ÉTUDE

SUR LES

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ENTIÈRES

ET EN PARTICULIER

D'UNE FONCTION CONSIDÉRÉE PAR RIEMANN [1]

(*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX, 1893.)

1. La décomposition d'une fonction entière $F(x)$ en facteurs primaires, d'après la méthode de M. Weierstrass,

$$(1) \qquad F(x) = e^{G(x)} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_p}\right) e^{Q_p(x)}$$

a conduit à la notion du genre de la fonction F.

On dit que F est du genre E si, dans le second membre de l'équation (1), tous les polynomes Q_p sont de degré E, et que la fonction entière $G(x)$ se réduise également à un polynome de degré E au plus.

Dans un article inséré au *Bulletin de la Société mathématique de*

(1) Les principaux résultats contenus dans le présent Mémoire ont été présentés à l'Académie des Sciences dans un travail couronné en 1892 (Grand Prix des Sciences mathématiques).

France (1), M. Poincaré a démontré une propriété des fonctions de genre E. L'énoncé auquel il est parvenu est le suivant :

Dans une fonction entière de genre E, *le coefficient de* x^m, *multiplié par la racine* $(E+1)^{\text{ième}}$ *du produit des* m *premiers nombres, tend vers zéro quand* m *croît indéfiniment.*

Je me propose de compléter ce théorème en étudiant, d'une façon générale, les relations qui lient les propriétés d'une fonction entière à la loi de décroissance des coefficients et, particulièrement, en démontrant la proposition inverse :

Si le coefficient de x^m *est moindre que* $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, *la fonction est, en général, de genre moindre que* λ.

PREMIÈRE PARTIE.

Relations entre la loi de décroissance des coefficients et l'ordre de grandeur de la fonction pour les grandes valeurs de la variable.

2. Le développement taylorien d'une fonction entière est caractérisé (2) par cette circonstance que la racine $m^{\text{ième}}$ du coefficient de x^m tend vers zéro quand m augmente indéfiniment.

Si donc une fonction entière F (x) est donnée par le développement

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots, \tag{2}$$

le module de a_m peut être représenté par $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$ où $\varphi(m)$ est positif et infini avec m.

Pour obtenir une quantité supérieure au module de F(x), nous remplacerons chaque terme de la série (2) par son module, de sorte

(1) Année 1883, p. 136 et suiv.

(2) Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, nº 6 (*Journ. de Math.*, 4e série, t. VIII).

que nous pourrons considérer a_m comme égal à $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$ et x comme réel et positif.

Nous supposerons, en outre, que $\varphi(m)$ est une fonction continue et croissante, avec cette condition que $L\varphi(m) + \frac{k}{m}$ soit, à partir d'une certaine valeur de m, constamment croissant, quel que soit le nombre k.

Dans les cas usuels, ces hypothèses se trouvent vérifiées d'elles-mêmes; mais on peut les supposer vérifiées dans le cas le plus général, à la condition de remplacer, d'une manière convenable, certains coefficients a_m par des nombres plus grands, ce qui est permis, puisque nous agrandissons ainsi la somme de la série (2).

En un mot, on peut déterminer une fonction $\chi(m)$ au plus égale, pour les valeurs entières de m, au module de $\frac{1}{a_m}$ (l'égalité ayant lieu pour une infinité de ces valeurs) et telle que la fonction

$$\varphi(m) = \sqrt[m]{\chi(m)} \tag{3}$$

satisfasse aux conditions que nous venons d'indiquer.

3. A cet effet, soit a_{m_0} le premier coefficient non nul. La quantité $\left|\sqrt[m-m_0]{\frac{a_m}{a_{m_0}}}\right|$, diminuant indéfiniment à mesure que m augmente, doit prendre nécessairement une valeur plus grande que toutes les autres. Soit m_1 l'indice correspondant. Pour les valeurs entières de m comprises entre m_0 et m_1, nous prendrons comme valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progression géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_0}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_1}|}$, dont la raison sera, par suite, $\left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$; ce qui revient (en faisant intervenir non seulement les valeurs entières de m, mais les valeurs fractionnaires ou incommensurables) à prendre pour $\chi(m)$ une certaine exponentielle de la forme e^{am-b}, où l'on aura $a = \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$.

Soit de même m_2 l'indice plus grand que m_1 pour lequel la quantité $\left|\sqrt[m-m_1]{\frac{a_m}{a_{m_1}}}\right|$ prend la plus grande valeur. Entre $m = m_1$ et $m = m_2$, on prendra pour valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progression géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_1}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_2}|}$. La raison de cette progression, à savoir $\left|\sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}}\right|$, sera plus grande que la précédente, car l'inégalité

$$\left|\sqrt[m_2-m_0]{\frac{a_{m_2}}{a_{m_0}}}\right| < \left|\sqrt[m_1-m_2]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_0}}}\right|$$

ou

$$\left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_1-m_0} \left|\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}\right|^{m_1-m_0} > \left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_2-m_0}$$

peut s'écrire

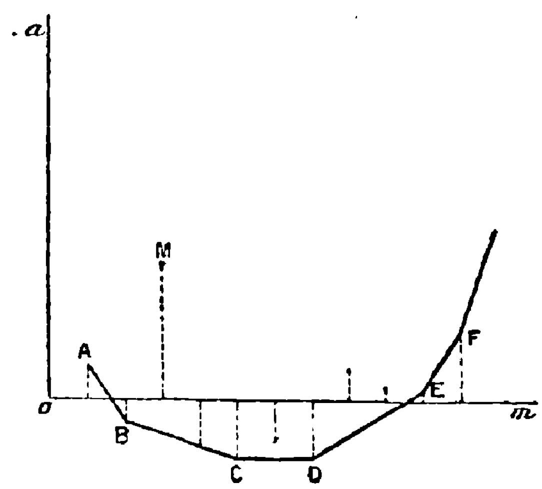
$$\left|\sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}}\right| > \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|.$$

On considérera ensuite la valeur m_3 de m pour laquelle $\left|\sqrt[m-m_2]{\frac{a_m}{a_{m_2}}}\right|$ sera le plus grand, et l'on continuera ainsi indéfiniment.

4. Au reste, ces opérations peuvent se ramener à la construction bien connue du polygone de Newton.

Pour cela on considérera m comme l'abscisse d'un point M (*fig.* 1) dont l'ordonnée sera fournie par la valeur correspondante de $L\left|\frac{1}{a_m}\right|$.

Fig. 1.



Nous aurons ainsi une suite indéfinie de points représentant les différents coefficients de notre série.

Prenons alors une demi-droite, tout d'abord parallèle à la partie négative de l'axe des y, et que nous ferons tourner autour du premier point représentatif dans le sens trigonométrique jusqu'à ce qu'elle passe par un ou plusieurs des points suivants. Ce sera le premier côté AB de notre polygone. Pour obtenir le second, nous considérerons une droite issue du point B et que nous ferons tourner autour de ce point, etc.

Continuant ainsi à la manière ordinaire, nous tracerons une ligne brisée convexe ABC... d'une infinité de côtés, qui passera par une infinité de points représentatifs et laissera tous les autres en dessus. Les coefficients angulaires des côtés pourront être d'abord négatifs; mais, à partir d'un certain moment, ils deviendront nécessairement positifs et même de plus en plus grands.

L'ordonnée de cette ligne brisée représente le logarithme de la fonction $\chi(m)$ définie au numéro précédent, et le coefficient angulaire de OM donne la valeur de $L\varphi(m)$.

5. Nous voyons tout d'abord que $\chi(m)$ est une fonction croissante, et de manière que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit aussi croissant. Il en résulte que la fonction $\varphi(m)$, laquelle a une dérivée, sauf en des points isolés [1], est elle-même constamment et indéfiniment croissante.

En outre, m_0 étant un entier quelconque, la fonction $L\chi(m)$ est, entre $m = m_0$ et $m = m_0 + 1$, de la forme $am - b$, où

$$\begin{aligned} a &= L\chi(m_0+1) - L\chi(m_0), \\ b &= -(m_0+1)L\chi(m_0) + m_0 L\chi(m_0+1) \\ &= m_0(m_0+1)[L\varphi(m_0+1) - L\varphi(m_0)]. \end{aligned}$$

$L\varphi(m)$ étant par suite de la forme $a - \frac{b}{m}$, la quantité $L\varphi + \frac{k}{m}$ sera croissante si $b > k$. Ceci devant être vrai quel que soit le nombre k,

(1) Si l'on voulait que χ et par suite φ aient une dérivée pour toute valeur de m (ce qui n'est pas nécessaire pour la suite), il suffirait de circonscrire au polygone ABC... une courbe convexe, ce qui est évidemment possible, par exemple à l'aide d'arcs de coniques se raccordant entre eux aux sommets successifs. On verrait aisément que les autres propriétés des fonctions χ et φ subsisteraient dans ces nouvelles conditions.

pourvu que l'on prenne m_0 assez grand, nous avons à montrer que b augmente indéfiniment avec m_0.

Or, b est constamment croissant, car l'inégalité

$$m\mathrm{L}\chi(m+1)-(m+1)\mathrm{L}\chi(m) \geqq (m-1)\mathrm{L}\chi(m)-m\mathrm{L}\chi(m-1)$$

est équivalente à l'inégalité

$$\mathrm{L}\chi(m+1)-\mathrm{L}\chi(m) \geqq \mathrm{L}\chi(m)-\mathrm{L}\chi(m-1).$$

D'ailleurs, si b restait inférieur à une quantité fixe k, on aurait

$$\mathrm{L}\varphi(m+1)-\mathrm{L}\varphi(m) < \frac{k}{m(m+1)}$$

et, comme le second membre est le terme général d'une série convergente, φ serait fini pour m infini, ce qui est contraire à nos hypothèses.

La fonction φ, définie comme il vient d'être dit, remplit donc les conditions que nous nous sommes imposées. Nous remarquerons que, moyennant ces conditions, λ étant un nombre fixe supérieur d'aussi peu que l'on veut à l'unité, on a, pour les grandes valeurs de m,

$$(4)\qquad \frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)} > 1+\frac{1}{m},$$

car la fonction

$$\mathrm{L}\varphi(tm)-\mathrm{L}\varphi(m)+\frac{\lambda}{\lambda-1}\left(\frac{1}{tm}-\frac{1}{m}\right),$$

considérée comme fonction de t, est croissante, d'après nos hypothèses, à partir de $t=1$, si m a été pris suffisamment grand. Étant nulle pour $t=1$, elle sera positive pour $t=\lambda$, d'où résulte

$$\frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)} > e^{m} > 1+\frac{1}{m}.$$

6. Cela posé, soit $\psi(x)$ la fonction inverse de φ, qui est également une fonction positive, continue et croissante d'une variable positive.

Je dis que $\mathrm{F}(x)$ *croît moins vite que* $x^{\varepsilon}e^{\int\frac{\psi(x)}{x}dx}$, le nombre ε étant positif, mais aussi petit qu'on le veut.

Pour le démontrer, soit x' un nombre supérieur à x. Dans la série qui représente $\mathrm{F}(x')$, considérons le dernier terme qui soit plus grand que 1, c'est-à-dire tel que $\varphi(m) < x'$. Son rang m_0 sera le plus grand entier contenu dans $\psi(x')$.

Ayant isolé les m_0 premiers termes pour en former un premier groupe, nous séparerons un second groupe allant depuis $m = m_0 + 1$ jusqu'à la plus grande valeur de m qui satisfasse à l'inégalité

$$\varphi(m) < x'\left(1 + \frac{1}{m_0}\right),$$

valeur qui sera désignée par m_1.

Le nombre m_0 augmentant indéfiniment avec x, le rapport $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers l'unité, car l'inégalité (4) montre que ce rapport ne saurait demeurer supérieur à aucun nombre λ plus grand que 1.

Enfin un troisième groupe comprendra ce qui reste de la série depuis le terme de rang $m_1 + 1$ jusqu'à l'infini.

