), \end{aligned}\right.$$

qui correspond à la relation (42) du nº 25.

75. *Inégalité relative aux sommes* Σ'' (voir n° 26). Désignons par Σ' une somme étendue aux racines ρ, où $\alpha > \frac{1}{2}$. On aura $\Sigma'' = \Sigma - \Sigma'$; par suite, en vertu de la relation (5),

$$\sum'' \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum'' \frac{1}{s'-\rho} < \left[\sum \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{s'-\rho}\right]$$
$$-(3-2\sqrt{2})\left[\sum \frac{1}{u'+ti-\rho} + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{u'+2ti-\rho}\right]$$
$$+2(3-2\sqrt{2}) - \frac{12}{13}.$$

Comme on l'a expliqué au n° 26, on peut remplacer respectivement ces deux crochets par leurs limites supérieures tirées de la relation (28) au n° 19. Ceci donne la formule

$$(6)\ldots \left\{\begin{aligned} &\sum'' \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum'' \frac{1}{s'-\rho} < (\sqrt{2}-1)\left(\frac{5}{4}\log\frac{t}{\pi} - l2\right) - \frac{3}{4}\frac{\zeta' u}{\zeta u} \\ &\qquad + \varphi(u,t) + (3-2\sqrt{2})\left[\frac{3}{4}\frac{\zeta' u'}{\zeta u'} - \varphi(u',t) + 2\right] - \frac{12}{13}, \end{aligned}\right.$$

qui correspond à la relation (44) au n° 26.

On voit, par le raisonnement de ce même numéro, que l'on a

$$\varphi(u,t) - (3-2\sqrt{2})\varphi(u',t) < \frac{1+(3-2\sqrt{2})}{16t} < \frac{2-\sqrt{2}}{8t},$$

de telle sorte qu'on a la formule, analogue à (45),

$$(7)\ldots \sum'' \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{4}\sum'' \frac{1}{s'-\rho} < \frac{3}{4}\frac{1}{u-1} + h\log t - m,$$

en posant, en abrégé,

$$(8)\ldots\ldots h = \frac{5}{4}(\sqrt{2}-1) = 0{,}51776\,69\ldots$$

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} m &= \frac{3}{4}\left(\frac{\zeta' u}{\zeta u} + \frac{1}{u-1}\right) + (\sqrt{2}-1)\left(\frac{5}{4} l\pi + l2\right) \\ &\quad - (3 - 2\sqrt{2})\left(\frac{3}{4}\frac{\zeta' u'}{\zeta u'} + 2\right) + \frac{12}{13} - \frac{2-\sqrt{2}}{8t}. \end{aligned}\right.$$

76. *Évaluation de* m. Dans cette valeur de m, nous supposerons $u - 1 \overline{\gtrless} \frac{1}{12}$, par conséquent (nº 14)

$$\frac{3}{4}\left(\frac{\zeta' u}{\zeta u} + \frac{1}{u-1}\right) > 0{,}42144\,22.$$

On a ensuite

$$-\frac{3}{4}\frac{\zeta' u'}{\zeta u'} > 0{,}71096\,44;$$

car, $u' - 1$ étant égal à $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1{,}41421\,356}{2}$, la formule (16) du nº 12 donne

$$\begin{aligned} \frac{\zeta' u'}{\zeta u'} + \sqrt{2} &< 0{,}57721\,566 - 0{,}09375\,456\sqrt{2} \\ &\quad + 0{,}02589\,989 - 0{,}00366\,951\sqrt{2} \\ &\quad + 0{,}00113\,094 - 0{,}00018\,088\sqrt{2} \\ &\quad + 0{,}00005\,894 - 0{,}00000\,969\sqrt{2} \\ &\quad + 0{,}00000\,321 \\ &< 0{,}60430\,864 - 0{,}09761\,464\sqrt{2} \end{aligned}$$

d'où $-\frac{\zeta' u'}{\zeta u'} > 0{,}94795\,28\ldots$

Enfin, comme on a

$$\frac{5}{4} l\pi + l2 = 2{,}12405\,953\ldots,$$

on voit, par la substitution de ces diverses valeurs dans (9), que l'on peut poser *a fortiori* dans (7)

$$(10)\ldots\ldots\quad m = 2{,}00316\,98 - \frac{2-\sqrt{2}}{8t}.$$

77. *Limite inférieure de* $1-\alpha$. On peut maintenant donner à h et à m les valeurs (8) et (10) ci-dessus dans les formules (49) et (50) du n° 29, savoir

$$1-\alpha > \frac{7-4\sqrt{3}}{4(h\log\beta - m)} \quad \text{et} \quad u-1 = \frac{2\sqrt{3}-3}{4(h\log\beta - m)}.$$

Celles-ci donnent ainsi les relations

$$(11) \qquad 1-\alpha > \frac{p}{\log\beta - \frac{m}{h}} \quad \text{et} \quad u-1 = \frac{q}{\log\beta - \frac{m}{h}},$$

où l'on a

$$p = \frac{7-4\sqrt{3}}{3(\sqrt{2}-1)} = 0{,}034666\ldots$$

$$q = \frac{2\sqrt{3}-3}{3(\sqrt{2}-1)} = 0{,}224088\ldots$$

$$\frac{m}{h} = 3{,}86886\,45 - \frac{0{,}024264}{\beta}.$$

Pour que la formule (11) soit applicable, il faut que β soit assez grand pour que $u-1$ soit $> \frac{1}{12}$.

On voit que cette condition aura lieu, si

$$\log\beta > \frac{m}{h} + 12q \qquad \text{ou} \qquad > 6{,}5579\ldots,$$

et, *a fortiori*, si $\beta > 705$.

On a, dans ce cas,

$$\frac{m}{h} > 3{,}868829 = \log(47{,}886\ldots)$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant, que l'on peut substituer à celui du n° 31 :

78. Théorème. *A partir de* $\beta \overline{\overline{>}} 705$, *on a, entre les parties réelles et imaginaires d'une racine* $\alpha + \beta i$ *de* $\zeta(s)$, *la relation*

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1 - \alpha > \frac{p}{l\beta - ln},$$

où p *et* n *ont les valeurs déterminées* *

$$p = 0{,}034666..., \qquad n = 47{,}886...$$

Pour $\beta < 705$, *la valeur de* $1 - \alpha$ *sera supérieure à la limite* 0,0128 *que donne cette formule pour* $\beta = 705$.

79. *Remarque.* Les valeurs précédentes de p et de n sont aussi applicables dans toutes les formules et dans tous les théorèmes de la seconde partie du Mémoire. Il n'y a d'exception que pour les formules du n° 39 (parce que l'on n'y suppose pas $\beta > 705$).

* Cette valeur de p (sauf une erreur de calcul sur la 5e décimale) se trouvait déjà dans le manuscrit soumis à l'examen de M. Mansion, et on la trouvera dans son rapport, mais avec une valeur beaucoup moins élevée de n.