Dans la combinaison $F(x') - \left(\frac{x'}{x}\right)^{m_0} F(x)$, les m_0 premiers termes donneront une somme négative. Quant aux termes suivants, le terme en x'^{m_0+h} donnera

$$a_{m_0+h} x'^{m_0+h}\left[1 - \left(\frac{x}{x'}\right)^h\right].$$

Remplaçons $\left(\frac{x}{x'}\right) = e^{-h\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)}$ par la quantité plus petite $1 - h\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)$; nous voyons qu'il nous reste le produit de $\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)$ par une somme de termes de la forme $ha_{m_0+h}x'^{m_0+h}$.

Considérons d'abord les termes du deuxième groupe, $a_{m_0+h}x'^{m_0+h}$ étant inférieur à 1, la somme correspondante sera moindre que $\frac{(m_1 - m_0)^2}{2}$. Or, nous pouvons supposer que $F(x')$ est supérieur à

$$e^{\int \frac{\psi x'}{x'} dx'} = e^{\int^{m_0} \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm},$$

sans quoi le théorème serait démontré; et nous allons voir que, dans ces conditions, le rapport $\frac{(m_1 - m_0)^2}{F(x')}$ tend vers zéro.

D'abord il nous suffit de nous occuper de $\frac{m_0^2}{F(x')}$, puisque $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers 1. Or, la quantité $\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}$ est, à partir d'un certain moment, plus grande que $\frac{3}{m}$, puisque la fonction $L\varphi(m) + \frac{3}{m}$ est croissante. Par suite, l'intégrale $e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm}$ est plus grande que Am^3, A étant une constante différente de o. $F(x')$ étant supposé plus grand que $e^{\int^{m_0} \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm}$, le rapport $\frac{m_0^2}{F(x')}$ tend bien vers zéro.

Dans les termes du troisième groupe, $a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$ est moindre que $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m_0}}\right)^{m_0+h}$. Ces termes donnent donc une somme inférieure à la somme $\sum_{h=0}^{\infty} h \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m_0}\right)^h} = (m_0+1)^2$, laquelle est, comme la précédente, de la forme $\varepsilon F(x')$; de sorte que l'on peut écrire

$$F(x')\left[1 - \varepsilon L\left(\frac{x'}{x}\right)\right] > F(x)\left(\frac{x'}{x}\right)^{\psi(x')}.$$

Prenons les logarithmes, divisons par $L\left(\frac{x'}{x}\right)$ et faisons tendre x' vers x, nous aurons

$$\frac{dLF(x)}{dLx} < \psi(x) + \varepsilon, \tag{5}$$

ce qui, en intégrant, donne bien [1]

$$F(x) < A x^{\varepsilon} e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx}, \tag{6}$$

A étant fini.

Par exemple, pour la fonction

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2} x^m, \qquad |q| < 1 \tag{7}$$

[qui est une moitié du développement d'une fonction $\theta(z)$ où l'on

---

[1] Plus exactement, nous voyons que, pour les valeurs de x plus grandes qu'une certaine limite, ou bien $F(x)$ est moindre que $e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx}$, ou bien on a l'inégalité (5). Ceci suffit manifestement pour que l'inégalité (6) soit constamment vérifiée.

aurait posé $e^{2i\pi\frac{z}{\omega}} = x\Big]$, on a

$$\varphi(m) = r^m$$

$\left(\text{en désignant par } r \text{ le module } \frac{1}{q}\right)$; d'où

$$\psi(x) = \frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}r}.$$

En appliquant le théorème précédent, on voit que $\mathcal{F}(x)$ augmente indéfiniment moins vite que $e^{\int_{}^{\mathrm{L}x}\frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}r}\frac{dx}{x}} = e^{\frac{\mathrm{L}^2x}{2\mathrm{L}r}}$, ce qui est bien conforme aux résultats fournis par la théorie des fonctions elliptiques (¹).

7. Envisageons en particulier le cas où l'on a

$$|a_m| \leqq \frac{1}{(m!)^\alpha}, \tag{8}$$

α étant un nombre positif quelconque.

Les formules connues pour l'approximation de la fonction Γ nous montrent que cette expression est de la forme

$$\frac{ke^{\overline{m+1}\,\alpha}}{(m+1)^{\alpha\left(m+\frac{3}{2}\right)}},$$

k étant fini, de sorte que nous pouvons prendre

$$\varphi(m) = \left(\frac{m}{\mathrm{H}}\right)^\alpha,$$

H étant une constante.

$\psi(x)$ sera de la forme $\mathrm{H}x^{\frac{1}{\alpha}}$ et l'intégrale $\int \frac{\varphi(x)+\varepsilon}{x}dx$ aura la même forme. Nous arrivons donc à l'énoncé suivant :

(¹) Les formules connues correspondant à l'addition des périodes dans la fonction θ donnent

$$\mathcal{F}(x) < \mathrm{A}\,e^{\frac{\mathrm{L}^2x}{4\mathrm{L}r}}.$$

La limite donnée par le théorème précédent est donc un peu trop élevée, ce dont il sera rendu compte plus loin.

Si le coefficient de x^m est moindre que $\frac{1}{(m!)^\alpha}$, la fonction croît moins vite que $e^{Hx^{\frac{1}{\alpha}}}$, où H est une certaine constante.

8. Au reste, dans ce cas particulier, on arriverait à la même conclusion par la comparaison directe des deux séries

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)}$$

(laquelle, en vertu des propriétés de la fonction Γ, peut être substituée dans notre raisonnement à $\sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$), et

$$e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} = \sum \frac{x^{\frac{n}{\alpha}}}{\Gamma(1+n)}.$$

En posant $\frac{n}{\alpha} = m'$ et comparant les parties des deux séries qui correspondent aux valeurs de m et de m' comprises entre les mêmes limites, on reconnaît aisément que, pour $\alpha > 1$, on a

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)} < e^{x^{\frac{1}{\alpha}}};$$

et, pour $\alpha < 1$,

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)} < E\left(\frac{1}{\alpha}\right) x^{\frac{1}{\alpha}} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}},$$

où, bien entendu, $E\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ désigne le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{\alpha}$.

Enfin, si α est un nombre entier, on peut mettre ce résultat en évidence par l'emploi de la formule

$$(9) \quad \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^{\alpha-1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{\alpha-1})} d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{\alpha-1},$$

où $F_{\alpha-1}$ est une fonction finie.

On peut démontrer cette formule en partant de la remarque suivante :

Si

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

et

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + \ldots$$

désignent des séries entières, la valeur de la série

$$f_3(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_m b_m x^m + \ldots$$

sera donnée par l'intégrale définie

$$(10) \qquad f_3(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x^\mu e^{i\theta}) f_2(x^{1-\mu} e^{-i\theta})\, d\theta,$$

μ désignant un exposant quelconque compris entre 0 et 1.

D'après cela, supposons la formule (9) démontrée pour une certaine valeur de α. Nous pourrons, dans l'égalité (10), faire $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$ avec $\mu = \frac{1}{\alpha+1}$. Cette égalité prendra bien alors la forme

$$\sum \frac{x^m}{(m!)^{\alpha+1}} = \frac{1}{(2\pi)^\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha+1}} F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha)}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_\alpha,$$

pourvu que l'on pose

$$F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha) = e^{i\theta_\alpha} + e^{-\frac{i\theta_\alpha}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\alpha-1}).$$

La formule (9) conduit d'ailleurs précisément à l'évaluation précédemment obtenue pour la série $\sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$, car l'intégrale qui figure au second membre est évidemment plus petite que $e^{M|x|^{\frac{1}{\alpha}}}$, où M est le module maximum de $F_{\alpha-1}$.

9. Inversement, on peut chercher la loi de décroissance des coefficients, connaissant la loi de croissance de la fonction pour les grandes valeurs de x.

Dans son Mémoire précédemment cité, M. Poincaré résout cette question pour le cas particulier des fonctions que nous venons de considérer aux deux numéros précédents, en introduisant une fonction entière auxiliaire [1],

$$(11) \qquad \Phi(x) = \int_0^\infty e^{-t^\alpha} F(tx)\, dt,$$

---

[1] Nous transformons, par un changement de variable, l'expression de M. Poincaré. Sous cette nouvelle forme, les fonctions (11) et (12) présentent une remarquable

l'intégrale étant prise sur la partie positive de l'axe réel ou suivant un chemin équivalent.

On peut étendre cette méthode au cas le plus général où, par exemple (V étant une fonction quelconque positive et indéfiniment croissante avec la variable), la fonction F est supposée croître moins vite que $e^{V(x)}$. Il faudra de même considérer l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-V(\theta)} F(tx)\, dt, \tag{12}$$

dans laquelle θ est une fonction de t telle que le rapport $\frac{\theta}{t}$ soit infini avec t, par exemple $t\mathrm{L}t$ ou $t^{1+\varepsilon}$.

Cette intégrale est finie, quel que soit x, et représente une fonction entière. Il en résulte immédiatement que les coefficients a_m de $F(x)$ sont plus petits que les inverses des quantités successives

$$\int_0^\infty e^{-V(\theta)} t^m\, dt. \tag{13}$$

Pour voir la loi de décroissance de a_m, il suffira donc d'étudier la manière dont varie la quantité (13) lorsque m augmente indéfiniment.

Mais on peut arriver au même résultat plus directement par la simple considération des intégrales définies qui fournissent les coefficients lorsqu'on donne les valeurs de la fonction

$$a_m = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(z)\, dz}{z^{m+1}}.$$

Si, en effet, on prend pour le contour C une circonférence de rayon R,

---

analogie avec les expressions que j'ai considérées dans un Mémoire précédent (*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, nos 35-37). En cet endroit, l'intégrale est prise entre les limites 0 et 1 : la fonction ainsi obtenue n'admet alors d'autres points singuliers que ceux de **F**, et il n'est besoin que d'hypothèses très simples sur la fonction désignée par V (t). Dans le cas actuel, l'intégrale, étant prise entre 0 et ∞, est en général infinie; mais, toutes les fois qu'elle est finie, elle représente une fonction entière, ainsi qu'on le verrait par une discussion analogue à celle que j'ai présentée à l'endroit cité.

on voit que a_m est moindre que

$$\frac{e^{V(R)}}{R^m}. \tag{14}$$

10. Dans cette expression, le rayon R est entièrement arbitraire. Faisons $R = U(m)$, en désignant par U la fonction inverse de V; nous voyons que $|\sqrt[m]{a_m}|$ est inférieur à $\frac{e}{U(m)}$.

Pour $V(R) = R^{\frac{1}{\alpha}}$, ceci donne bien le résultat obtenu par M. Poincaré, et d'après lequel $|\sqrt[m]{a_m}| < \frac{e}{m^\alpha}$.

On voit encore, par ce procédé, que, dans le développement de e^{e^x}, on a

$$|a_m| < \left(\frac{e}{Lm}\right)^m;$$

et, en général, la série qui donne le développement de

$$e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}$$

(le nombre des exponentielles superposées étant μ) a ses coefficients plus petits que ceux de la série

$$\sum \frac{(ex)^m}{(LL\ldots Lm)^m}$$

(le nombre des signes L étant $\mu - 1$).

11. Mais cette manière d'opérer donne pour a_m une limite trop élevée. Pour obtenir une limite plus approchée, posons

$$V(R) = \int \frac{\psi(R)}{R} dR$$

et cherchons le minimum de l'expression (14). Il vient, en prenant la dérivée

$$\psi(R) = m,$$

ou bien (φ étant la fonction inverse de ψ)

$$R = \varphi(m)$$

et, pour cette valeur de R, l'expression (14) devient

$$\frac{e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm}}{\varphi(m)^m}. \tag{15}$$

Supposons que la fonction $\psi(x)$ croisse plus vite que $x^{\frac{1}{\alpha}}$. La fonction $\varphi(m)$ croît moins vite que m^α, de sorte que l'on a

$$\left| \sqrt[m]{\frac{1}{a_m}} \right| > e^{-\alpha} \varphi(m).$$

Il peut arriver que la fonction ψ augmente plus vite que n'importe quelle puissance de x. Dans ce cas, on peut considérer α comme infiniment petit et écrire

$$\sqrt[m]{\left| \frac{1}{a_m} \right|} > (1 - \varepsilon) \varphi(m).$$

Ceci peut être considéré comme la réciproque du théorème démontré au n° 6. On peut donc dire que, dans ce cas, ce théorème donne la véritable relation cherchée.

Si la fonction ψ croît plus lentement que toute puissance de la variable, et par suite φ plus vite que n'importe laquelle de ces puissances, les transformations précédentes de l'expression (15) ne sont plus applicables.

Si $\varphi(m)$ est à croissante moins rapide que celle de e^{m^k}, on aura

$$\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m) \mathrm{L}\varphi(m)} = \frac{d}{dm} [\mathrm{LL}\varphi(m)] < \frac{k}{m};$$

d'où résultera

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < k \mathrm{L}\varphi(m)$$

ou

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < \frac{k}{k+1} \frac{d}{dm} [m \mathrm{L}\varphi(m)],$$

et $|\sqrt[m]{a_m}|$ est moindre que $\frac{1}{\varphi(m)^{\frac{1}{k+1}}}$. C'est le cas de la fonction $\mathcal{F}(x)$ étudiée au n° 6.

Enfin, si la fonction φ est, pour les grandes valeurs de m, supérieure à toute fonction de la forme e^{m^k}, on peut affirmer en tout cas que $|\sqrt[m]{a_m}|$ est inférieur à $\dfrac{1}{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)}$.

En effet, l'expression (15) peut s'écrire

$$e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}dm - m\mathrm{L}\varphi(m)} = e^{-\int \mathrm{L}\varphi(m)\,dm}.$$

Or, f étant une fonction quelconque à dérivée croissante, on a

$$f(m) > \frac{m}{2} f'\left(\frac{m}{2}\right) + f\left(\frac{m}{2}\right),$$

car $f(m) - f\left(\frac{m}{2}\right)$ est de la forme $\frac{m}{2} f'\left(\frac{m}{2} + \frac{\theta m}{2}\right)$. En intégrant ([1]), il en résulte

$$\int f(m)\,dm > m f\left(\frac{m}{2}\right).$$

En posant $f(m) = \mathrm{L}\varphi(m)$, on obtient bien

$$e^{-\int \mathrm{L}\varphi(m)\,dm} < \frac{1}{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)^m}.$$

12. Nous allons maintenant nous occuper d'une certaine classe de fonctions qui jouent un grand rôle dans l'étude des fonctions entières : je veux parler des fonctions de la forme $e^{G(x)}$, où G est lui-même une fonction entière.

Le module d'une pareille fonction dépendant de la partie réelle de $G(x)$, nous présenterons tout d'abord quelques remarques sur la partie réelle d'une fonction entière.

Soit

$$(2)\qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

une fonction holomorphe dans un cercle C ayant pour centre l'origine et pour rayon R; P la partie réelle de cette fonction au point $x = \mathrm{R}e^{i\theta}$

([1]) Nous négligeons la constante d'intégration, qui donne dans le résultat final un facteur constant.

de ce cercle. Le coefficient a_m sera donné par la formule

$$(16) \qquad a_m = \frac{1}{2\pi R^m}\int_0^{2\pi} P e^{-mi\theta}\, d\theta.$$

Faisons croître R indéfiniment et supposons que P reste *algébriquement* (ainsi il faut remarquer qu'il n'est rien supposé sur les valeurs négatives de P) inférieur à R^λ, où λ est un certain exposant positif, soit

$$(17) \qquad P < R^\lambda.$$

Je dis que F est un polynome de degré au plus égal à λ.

Partageons, en effet, la circonférence du cercle C en deux parties : l'une C_1, formée par l'ensemble des arcs où P est positif; l'autre C_2, comprenant tous les arcs où cette quantité est négative. Soient I_1 l'intégrale $\int P\, d\theta$ considérée le long de C_1; I_2 l'intégrale $\int - P\, d\theta$ prise le long de C_2.

Le rapport $\frac{I_1}{R^m}$ tendra vers zéro pour $m > \lambda$, d'après les hypothèses faites sur P; et il en sera de même pour $\frac{I_2}{R^m}$, car la différence $I_1 - I_2$ est une constante, à savoir la partie réelle de $2\pi a_0$.

Or, la formule (16) montre que le module du coefficient a_m est inférieur à $\frac{I_1 + I_2}{R^m}$. Ce coefficient ne peut donc être que nul.

En particulier, pour $\lambda = 1$, on voit que, si la partie réelle d'une fonction croît moins vite que le module de la variable, la fonction se réduit à une simple constante.

13. Nous avons supposé que l'inégalité (17) avait lieu pour toutes les valeurs suffisamment grandes de la variable; mais nous remarquerons que cette hypothèse n'est point complètement nécessaire. Les raisonnements précédents sont valables dès que l'on peut trouver une suite infinie de circonférences C dont les rayons aillent en augmentant indéfiniment et sur lesquelles l'inégalité (17) soit vérifiée.

14. Revenons maintenant aux fonctions considérées au n° 7. Il sera préférable ici d'introduire, au lieu du nombre α, son inverse,

que nous désignerons par la lettre λ, de sorte que l'on aura, pour les grandes valeurs de x

$$|F(x)| < e^{H|x|^{\lambda}}. \tag{18}$$

Supposons qu'une pareille fonction soit de la forme $e^{G(x)}$: la partie réelle de $G(x)$ devra rester algébriquement plus petite que $H|x|^{\lambda}$ et, par suite, la fonction $G(x)$ ne peut être qu'un polynome. En particulier, si λ est plus petit que 1, la fonction G doit se réduire à une constante.

Ainsi, *lorsqu'une fonction* $F(x)$ *est de la forme* $e^{G(x)}$, *les coefficients de son développement ne peuvent pas décroître plus vite que* $\frac{1}{(m!)^{\alpha}}$, *à moins que* $G(x)$ *ne soit un polynome.*

Il en serait de même si $F(x)$ était de la forme $\mathfrak{P}(x)e^{G(x)}$ (la lettre $\mathfrak{P}$ représentant un polynome quelconque); car la multiplication ou la division par un polynome n'altèrent pas le fait exprimé par l'inégalité (18).

15. Les résultats précédents présentent cette particularité de ne pas changer si l'on ajoute à la fonction $F(x)$ un polynome quelconque; aussi peuvent-ils servir à démontrer, du moins pour les fonctions qui satisfont à la condition (8) (n° 7), le théorème connu de M. Picard [1] sur les fonctions entières.

Considérons d'abord une fonction entière F dont les coefficients vérifient la condition (8) avec $\alpha > 1$. Le nombre λ sera plus petit que 1 et il sera impossible que F soit de la forme $\mathfrak{P}e^{G(x)}$, du moins si G ne se réduit pas à une constante. L'équation $F = 0$ admettra donc une infinité de racines, et il en sera évidemment de même pour l'équation $F(x) = P(x)$, où P est un polynome quelconque.

C'est par exemple le cas de la fonction $\mathfrak{F}$ définie par l'égalité (7), (n° 6).

16. Supposons maintenant α quelconque, et soit E l'entier immédiatement supérieur à $\frac{1}{\alpha}$. L'identité

$$F(x) = P(x) + \mathfrak{P}(x)e^{G(x)} \tag{19}$$

---

[1] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IX, 1880.

pourra avoir lieu, mais G devra être un polynome de degré E au plus.

Or, dans ces conditions, l'identité (19) ne peut avoir lieu de deux façons différentes, car c'est un fait bien connu que l'équation

$$P(x) + \mathfrak{P}(x)e^{G(x)} + P_1(x) + \mathfrak{P}_1(x)e^{G_1(x)} + \ldots = 0, \tag{20}$$

où P, P_1, ..., $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, ..., G, G_1 sont des polynomes, n'admet pas d'autre solution que ses solutions banales.

On peut même ajouter que si F_1, F_2, F_3, ... sont des fonctions entières dont les coefficients vérifient toujours la condition (8) et qui n'ont chacune qu'un nombre fini de zéros, la somme $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$ aura nécessairement un nombre infini de racines, à moins que F_1, F_2, ... ne soient identiques à des facteurs constants et à des polynomes près. Cela résulte de la même proposition relative à l'équation (20).

17. La fonction F étant donnée, on peut résoudre l'équation (19) dès que l'on connaît le degré de P (x). Il suffira pour cela de différentier un nombre de fois supérieur à ce degré. Le second membre prendra la forme Qe^G (où Q sera un nouveau polynome), et, par conséquent, devra admettre un nombre fini de racines. Si l'on a obtenu ces racines, on connaîtra les polynomes Q et G, et la résolution d'équations linéaires fera connaître $\mathfrak{P}$.

En faisant, par exemple, P constant, on pourra, par ce procédé, reconnaître si l'équation

$$F = a + \mathfrak{P}e^G$$

est possible, et de la résoudre s'il y a lieu. On n'aura qu'une seule dérivée à prendre, et il viendra

$$Q = \mathfrak{P}' + G'\mathfrak{P}.$$

En égalant, dans cette identité, les coefficients de chaque puissance de x, on aura une série d'équations linéaires auxquelles devront satisfaire les coefficients de $\mathfrak{P}$.

Dans un grand nombre de cas, on pourra reconnaître immédiatement que l'équation (19) est impossible.

Faisons, par exemple,

$$F(x) = \frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \Gamma(x)\sin\pi x.$$

D'après les propositions connues relatives à la fonction Γ, le polynome G devrait être du premier degré, ce qui est contraire à ce ait que la fonction F croît comme $|x|\mathrm{L}|x|$. Donc les équations

$$\frac{\pi}{\Gamma(1-x)}=\mathcal{P}(x), \qquad \frac{\pi}{\Gamma(1-x)}+k\sin x=\mathcal{P}(x), \qquad \ldots$$

ont toujours une infinité de racines.

En général, pareil fait se produira toutes les fois que F augmentera plus vite que $e^{kx^{\mathrm{E}}}$ et moins vite que $e^{\frac{1}{k}x^{\mathrm{E}+1}}$, quelque grand que soit k.

18. Les considérations précédentes démontrent le théorème de M. Picard pour toutes les fonctions satisfaisant à la condition (8). C'est, d'après le théorème de M. Poincaré, le cas de toutes les fonctions qui ont un genre fini.

On peut étendre une partie de ces conclusions à des fonctions de genre infini au moyen d'un raisonnement devenu classique dans cette théorie. On sait, en effet, que, si la fonction

$$\mathrm{F}(x)=e^{\mathrm{G}(x)},$$

qui n'a aucun zéro, était telle que l'équation $\mathrm{F}(x)=1$ n'admette non plus aucune solution, on en conclurait immédiatement que les mêmes propriétés appartiennent à la fonction

$$\mathrm{F}_1(x)=\frac{1}{2i\pi}\mathrm{G}(x).$$

Si, d'ailleurs, F croît moins vite que $e^{\psi(x)}$, on peut déduire de notre théorie que F_1 croîtra moins vite que $\psi(x)$.

Formons alors la suite des fonctions

$$f_1=e^x, \qquad f_2=e^{e^x}, \qquad f_3=e^{e^{e^x}}, \qquad \ldots.$$

Si la fonction donnée F est dépassée par une fonction f_m de cette suite, il suffira d'appliquer m fois le raisonnement précédent pour ramener F à vérifier la condition (8).

Mais, même à l'aide de l'extension précédente, la démonstration ne s'applique pas à une fonction quelconque; car on peut former une fonction entière croissant plus vite que n'importe quelle fonction f_m. On pourra, par exemple, procéder de la façon suivante :

Ayant pris une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h, \ldots$ qui tendent vers zéro, on appellera m_1 le plus petit entier tel que la racine $m_1^{\text{ième}}$ du coefficient de x^m dans $f_1(x)$ soit plus petite que ε_1, puis m_2 le plus petit entier tel que la racine $m_2^{\text{ième}}$ du coefficient de x^{m_2} dans $f_2(x)$ soit plus petite que ε_2, et ainsi de suite.

En écrivant les termes de f_1 jusqu'au rang $m_2 - 1$, puis les termes de f_2 depuis le rang m_2 jusqu'au rang $m_3 - 1$, puis les termes de f_3 depuis le terme de rang m_3 jusqu'au terme de rang $m_4 - 1, \ldots,$ on obtiendra une fonction entière qui jouira manifestement des propriétés demandées.

DEUXIÈME PARTIE.

Recherche de l'ordre de grandeur des racines et du genre.

19. Les résultats obtenus dans notre première Partie permettent de compléter les conclusions de M. Poincaré, dans le cas des fonctions de genre zéro.

Soit, en effet,

$$F(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_p}\right)\cdots$$

une fonction de genre zéro, et $\varphi(p)$ une fonction positive et croissante telle que le module ρ_p de x_p soit supérieur à $\varphi(p)$. Nous supposerons de plus que $\varphi(p)$ soit supérieur à p^α (où α est un nombre plus grand que 1), et cela de telle manière que le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha-\varepsilon}}$ soit croissant, mais le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha+\varepsilon}}$ décroissant.

Le module de F ne peut dépasser la quantité

$$F_0(R) = \left[1 + \frac{R}{\varphi(1)}\right]\left[1 + \frac{R}{\varphi(2)}\right]\cdots\left[1 + \frac{R}{\varphi(p)}\right]\cdots, \tag{21}$$

où R est le module de x.

Pour évaluer F_0, prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation (21); nous trouvons

$$\frac{d}{dR} LF_0(R) = \frac{1}{\varphi(1) + R} + \frac{1}{\varphi(2) + R} + \ldots + \frac{1}{\varphi(p) + R} + \ldots. \tag{22}$$

Soit ψ la fonction inverse de φ et, dans le second membre, isolons les $p_0 = \psi(\mathrm{R})$ premiers termes. Leur somme sera moindre que $\frac{\psi(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}$. Quant à la somme des termes qui restent, elle est inférieure à

$$\frac{1}{\varphi(p_0)} + \frac{1}{\varphi(p_0+1)} + \ldots.$$

Cette dernière quantité s'évalue à l'aide des procédés employés dans la théorie élémentaire des séries. On la remplace tout d'abord par la somme

$$(23) \qquad \frac{(t-1)p_0}{\varphi(p_0)} + \frac{(t^2-t)p_0}{\varphi(tp_0)} + \frac{(t^3-t^2)p_0}{\varphi(t^2p_0)} + \ldots,$$

où t est un nombre quelconque plus grand que 1. D'ailleurs, les hypothèses relatives à la fonction φ donnent

$$\varphi(t^\mu p_0) > t_0^{\mu\alpha'}\varphi(p_0),$$

où $(\alpha' = \alpha - \varepsilon)$. La série (23) est donc moindre que

$$\frac{(t-1)p_0}{\varphi(p_0)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{t^{\mu\,\alpha'-1}} = \frac{p_0}{\varphi(p_0)}\;\frac{t^{\alpha'-1}(t-1)}{t^{\alpha'-1}-1}.$$

Le second facteur $\frac{t^{\alpha'-1}(t-1)}{t^{\alpha'-1}-1}$ a pour limite $\frac{1}{\alpha'-1}$ lorsque t tend vers 1, de sorte que la série (23) peut être remplacée par

$$\frac{1+\varepsilon}{\alpha-1}\;\frac{p_0}{\varphi(p_0)} = \frac{1+\varepsilon}{\alpha-1}\;\frac{\psi(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}.$$

Il vient donc [1]

$$\frac{d}{d\mathrm{R}}\,\mathrm{L}\,\mathrm{F}_0(\mathrm{R}) < \frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-1}\;\frac{\psi(\mathrm{R})}{\mathrm{R}},$$

---

(1) La limite ainsi obtenue est trop élevée. On peut, dans la plupart des cas, en obtenir une plus approchée en formant un second groupe avec les termes de la série (22) dont le rang est compris entre $\psi(\mathrm{R})$ et $2^{\frac{1}{\alpha'}}\psi(\mathrm{R})$, lesquels sont tous plus petits que $\frac{1}{2\mathrm{R}}$; puis un troisième groupe allant du rang $2^{\frac{1}{\alpha'}}\psi(\mathrm{R})$ au rang $3^{\frac{1}{\alpha'}}\psi(\mathrm{R})$, les termes étant alors plus petits que $\frac{1}{3\mathrm{R}}$. Après séparation d'un certain nombre de ces groupes, on calcule le reste de la série comme il a été expliqué. On trouve ainsi pour la série (22)

ou

$$(24)\qquad F_0(R) < e^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-1}\int\frac{\psi(R)}{R}dR}.$$

20. Ainsi le module de F ne peut croître plus vite que le second membre de l'inégalité précédente.

Si maintenant nous appliquons les conclusions du n° 11, en supposant, pour fixer les idées, que α soit fini, nous voyons que la racine $m^{\text{ième}}$ du coefficient a_m est moindre que $\dfrac{e^\alpha}{\varphi\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\varepsilon}m\right)}$, ce qui peut encore s'écrire $\dfrac{\left(\dfrac{e\alpha}{\alpha-1}\right)^\alpha+\varepsilon}{\varphi(m)}$, puisque $\varphi(m)$ croît moins vite que $m^{\alpha+\varepsilon}$.

21. Nous allons maintenant nous occuper de la question inverse et chercher comment on peut obtenir la loi de distribution des racines quand on connaît la loi des coefficients.

Cette recherche repose sur les formules que j'ai données dans un précédent travail (1), et qui permettent de calculer les zéros successifs d'une fonction à l'aide des coefficients de son développement. Je vais tout d'abord résumer succinctement la marche suivie pour arriver à ces formules, en renvoyant pour les détails au Mémoire dont je viens de parler.

$\left[\text{en laissant de côté le facteur } \dfrac{\psi(R)}{R}\right]$ les limites

$$\frac{1+\dfrac{\alpha}{\alpha-1}2^\alpha}{2}+\varepsilon,\quad \frac{1}{2}+\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{6}+\frac{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}3^{\frac{1}{\alpha}}}{3}+\varepsilon,\quad \ldots.$$

Pour $\alpha=2$, le coefficient de $\dfrac{\psi(R)}{R}$ serait (au terme ε près)

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}+2\frac{\sqrt{3}}{3}=1,88\ldots$$

au lieu de 2.

(1) *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, 1re et 2e Parties (*Journ. de Math.*, 4e série, t. VIII, 1892).

On commence par introduire une définition, celle de la *limite supérieure* d'une suite telle que

$$(25) \qquad u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_m, \quad \ldots,$$

pour m infini (les u étant des nombres réels).

C'est la plus petite quantité qui ne soit pas dépassée, ou du moins soit infiniment peu dépassée par les termes de la suite (25) à indices infiniment grands; ou encore, cette limite supérieure l est le plus grand nombre jouissant de cette propriété que dans la suite (25) on puisse trouver une série indéfinie de termes tendant vers l.

Dans un grand nombre de cas, l est la seule quantité satisfaisant à cette dernière condition. Alors l est, pour la suite (25), une limite, au sens ordinaire du mot. Nous exprimerons souvent ce fait en disant que les termes de la suite (25) *tendent régulièrement* vers l.

La notion de limite supérieure fournit d'abord une expression du rayon de convergence d'une série entière quelconque

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots.$$

Il suffit, en effet, de former la suite

$$|a_1|, \quad |\sqrt[2]{a_2}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[m]{a_m}|, \quad \ldots.$$

Soit l la limite supérieure (supposée finie) de cette suite. Le rayon cherché est donné par la formule $\rho = \frac{1}{l}$.

22. Proposons-nous maintenant d'exprimer que les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ sont des pôles au nombre de P (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité).

S'il en est ainsi, on pourra débarrasser la fonction de ces pôles en la multipliant par un polynome de degré P

$$\varphi_P = 1 + A^{(1)} x + \ldots + A^{(P)} x^P$$

et la nouvelle série ainsi obtenue

$$F_1 = \Sigma b_m x^m$$

sera convergente dans un cercle de rayon $\rho' > \rho$, de sorte qu'on pourra écrire

$$(26) \qquad b_{m+P} = a_{m+P} + A^{(1)} a_{m+P-1} + \ldots + A^{(P)} a_m = \left[\frac{\theta(1+\varepsilon)}{\rho'}\right]^m,$$

où θ est de module inférieur à 1 et ε un infiniment petit.

Réciproquement, s'il existe des nombres $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(P)}$ jouissant de la propriété précédente, la fonction donnée ne pourra posséder sur le cercle primitif d'autres points singuliers que des pôles, dont les affixes seront racines de l'équation

$$(27) \qquad 1 + A^{(1)} x + \ldots + A^{(P)} x^P = 0.$$

Elle admettra bien tous ces pôles s'il est impossible de trouver un polynome de degré moindre que P et remplissant les mêmes conditions

23. Considérons alors le déterminant symétrique d'ordre $p+1$

$$(28) \qquad D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & \ldots & a_{m+2p} \end{vmatrix},$$

p étant un entier quelconque. Nous désignerons par l_p la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,p}|}$ pour m infini (p restant fixe).

Tout d'abord, quels que soient les points singuliers de notre fonction sur son cercle de convergence, l_p ne peut dépasser $\left(\frac{1}{\rho}\right)^{p+1}$, d'après ce qui a été supposé sur l'ordre de grandeur de a_m.

Mais, si le polynome $\mathfrak{P}_P$ existe, nous trouverons pour l_P une valeur nécessairement moindre que la limite précédente. Car on pourra, dans la dernière colonne du déterminant (28), remplacer les a par les b de même indice, lesquels sont inférieurs à $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho'}\right)^m$. Il viendra donc

$$l_P \leqq \frac{1}{\rho^P \rho'}.$$

24. Inversement, supposons que l'inégalité

$$(29) \qquad l_p < \frac{1}{\rho^{p+1}}$$

soit vérifiée pour $p = P$, mais non pour aucune valeur moindre de p.

En particulier, la quantité $\sqrt[m]{|D_{m,P-1}|}$ a pour limite supérieure $\rho^{\frac{1}{P}}$.

On démontre tout d'abord qu'elle tend régulièrement vers cette limite; puis on détermine les coefficients $A_m^{(1)}, \ldots, A_m^{(P)}$ par les équations

$$\begin{aligned}
&a_{m+P} + A_m^{(1)} a_{m+P-1} + \ldots + A_m^{(P)} a_m = 0,\\
&a_{m+P+1} + A_m^{(1)} a_{m+P} + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_{m+2P-1} + A_m^{(1)} a_{m+2P-2} + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+P-1} = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on fait augmenter m indéfiniment, on constate que $A_m^{(1)}, A_m^{(2)}, \ldots A_m^{(P)}$ tendent respectivement vers des limites $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(P)}$, lesquelles vérifient les équations (26) en prenant pour ρ' la valeur fournie par l'équation $l_P = \frac{1}{\rho^P \rho'}$.

La fonction, considérée sur le cercle de rayon ρ, admet donc au plus P pôles, les racines de l'équation (27). Elle les admet d'ailleurs tous, sans quoi l'inégalité (29) serait vérifiée pour $p < P$.

Soient $x = x_1$, $x = x_2$, $\ldots$, $x = x_p$, $\ldots$ les différents pôles de notre fonction, rangés par ordre de module croissant (les pôles de module égal étant rangés dans un ordre arbitraire); $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots$ leurs modules. Les P premiers de ces modules seront tous égaux à ρ, de sorte que l'on aura, pour toutes les valeurs de p inférieures à P, l'équation

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p} = l_{p-1}. \tag{30}$$

25. Considérons maintenant les valeurs de p supérieures à P. Pour une quelconque de ces valeurs, l_p sera au plus égal à $\frac{1}{\rho^P \rho'^{p-P+1}}$, et cela quels que soient les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ', ainsi qu'on le voit en transformant à l'aide des équations (26) les $p - P + 1$ dernières colonnes du déterminant (28).

Mais si ces points singuliers sont des pôles au nombre de P′, une nouvelle réduction se produira pour $p = P + P'$; car il existera un polynome de degré $P + P'$,

$$\mathfrak{T}'_{P+P'} = 1 + B^{(1)} x + \ldots + B^{(P+P')} x^{P+P'},$$

tel que la série $F_2 = \mathfrak{P}'F = \Sigma c_m x^m$ ait un rayon de convergence ρ'' supérieur à ρ'. Comme dans le déterminant $D_{m,\,P+P'}$, on peut remplacer les éléments de la dernière colonne par les c de même indice, on voit que $l_{P+P'}$ ne peut être supérieur à $\frac{1}{\rho^P \rho'^{P'} \rho''}$.

Inversement, considérant la suite des valeurs de p à partir de $p = P$, on en rencontrera d'abord un certain nombre (qui peuvent d'ailleurs se réduire à une seule, $p = P$) pour lesquelles l_p est égal à $\frac{1}{\rho^P \rho'^{p-P+1}}$.

Si après cette série de valeurs en survient une, $p = P + P'$, pour laquelle l_p soit égal à $\frac{1}{\rho^P \rho'^{P'} \rho''}$, où ρ'' est supérieur à ρ', cette circonstance dénotera, comme on le démontre à l'aide de raisonnements analogues aux précédents, la présence de P' pôles sur le cercle de rayon ρ'.

Les modules $\rho_{P+1}, \ldots, \rho_{P+P'}$ sont donc égaux tous à ρ', et, par suite, on aura pour les valeurs de p comprises entre P et $P + P'$ inclusivement

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p} = \frac{1}{\rho^P \rho'^{p-P}},$$

c'est-à-dire l'équation (30), d'après ce que nous savons sur les nombres $l_P, \ldots, l_{P+P'}$.

Ayant ainsi étudié les valeurs de l_p jusqu'à $p = P + P'$, on considérera les valeurs suivantes, et ainsi de suite indéfiniment.

On constate tout d'abord par ce procédé que le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ ne va jamais en diminuant. La condition nécessaire et suffisante pour que notre fonction soit méromorphe dans tout le plan est que ce rapport augmente indéfiniment. S'il en est ainsi, les raisonnements précédents, appliqués aux valeurs de p pour lesquelles le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ présente une croissance, permettent de calculer les affixes des différents pôles. Mais nous n'avons besoin, pour ce qui va suivre, que des modules de ces pôles.

A ce point de vue nos conclusions peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

L'équation (30) *est générale.*

26. Ayant appris à calculer les pôles d'une fonction $F(x)$ donnée par un développement taylorien quelconque, nous sommes à même de résoudre le même problème pour les zéros d'une telle fonction, car ces zéros ne sont autres que les pôles de la fonction $\frac{1}{F(x)}$.

Le calcul des coefficients d'une fonction à l'aide des coefficients de son inverse n'offre aucune difficulté.

Soit, comme précédemment, la fonction

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots, \tag{2}$$

dans laquelle seulement a_0 est supposé différent de zéro. On multipliera cette série par la série

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m + \ldots,$$

et, en égalant à zéro les coefficients de la série produit, à partir du second, on déterminera C_0, C_1, ..., etc. Des valeurs ainsi trouvées on déduit aisément l'expression du déterminant $D_{m,p}$ formé, comme nous l'avons expliqué, à l'aide des coefficients de la série $f(x)$. On trouve ainsi pour ce déterminant la valeur

$$(-1)^{m(p-1)+\frac{p(p+1)}{2}} \frac{E_{m.p}}{a_0^{m+2p+1}},$$

où l'on a posé

$$E_{m.p} = \begin{vmatrix} a_{p+1} & a_p & a_0 & 0 & . & \ldots & 0 \\ a_{p+2} & a_{p+1} & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{m+p-1} & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & a_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{m+2p} & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & a_{p+1} \end{vmatrix} \tag{31}$$

et l'équation (30) devient, en y changeant p en $p+1$,

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{p+1}} = l_p = \limsup_{m=\infty} \sqrt[m]{\left|\frac{E_{m.p}}{a_0^{m+2p+1}}\right|} = \frac{1}{|a_0|} \limsup_{m=\infty} \sqrt[m]{|E_{m.p}|}, \tag{31}$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots$ désignant cette fois les modules des zéros de $F(x)$.

Telle est la formule dont nous avions besoin de rappeler la démonstration et qui va nous servir de point de départ.

27. Supposons que $F(x)$ soit une fonction entière et que le coeffi-

cient a_m soit moindre que $\frac{1}{\chi(m)} = \frac{1}{\varphi(m)^m}$, où $\varphi(m)$ est une fonction positive indéfiniment croissante de m. Nous admettrons en outre que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ est constamment croissant, hypothèse toujours légitime, d'après ce qui a été expliqué aux nos 3-5.

Nous aurons un maximum du déterminant $E_{m,p}$, défini par la formule (31), en y considérant tous les termes comme positifs et remplaçant chaque coefficient a_m par la valeur correspondante de $\frac{1}{\chi(m)}$ autrement dit en imaginant que dans le déterminant

$$(33)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\chi(p+1)} & \frac{1}{\chi(p)} & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\chi(p+2)} & \frac{1}{\chi(p+1)} & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\chi(m+p-1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} \\ \frac{1}{\chi(m+p)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\chi(m+2p)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(p+1)} \end{vmatrix}$$

on convienne de prendre tous les termes avec le signe $+$.

Dans le déterminant (33), l'élément $a_{i,k}$ correspondant à la colonne de rang i et à la ligne de rang k est égal à zéro si $i - k > p + 1$ et à $\frac{1}{\chi(p+1+k-i)}$ dans le cas contraire. Le nombre des termes est

$$(p+2)^{m-1}(p+1)!$$

Je dis que le plus grand terme est celui qui correspond à la diagonale principale.

Effectivement, tout autre terme que celui-là présente au moins une *inversion*, suivant la locution usitée dans la théorie élémentaire des déterminants. Il contient donc en facteurs deux éléments $a_{i,k'}$, $a_{i',k}$ tels que $i < i'$, $k < k'$. Si à ce produit on substitue le produit $a_{i,k}$, $a_{i',k'}$ on obtient un autre terme du déterminant, et ce nouveau terme est plus grand que le précédent. Ceci résulte de ce que le rapport $\frac{a_{i+1,k}}{a_{i,k}} = \frac{\chi(p+1+k-i)}{\chi(p+1+k-i-1)}$ est croissant avec k, d'après les hypothèses faites sur la fonction χ. Il en est de même des rapports $\frac{a_{i+2,k}}{a_{i+1,k}}, \dots, \frac{a_{i',k}}{a_{i'-1,k}}$ et, par suite, de leur produit $\frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$. On a donc bien

$$\frac{a_{i',k'}}{a_{i,k'}} > \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}.$$

Le plus grand terme est donc celui qui ne renferme pas d'inversion, c'est-à-dire le terme principal.

Il en résulte

$$|E_{m,p}| \leqq (p+1)!\,(p+2)^{m-1}\left[\frac{1}{\chi(p+1)}\right]^{m+p-1}$$

et

$$l_p \leqq \frac{p+2}{|a_0|\,.\chi(p+1)}.$$

Mais le produit $\rho_1\rho_2\dots\rho_{p+1}$ est égal à $\frac{1}{l_p}$. Le plus grand facteur de ce produit, à savoir le dernier, est donc au poins égal à $\sqrt[p+1]{\frac{1}{l_p}}$, c'est-à-dire, à un facteur près qui tend vers l'unité pour p infini, au moins égal à $\varphi(p+1)$.

Le raisonnement précédent ne s'appliquerait plus si la fonction s'annulait à l'origine. Mais on ramènerait ce cas au cas général en divisant par une puissance convenable de x et en raisonnant sur la fonction ainsi débarrassée de ses racines nulles.

Nous avons également supposé que l'inégalité

$$(34) \qquad |a_m| < \frac{1}{\chi(m)}$$

était vérifiée, quel que soit m. Mais il suffit manifestement qu'elle ait lieu pour les grandes valeurs de l'indice; car on ramènerait les premiers coefficients à vérifier la même inégalité en divisant toute la série par un certain nombre constant, ce qui ne changerait pas les racines.

La condition que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit croissant peut également n'être vérifiée que pour les grandes valeurs de m; car on pourra remplacer, s'il y a lieu, les valeurs de $\chi(m)$ jusqu'à un certain rang par d'autres qui satisfassent à cette condition.

Nous arrivons donc à cette conclusion :

Théorème. — *Si le coefficient a_m décroît plus vite que* $\frac{1}{\varphi(m)^m}$, *la $p^{\text{ième}}$ racine a un module supérieur à* $(1-\varepsilon)\,\varphi(p)$, où ε est infiniment petit pour p infini.

En un mot, *les modules des racines vont en croissant plus vite que* $\frac{1}{\sqrt[m]{|a_m|}}$.

Par exemple, les racines de la fonction

$$\mathcal{F}(x) = \Sigma q^{n^2} x^n,$$

considérée au n° 6, croissent au moins aussi vite que q^n. Il en est de même pour les racines de l'équation $\mathcal{F}(x) = \mathcal{R}(x)$, où $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle quelconque.

28. Venons maintenant à notre objet principal et proposons-nous d'étudier le genre d'une fonction donnée par son développement en série entière.

Pour cela, nous appliquerons le résultat que nous venons d'obtenir aux fonctions, étudiées au n° 7, pour lesquelles on a

$$\chi(m) = (m!)^\alpha$$

et, par suite,

$$\varphi(m) = m^\alpha.$$

Comme précédemment, nous introduirons, au lieu du nombre α, son inverse, que nous désignerons par la lettre λ.

Nous savons donc que le module ρ_p de la $p^{\text{ième}}$ racine croît, lorsque p augmente indéfiniment, plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Si λ n'est pas entier, et que $E+1$ soit l'entier immédiatement supérieur, la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ est convergente. Nous en conclurons plus loin que la fonction est du genre E.

Lorsque λ est un entier, il y a doute. C'est à cette hypothèse que se rattache l'exemple dont parle M. Poincaré dans son Mémoire [1] et relatif à la fonction

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2 L^2 n}\right).$$

Il faudrait, dans les cas de cette espèce, étudier directement la convergence de la série $\sum_p \frac{1}{\varphi(p)^\lambda}$.

Quoi qu'il en soit, nous supposons que, le coefficient a_m étant moindre que $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, nous désignerons par $E+1$ l'entier immédiatement supérieur (et non égal) à λ, de sorte que la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ soit certainement convergente. Nous pourrons former, d'après la méthode de M. Weierstrass, la fonction

$$\Phi(x)=\prod\left(1-\frac{x}{x_p}\right)e^{Q_E\left(\frac{x}{x_p}\right)}, \tag{35}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ sont les racines successives et $Q_E(z)$ est le polynome

$$\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^E}{E},$$

obtenu en prenant dans le développement de $-L(1-z)$ les E premiers termes.

---

(1) M. Poincaré démontre, non seulement que a_m est plus petit que $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, mais que le produit $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ tend vers zéro. On peut même déduire de sa démonstration que la racine $m^{\text{ième}}$ de ce produit tend vers zéro; car $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ se présente comme $m^{\text{ième}}$ coefficient d'une série entière.

Inversement, si la racine $m^{\text{ième}}$ de $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ tend vers zéro, nous savons que ρ_p est égal au produit de $p^{\frac{1}{\lambda}}$ par une quantité qui augmente indéfiniment. La série $\sum \frac{1}{\rho_p^\lambda}$ est donc telle que ses termes soient avec ceux de la série harmonique dans un rapport infiniment petit pour p infini. Mais une telle série n'est pas nécessairement convergente, et le contraire se produit précisément dans l'exemple donné par M. Poincaré.

La fonction donnée $F(x)$ sera égale au produit de $\Phi(x)$ par un facteur de la forme $e^{G(x)}$. Puisque nous avons déjà démontré que les polynomes de la formule (1) sont de degré E, tout se réduit à établir que $G(x)$ est un polynome de degré au plus égal à E.

29. Or, je vais faire voir qu'*on peut décrire, avec l'origine comme centre, des cercles aussi grands qu'on le veut sur lesquels la fonction* $\Phi(x)$ *reste constamment supérieure à* $e^{-|x|^{\lambda+\epsilon}}$.

Les rayons de ces cercles seront déterminés ainsi qu'il suit :

Les modules ρ_p, d'après nos hypothèses, croissent plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Admettons en outre que la quantité $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, ce qui peut évidemment se faire en donnant, s'il y a lieu, un petit accroissement à λ.

Puisque $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, il existera une infinité d'entiers p pour chacun desquels cette quantité prendra une valeur plus petite que toutes les valeurs suivantes. Soit p_0 un tel entier, de sorte qu'on ait, pour $h > 0$,

$$\rho_{p_0+h}^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda > h. \tag{36}$$

Nous déterminerons R par la relation

$$R^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda = \frac{1}{2}, \tag{37}$$

de sorte que l'inégalité (36) pourra s'écrire

$$\rho_{p_0+h} > \left(h - \frac{1}{2} + R^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{38}$$

Pour chaque valeur de l'entier p_0, nous aurons ainsi une valeur de R; nous obtenons donc bien une suite de cercles dont les rayons vont en augmentant indéfiniment. Je dis que ces cercles satisfont à la condition indiquée.

30. Pour plus de clarté, je considérerai d'abord le cas où λ est plus petit que 1 (l'égalité étant exclue), de façon qu'on a $E = 0$. Les facteurs exponentiels disparaissant, la formule (35) se réduit à

$$\Phi(x) = \prod\left(1 - \frac{x}{x_p}\right), \tag{35'}$$

et, lorsque le point x décrira le cercle de rayon R, le module de $\Phi(x)$ restera supérieur à la quantité

$$(39)\qquad \prod_{p=1}^{p_0}\left(\frac{R}{\rho_p}-1\right)\prod_{p=p_0+1}^{\infty}\left(1-\frac{R}{\rho_p}\right).$$

Nous évaluerons cette expression en partageant les facteurs qui la composent en trois groupes. Le premier Π_1 comprendra tout ce qui figure sous le premier signe Π,

$$(40)\qquad \Pi_1=\prod_{p=1}^{p_0}\left(\frac{R}{\rho_p}-1\right).$$

Le nombre p_0 de ces facteurs est, nous le savons, moindre que $R^\lambda-\frac{1}{2}\cdot$ Le plus petit est le dernier, égal à

$$\frac{R}{\left(R^\lambda-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}-1=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}-1,$$

par conséquent supérieur à $\frac{1}{2R^\lambda}$ puisque λ est plus petit que 1.

Si nous envisageons les autres facteurs du produit (39), la formule (38) nous montre que l'on a

$$(41)\qquad 1-\frac{R}{\rho_{p_0+h}}>1-\frac{1}{\left(1+\dfrac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Nous composerons le produit Π_2 avec tous les facteurs pour lesquels $h-\frac{1}{2}$ est plus petit que R^λ. Le nombre de ces facteurs est moindre que $R^\lambda+\frac{1}{2}\cdot$ Le plus petit est le premier, au moins égal à $1-\dfrac{R}{\left(R^\lambda+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$, par conséquent supérieur à $\frac{k}{2R^\lambda}$ (k restant fini pour R infini).

Les facteurs restants, qui forment le produit Π_3, peuvent se mettre sous la forme $1-u$, où $u = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ est plus petit que $\frac{1}{2}$.

Or, sous cette condition, on voit aisément que $1-u$ est supérieur à e^{-2u}. Chacun des facteurs du produit Π_3 est donc plus grand que la valeur correspondante de $e^{-\frac{2}{\left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}}$, ou, plus simplement, de $e^{-\frac{2R}{h^{\frac{1}{\lambda}}}}$.

D'après ces remarques, on voit que le produit Π_1 est supérieur à $\left(\dfrac{1}{2R^\lambda}\right)^{R^\lambda}$, ou (comme $2R^\lambda$ croît moins vite que e^{R^ε}, si petit que soit ε) supérieur à $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Une évaluation semblable s'applique au produit Π_2.

Quant au produit Π_3, il est plus grand que $e^{-R\sigma}$, où σ est le reste de la série $\sum \dfrac{1}{h^{\frac{1}{\lambda}}}$ arrêtée au terme qui a pour rang l'entier h_0 immédiatement supérieur à $R^\lambda + \frac{1}{2}$. Or, le reste d'une pareille série est de l'ordre de $h_0^{1-\frac{1}{\lambda}}$ ou de $R^{\lambda-1}$, de sorte que Π_0 est aussi moindre que $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Nous trouvons donc bien, ainsi que nous l'avons annoncé,

$$\Pi_1\Pi_2\Pi_3 > e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}.$$

31. Pour généraliser cette proposition, au cas d'un genre quelconque, nous remarquerons que, pour $u < 1$, la quantité $(1-u)\,e^{Q_E(u)}$ est supérieure à $1-u^{E+1}$. C'est ce qui résulte des deux développements

$$\text{(42)}\quad \begin{aligned} &L(1-u)+Q_E(u) \\ &\quad = -\frac{u^{E+1}}{E+1}-\frac{u^{E+2}}{E+2}-\ldots-\frac{u^{2(E+1)}}{2(E+1)}-\ldots-\frac{u^{3(E+1)}}{3(E+1)}-\ldots,\end{aligned}$$

$$\text{(43)}\quad L(1-u^{E+1}) = -u^{E+1}-\frac{u^{2(E+1)}}{2}-\frac{u^{3(E+1)}}{3}-\ldots.$$

Les termes de la série (42) sont constamment décroissants en valeur absolue. Le premier terme de la série (43) sera donc (en valeur absolue) supérieur à l'ensemble des $E + 1$ premiers termes de la série (42); le deuxième terme de (43) à la somme des $E + 1$ suivants, etc.

D'après cela, au lieu des facteurs $1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ qui composaient tout à l'heure les produits Π_2 et Π_3, nous aurons à considérer des facteurs de la forme $\dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{E+1}{\lambda}}}$.

Pour les valeurs de h inférieures à $R^\lambda + \frac{1}{2}$, nous remplacerons $\frac{E+1}{\lambda}$ par l'unité, et nous trouverons pour le produit Π_2 de ces facteurs la même évaluation que précédemment.

Quant aux facteurs suivants, nous constaterons comme plus haut que leur produit est supérieur à $e^{-R^{E+1}\sigma'}$, où σ' est le reste de la série $\dfrac{1}{h^{\frac{E+1}{\lambda}}}$, arrêtée au terme de rang h_0.

Ce reste étant comparable à $\dfrac{1}{h_0^{\frac{E+1}{\lambda}-1}}$, le produit Π_3 est encore supérieur à $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Au produit Π_1 correspondra un produit de facteurs polynomes et de facteurs exponentiels. Les premiers sont en nombre au plus égal à $R^\lambda - \frac{1}{2}$. Le plus petit est supérieur à $\dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{2R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} - 1$, quantité de la forme $\dfrac{k}{R^\lambda}$, où k est fini. Leur produit satisfait donc encore aux conclusions précédentes.

Les facteurs exponentiels sont respectivement plus grands que les quantités $e^{-\left(\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^E}{E}\right)}$, où $u = \dfrac{R}{\rho_p}$ est plus grand que 1. Nous diminuerons encore une telle quantité en supprimant les dénominateurs du polynome Q_E. Le plus grand terme de ce polynome devient alors le dernier et nous pourrons remplacer tous les autres par celui-là. Nous trouvons donc un produit plus grand que l'expression

$$(44) \qquad e^{-ER^E \sum_{p=1}^{p_0} \frac{1}{\rho_p^E}},$$

ρ_p étant de l'ordre de $p^{\frac{1}{\lambda}}$, la série $\frac{1}{\rho_p^E}$ est divergente; mais sa somme, lorsqu'on la limite au terme de rang p_0, n'augmente pas plus vite que $p^{1-\frac{E}{\lambda}}$.

En prenant $p_0 = R^\lambda$ et substituant dans l'expression (44), on arrive pour cette dernière au même résultat que pour les précédentes.

32. Notre proposition auxiliaire est donc démontrée. Sur chacun des cercles de rayon R, l'inégalité

$$|\Phi(x)| > e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$$

est vérifiée.

Comme on a, d'autre part, ainsi qu'il a été vu au n° 7,

$$|F(x)| < e^{HR^\lambda},$$

il vient

$$\left|\frac{F}{\Phi}\right| = |e^{G(x)}| < e^{R^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer à la fonction $e^{G(x)}$ les considérations développées aux nos 12-13, et nous en concluons que $G(x)$ est un polynome de degré E au plus, de sorte que notre fonction F est bien du genre E.

33. Ainsi, nous avons établi que, *lorsque le coefficient a_m est de l'ordre de* $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, *où λ n'est pas entier, la fonction $\Sigma a_m x^m$ est du genre* E, *en désignant par* $E + 1$ *l'entier immédiatement supérieur à λ*. La réciproque du théorème de M. Poincaré est donc bien établie pour λ non entier.

Si λ est un entier $E + 1$, il y a doute. Notre fonction peut être du genre E ou du genre $E + 1$.

A cause de ce cas douteux, les recherches précédentes ne permettent pas encore de résoudre complètement la question posée par M. Poincaré dans son Mémoire, et de décider si le genre se conserve dans la différentiation ou dans une combinaison linéaire. Nous pouvons seulement affirmer que la dérivée d'une fonction de genre E ou la somme de deux pareilles fonctions est *en général* de genre E et *au plus* de genre E + 1.

Le cas où les résultats précédents affectent la forme la plus simple est celui où, λ étant plus petit que 1, le genre est égal à zéro.

C'est ce qui arrivera, par exemple, pour $\frac{\sin x}{x}$ si l'on considère cette quantité comme fonction de x^2. Nous complétons ainsi, comme on le voit, la démonstration de la formule

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots.$$

On sait en effet que, dans les cours de Calcul intégral (¹), on n'arrive pas à déduire immédiatement cette formule du théorème de M. Weierstrass. Une démonstration spéciale est nécessaire pour établir que le facteur exponentiel disparaît.

Ici, cette circonstance apparaît tout d'abord, en supposant seulement connu le développement taylorien de $\sin x$, ou, plus simplement encore, en partant de sa relation avec la fonction exponentielle.

La fonction $\mathfrak{F}(x)$ du n° 6 est également du genre zéro, ainsi que ses combinaisons linéaires avec d'autres fonctions analogues ou des polynomes, etc.

TROISIÈME PARTIE.

Application a la fonction de Riemann.

34. Dans son Mémoire intitulé : *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (²), Riemann utilise les propriétés de la fonction

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(¹) *Voir*, par exemple, Picard, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 151.

(²) Riemann, *Œuvres complètes* (Éd. Weber et Dedekind), p. 136 et suiv.

dont l'étude est elle-même ramenée à celle d'une fonction entière $\xi(x)$ donnée par la formule

$$(45) \qquad \xi(x) = \frac{1}{2} - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{x}{2} \log t\right) dt,$$

où

$$(46) \qquad \Psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}.$$

L'analyse de Riemann repose sur ce fait que $\xi(x)$, considéré comme fonction de x^2, est de genre zéro, fait qui est énoncé dans son Mémoire, mais sans démonstration suffisante.

Les recherches précédentes vont nous permettre de déterminer en toute rigueur le genre de $\xi(x)$.

35. Nous aurons tout d'abord à développer ξ en série. L'intégrale qui figure au second membre de la formule (45) est de la forme $\Sigma(-1)^m C_{2m} x^{2m}$, où l'on a

$$(47) \qquad C_m = \frac{1}{2^m m!} \int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} (\log t)^m\, dt.$$

On aura donc, en considérant ξ comme fonction de x^2,

$$(48) \qquad \xi(x) = \sum_0^\infty a_m x^{2m},$$

où les coefficients a sont donnés, à l'exception du premier, par la formule

$$(49) \qquad a_m = (-1)^m \left(\frac{C_{2m}}{4} - C_{2m-2}\right).$$

36. Remarquons tout d'abord que la série $\Psi(t)$ peut être remplacée, à un facteur fini [1] près, par son premier terme $e^{-\pi t}$. On peut également faire abstraction du facteur $t^{-\frac{3}{4}}$ qui est plus petit que 1.

---

[1] Ce facteur est même très voisin de 1. Il est inférieur à

$$1 + \frac{e^{-3\pi}}{1 - e^{-5\pi}} < 1 + \frac{1}{10000}.$$

D'ailleurs, si ξ est un nombre positif, mais aussi petit qu'on le voudra, l'inégalité

$$(\log t)^m < e^{\varepsilon t}$$

ou

$$\log t < e^{\frac{\varepsilon t}{m}} \tag{50}$$

est vérifiée à partir de la valeur $t = m^{1+\varepsilon}$, du moins pour les grandes valeurs de m; car on a bien, pour m suffisamment grand,

$$(1+\varepsilon)\log m < e^{\varepsilon m^{\varepsilon}}$$

et de plus, en prenant les dérivées des deux membres de l'inégalité (50), on trouve

$$\frac{1}{t} < \frac{\varepsilon}{m} e^{\frac{\varepsilon t}{m}},$$

inégalité dont le premier membre est décroissant tandis que le second est croissant et qui est vérifiée pour $t = m^{1+\varepsilon}$, si m est suffisamment grand.

Si donc, dans la formule (47), nous décomposons l'intégrale qui multiplie $\frac{1}{2^m m!}$ en deux, l'une prise entre les limites 1 et $m^{1+\varepsilon}$, l'autre entre $m^{1+\varepsilon}$ et $+\infty$, la seconde sera moindre que $\frac{e^{-\pi-\varepsilon m^{1-\varepsilon}}}{\pi-\varepsilon}$, c'est-à-dire infiniment petite pour m infini.

La première sera manifestement inférieure à

$$C_0(1+\varepsilon)^m(\log m)^m,$$

où C_0 est l'intégrale $\int_1^{\infty} e^{-\pi t} t^{-\frac{3}{4}} dt$.

C_m sera donc au plus de l'ordre de $\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^m \frac{(\log m)^m}{m!}$, ce qui donne

$$|a_m| < \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{2m} \frac{(\log 2m)^{2m}}{(2m)!}.$$

Il faut donc prendre [1]

$$\varphi(m) = \left(\frac{2}{1+\varepsilon}\frac{2m}{e\log m}\right)^2.$$

---

[1] La fonction $\varphi(m)$ ainsi définie satisfait manifestement aux conditions indiquées au n° 27.

D'après ce qui précède, cette formule exprime également la loi de croissance des racines de l'équation $\xi(x) = 0$, considérée comme équation en x^2.

Si l'on considère x comme l'inconnue de l'équation, il faut prendre la racine carrée de l'expression précédente et l'on trouve

$$\rho_p > \frac{kp}{\log p} \tag{51}$$

en posant

$$k = \frac{4 - \varepsilon}{e}. \tag{52}$$

37. Si nous voulions avoir une limite supérieure des modules des racines successives, il faudrait commencer par trouver une limite inférieure du module de a_m. Or, on aura une limite inférieure de C_m en prenant l'intégrale entre les limites $m^{1-\varepsilon}$ et $m^{1-\varepsilon'}$ (où ε et $\varepsilon' < \varepsilon$ sont deux nombres positifs très petits). On trouve ainsi

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m e^{-\pi m^{1-\varepsilon'}} m^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon')}}{2^m m!} (m^{1-\varepsilon'} - m^{1-\varepsilon}),$$

ce qui peut s'écrire

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m}{2^m m!},$$

en réunissant tous les facteurs de la forme $(1-\varepsilon)^m$.

D'ailleurs, le rapport $\frac{C_m}{C_{m-2}}$ tend vers zéro; car dans l'évaluation de ce rapport on peut, d'après ce que nous avons vu, considérer l'intégrale prise seulement jusqu'à la limite $t = m^{1+\varepsilon}$, et il vient alors

$$C_m < C_{m-2} \frac{(1+\varepsilon)^2 \log^2 m}{4m(m-1)}.$$

Il en résulte que $|a_m|$ est, à un facteur constant près, supérieur à C_{2m-2} ou à $\frac{(1-\varepsilon)^{2m} (\log m)^{2m}}{2^{2m}(2m)!}$.

Nous pourrons alors appliquer les raisonnements des nos 19 et 20 en prenant $\varphi(p) = \left(\frac{k'p}{\log p}\right)^2$, où k' est une constante indéterminée.

On a ici $\alpha = 2 - \varepsilon$, et l'on trouve

$$a_m < \left[\frac{(2e+\varepsilon)\log m}{k'm}\right]^{2m}.$$

En appliquant la réduction indiquée dans la note du n° 19, on obtient une limite un peu moins élevée

$$|a_m| < \left[\frac{(1,88+\varepsilon)e\log m}{k'm}\right]^{2m}.$$

Si l'on compare cette valeur à celle qui vient d'être trouvée pour a_m, il vient

$$k' = 7,56\ldots.$$

Telle est la quantité que $\frac{\rho_p \log p}{p}$ ne saurait dépasser constamment, lorsque p grandit indéfiniment.

Les conclusions auxquelles nous arrivons sont donc les suivantes :

Le rapport $\frac{1}{\rho_p}\frac{p}{\log p}$ *reste fini et sa limite supérieure, pour p infini, est comprise entre* $\frac{1}{7,56}$ et $\frac{e}{4}$.

Riemann donne, entre un module ρ et le nombre p des racines de module plus petit que ρ, la relation approchée

$$(53) \qquad p = \frac{\rho}{2\pi}\left(\log\frac{\rho}{2\pi} - 1\right).$$

Pour comparer ce résultat à ceux que nous venons d'obtenir, il faut résoudre cette équation par rapport à ρ, ce qui se fait aisément par la méthode des approximations successives. On trouve ainsi comme valeur approchée

$$\rho = \frac{2\pi p}{\log p},$$

de sorte que le rapport $\frac{1}{\rho}\frac{p}{\log p}$ devrait tendre vers $\frac{1}{2\pi}$. Cette valeur est comprise entre les deux limites précédemment indiquées, de sorte que nous ne sommes pas à même de décider si le coefficient $\frac{1}{2\pi}$ de la formule (53) est exact ou non.

38. Mais, ainsi que nous l'avons dit plus haut, ce point n'est pas celui sur lequel repose le raisonnement de Riemann. C'est la détermination du genre de $\xi(x)$ qui constitue la question essentielle et les recherches qui précèdent en donnent immédiatement la solution.

Nous avons, en effet, constaté que, en considérant toujours $\xi(x)$ comme fonction de x^2, son développement satisfait à la condition (8) avec $\alpha = 2 - \varepsilon$, et, par conséquent, $\lambda = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Dès lors, les conclusions du n° 33 nous permettent d'affirmer la proposition suivante :

La fonction $\xi(x)$ (*considérée comme fonction de* x^2) *est de genre zéro.*

Elle s'exprime par le produit de facteurs primaires et d'une simple constante, sans aucun facteur exponentiel.

C'est le résultat que nous nous proposions d'établir.

THÉORIE DES NOMBRES

SUR LA DISTRIBUTION

DES

ZÉROS DE LA FONCTION $\zeta(s)$

ET

SES CONSÉQUENCES ARITHMÉTIQUES (¹)

(*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 24, 1896.)

I. — Sur les zéros de la fonction ζ et de quelques fonctions analogues.

1. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann est définie, lorsque la partie réelle de s est plus grande que 1, par l'équation

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \tag{1}$$

où p désigne successivement les différents nombres premiers; les logarithmes sont népériens. Elle est holomorphe dans tout le plan, sauf au point $s = 1$, qui est un pôle simple. Elle ne s'annule pour aucune valeur de s dont la partie réelle soit supérieure à 1, puisque

(1) Les résultats fondamentaux du présent Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences, dans la séance du 22 juin 1896.

le second membre de l'équation (1) est fini. Mais elle admet une infinité de zéros imaginaires dont la partie réelle est comprise entre o et 1. Stieltjes avait démontré, conformément aux prévisions de Riemann, que ces zéros sont tous de la forme $\frac{1}{2} + ti$ (le nombre t étant réel); mais sa démonstration n'a jamais été publiée, et il n'a même pas été établi que la fonction ζ n'ait pas de zéros sur la droite [1] $\mathcal{R}(s) = 1$.

C'est cette dernière conclusion que je me propose de démontrer.

2. Faisons d'abord tendre s vers 1 par valeurs réelles et décroissantes. Le logarithme de $\zeta(s)$ ou, à une quantité finie près, la série

$$S = \sum_p \frac{1}{p^s} \tag{2}$$

augmente indéfiniment comme $-\log(s-1)$.

Remplaçons maintenant s par $s + ti$ et imaginons que le point d'affixe $1 + ti$ soit un zéro de ζ. Alors la partie réelle de $\log \zeta(s + ti)$, c'est-à-dire (à une quantité finie près) la somme

$$P = \sum_p \frac{1}{p^s} \cos(t \log p), \tag{3}$$

devra croître indéfiniment par valeurs négatives *comme* $\log(s-1)$, *c'est-à-dire comme* $-S$, lorsque s tendra vers 1 (t restant fixe).

3. Cela posé, soit α un angle que nous supposerons petit; parmi les différents nombres premiers, distinguons deux catégories :

1° Ceux qui satisfont, pour quelque valeur entière de k, à la double inégalité

$$\frac{(2k+1)\pi - \alpha}{t} \leqq \log p \leqq \frac{(2k+1)\pi + \alpha}{t}. \tag{4}$$

Les parties des sommes S_n et P_n [c'est-à-dire des séries (2) et (3) bornées à leurs n premiers termes] correspondant à cette première catégorie de nombres premiers seront désignées par S'_n et P'_n.

---

(1) $\mathcal{R}(s)$ désigne, comme d'habitude, la partie réelle de s.

2° Les nombres premiers restants, c'est-à-dire ceux qui ne vérifient la double inégalité (4) pour aucune valeur de k, donneront, dans les sommes S_n et P_n, les parties S''_n et P''_n.

Considérons le rapport $\rho_n = \frac{S'_n}{S_n}$, lequel est compris entre o et 1 : lorsque n augmentera indéfiniment, ce rapport aura, soit une limite, soit des limites d'oscillation. *Si* $\zeta(1 + ti)$ *était nul, cette ou ces limites devraient tendre vers* 1 *avec* s. Autrement dit, ρ étant un nombre quelconque plus petit que 1, on pourrait faire correspondre à toute valeur réelle de s supérieure à 1, mais suffisamment voisine de 1, une valeur de n à partir de laquelle on aurait

$$\rho_n > \rho. \tag{5}$$

On peut, en effet, écrire évidemment

$$P'_n \geqq - S'_n \geqq - \rho_n S_n,$$
$$P''_n \geqq S''_n \cos\alpha \geqq - (1 - \rho_n) S_n \cos\alpha$$

(les inégalités ayant leur sens algébrique). Si donc on avait

$$\rho_n \leqq \rho,$$

il en résulterait

$$P_n \geqq - \theta S_n,$$

où $\theta = \rho + (1 - \rho) \cos\alpha$ est un nombre fixe plus petit que 1 ; et si cela avait lieu pour une infinité de valeurs de n, on pourrait passer à la limite et écrire

$$P \geqq - \theta S,$$

ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse $\zeta(1 + ti) = 0$, ainsi qu'il a été remarqué au numéro précédent.

L'égalité $\zeta(1 + ti) = 0$ exige donc bien que la ou les limites de ρ_n tendent vers 1 avec s.

4. Changeons alors t en $2t$, dans la série (3) et soit Q la nouvelle série ainsi obtenue : les termes qui formaient, dans la série (3), les sommes P'_n, P''_n, $P_n = P'_n + P''_n$ donneront, dans cette nouvelle série, respectivement les sommes Q'_n, Q''_n, $Q_n = Q'_n + Q''_n$ et l'on aura, cette fois,

$$Q'_n \geqq S'_n \cos 2\alpha \geqq \rho_n S_n \cos 2\alpha,$$
$$Q''_n \geqq - S''_n \geqq - (1 - \rho_n) S_n$$

et, par conséquent,

$$Q_n \geqq S_n[\rho_n \cos 2\alpha - (1 - \rho_n)];$$

d'où, moyennant l'inégalité (5) supposée vérifiée pour n suffisamment grand,

$$Q_n \geqq \theta' S_n,$$

θ' désignant le nombre $\rho \cos 2\alpha - (1 - \rho)$, lequel est positif si nous avons pris $1 > \rho > \frac{1}{1 + \cos 2\alpha}$.

Or, ceci donnerait $Q \geqq \theta' S$ et, par suite, Q augmenterait indéfiniment par valeurs positives; de sorte que le point d'affixe $1 + 2ti$ serait un infini de $\zeta(s)$, ce que nous savons n'avoir pas lieu.

L'impossibilité de l'hypothèse $\zeta(1 + ti) = 0$ est donc mise en évidence.

5. Il est remarquable que cette démonstration ne repose que sur les propriétés les plus simples de $\zeta(s)$: nous nous sommes, en effet, exclusivement servi des remarques suivantes : 1° le logarithme de notre fonction est développable en série de la forme $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$, les nombres a_n étant tous positifs; 2° la fonction est uniforme sur la droite qui limite la convergence de cette série et ne présente sur cette droite qu'un seul pôle simple.

Toute fonction satisfaisant à ces conditions sera donc différente de o sur la droite limite.

Ainsi, dans la démonstration précédente, c'était uniquement pour simplifier l'écriture que nous avons réduit le second membre de l'équation (1) à la série S : la démonstration se serait également appliquée au développement complet de $\log \zeta(s)$. De même, les nombres premiers ayant été distribués d'une façon quelconque en deux catégories, les nombres de la première catégorie étant désignés par p', ceux de la deuxième par p'', si la fonction représentée (lorsque la partie réelle de s est supérieure à 1) par le produit infini

$$f(s) = \frac{1}{\prod_{p'}\left(1 - \frac{1}{p'^s}\right)\prod_{p''}\left(1 + \frac{1}{p''^s}\right)} \tag{6}$$

est holomorphe sur la droite limite $\mathcal{R}(s) = 1$, elle est différente de o sur cette droite [1].

En effet, le logarithme du produit

$$f(s)\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{p'}\left(1-\frac{1}{p'^s}\right)^2 \prod_{p''}\left(1-\frac{1}{p''^{2s}}\right)}$$

est représenté par une série $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ à coefficients positifs; ce produit satisfait donc aux conditions ci-dessus indiquées.

Ce cas est, par exemple, celui de la fonction de Schlömilch

$$(7) \qquad \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = \prod_p \frac{1}{1+\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^s}}.$$

6. Plus généralement, nous allons étendre la proposition qui précède aux séries introduites en Arithmétique par Dirichlet, et dont nous devons tout d'abord rappeler, en les complétant sur certains points, les principales propriétés.

Ces séries appartiennent à la catégorie des séries de la forme $\sum \frac{a_n}{n^s}$ *périodiques*, c'est-à-dire dont les coefficients a_n se reproduisent de k en k. De telles séries sont évidemment des combinaisons linéaires des k fonctions

$$\xi_1(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{(k+1)^s} + \frac{1}{(2k+1)^s} + \dots,$$

$$\xi_2(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(k+2)^s} + \frac{1}{(2k+2)^s} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\xi_k(s) = \frac{1}{k^s} + \frac{1}{(k+k)^s} + \frac{1}{(2k+k)^s} + \dots,$$

étudiées par MM. Hurwitz [2] et Cahen [3]. Ces fonctions sont

---

(1) Sauf peut-être au point $s = 1$; mais cette circonstance ne se présentera pas dans la suite.

(2) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXVII, 1882, p. 86-102.

(3) *Thèse de Doctorat*, 1894, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XI.

uniformes dans tout le plan, avec le seul pôle simple $s = 1$ et le résidu correspondant $\frac{1}{k}$, ainsi qu'il résulte de l'expression

$$\zeta_r(s) = \frac{i}{2\pi}\Gamma(1-s)\int(-x)^{s-1}\frac{e^{k-r\,x}}{e^{kx}-1}\,dx, \tag{8}$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour C partant de $+\infty$ et y revenant après avoir tourné dans le sens trigonométrique autour de l'origine, et $-x$ étant considéré comme ayant (pour x réel et positif) l'argument $-i\pi$ dans la première partie du chemin d'intégration et, par suite, l'argument $+i\pi$ dans la seconde.

L'intégrale qui figure dans la formule précédente est une fonction entière de s, et les théorèmes généraux donnés dans mon Mémoire *Sur les propriétés des fonctions entières* (1) permettent d'en déterminer le genre. A cet effet, on peut, par exemple, diviser le contour C en deux parties : l'une C′ partant du point $x = 1$ et y revenant après circulation autour de l'origine; l'autre C″ comprenant les deux traits de 1 à $+\infty$; les intégrales prises suivant ces deux traits ne diffèrent entre elles et de l'intégrale

$$\int_1^\infty x^{s-1}\frac{e^{k-r\,x}}{e^{kx}-1}\,dx \tag{9}$$

que par les facteurs exponentiels $e^{-i\pi s}$ pour la première, $e^{i\pi s}$ pour la seconde. Or, le coefficient de s^n dans l'intégrale (9), qui a pour valeur

$$\frac{1}{n!}\int_1^\infty(\log x)^n\frac{e^{k-r\,x}}{e^{kx}-1}\,\frac{dx}{x},$$

est (puisque r est un entier plus grand que 0) au plus comparable au coefficient correspondant de la fonction

$$Q(s) = \int_1^\infty x^{s-1}\,e^{-x}\,dx,$$

qui intervient dans l'étude de la fonction Γ et dont l'ordre de grandeur pour s infini est celui de Γ. Quant à l'intégrale prise le long

(1) *Journal de M. Jordan*, 4e série, t. IX, 1893.

de C′, le coefficient de s^n, qui a pour valeur

$$\frac{1}{n!}\int_{C'}(\log x)^n \frac{e^{k-rx}}{e^{kx}-1}\,dx,$$

y est au plus de l'ordre de $\frac{K^n}{1.2\ldots n}$, en désignant par K le module maximum de $\log x$ sur le contour en question. On voit donc que la fonction considérée est de genre 1 : le nombre de zéros de cette fonction, compris dans le cercle de rayon R, est de l'ordre de R log R.

7. Lorsqu'on change s en $1-s$, les nouvelles valeurs des fonctions ξ s'expriment en fonction des anciennes par les relations établies par M. Hurwitz (¹) et que l'on peut prendre sous la forme (²)

$$(10)\quad \frac{1}{\Gamma(1-s)}\sum_{l=1}^{k}\sigma^{lr}\xi_l(s) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{s-1}\left[e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_{k-r}(1-s) + e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_r(1-s)\right]$$
$$(r = 1, 2, \ldots, k),$$

où σ désigne $e^{\frac{2i\pi}{k}}$.

8. Pour définir ses séries, Dirichlet (³) part de la décomposition du nombre k en facteurs premiers

$$(11)\qquad k = 2^\lambda p^\varpi p'^{\varpi'}\ldots \qquad (\lambda \geqq 0;\ \varpi, \varpi', \ldots > 0),$$

et, à tout entier n premier avec k, fait correspondre les indices

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \gamma',\quad \ldots,$$

définis par les congruences

$$(12)\qquad \begin{cases} n \equiv (-1)^\alpha 5^\beta & (\mathrm{mod}\, 2^\lambda),\\ n \equiv g^\gamma & (\mathrm{mod}\, p^\varpi),\\ n \equiv g'^{\gamma'} & (\mathrm{mod}\, p'^{\varpi'}),\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

(¹) Hurwitz, *loc. cit.*, p. 93.

(²) Cahen, *loc. cit.*, nᵒˢ 47, 53.

(³) *Abhandlungen der Berl. Acad.*, 1837; traduit par Terquem, *Journal de Liouville*, 1ʳᵉ série, t. IV, 1839. Nous nous conformons aux notations employées dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie*, éditées par Dedekind, édition de 1863, supplément VI.

où g, g', ... sont des racines primitives pour les modules respectifs p^ϖ, $p'^{\varpi'}$, ... Les nombres α et β sont ainsi définis aux modules a et b près : les nombres a et b ayant tous deux la valeur 1, si $\lambda = 0, 1$, et prenant les valeurs $a = 2$, $b = \frac{1}{2}\varphi(2^\lambda)$, si $\lambda \geqq 2$. Pareillement, les nombres γ, γ', ... sont définis relativement aux modules

$$c = \varphi(p^\varpi), \qquad c' = \varphi(p'^{\varpi'}), \qquad \ldots,$$

où φ est la fonction bien connue qui exprime combien il y a de nombres premiers à un entier donné et inférieurs à lui.

Réciproquement, la connaissance des indices α, β, γ, γ', ... fait connaître le nombre n, au module k près. Autrement dit, aux $\varphi(k)$ valeurs de n premières avec k et incongrues entre elles suivant le module k correspondent, d'une façon univoque, les

$$abcc'\ldots = \varphi(k),$$

systèmes de valeurs de α, β, γ, γ', ... incongrus entre eux suivant les modules a, b, c, c', ...

Désignant par θ, η, ω, ω', ... respectivement une racine $a^{\text{ième}}$, une racine $b^{\text{ième}}$, une racine $c^{\text{ième}}$, une racine $c'^{\text{ième}}$, ... de l'unité, autrement dit posant

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} \theta &= \pm 1, \\ \eta &= e^{\frac{2i\pi\mu}{b}}, \\ \omega &= e^{\frac{2i\pi\tau}{c}}, \\ \omega' &= e^{\frac{2i\pi\tau'}{c'}}, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

Dirichlet introduit la fonction

$$\psi_\nu(n) = \begin{cases} 0, \text{ si } n \text{ n'est pas premier avec } k; \\ \theta^\alpha \eta^\beta \omega^\gamma \omega'^{\gamma'}\ldots, \text{ si } n \text{ est premier avec } k, \end{cases}$$

α, β, γ, γ', ... étant les indices de n [l'indice ν a pour but de distinguer les unes des autres les $\varphi(k)$ fonctions ψ correspondant aux différents choix possibles des racines θ, η, ω, ω', ...].

Il forme ensuite la série (périodique au sens indiqué ci-dessus)

$$(14) \qquad L_\nu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^{k} \xi_r(s)\,\psi_\nu(r) \qquad [\nu = 1, 2, \ldots, \varphi(k)],$$

égale au produit infini

$$L_\nu(s) = \prod \frac{1}{1 - \frac{\psi_\nu(q)}{q^s}}, \tag{15}$$

dans lequel q doit être remplacée successivement par tous les nombres premiers.

Les séries L_ν se répartissent en trois catégories : la première comprend une seule série L_1, celle qui correspond à

$$\theta = \eta = \omega = \omega' = \ldots = 1;$$

la seconde comprend toutes les séries L, pour lesquelles les nombres θ, η, ... sont égaux à $+1$ ou à -1 (à l'exception de L_1); la troisième, les séries correspondant aux cas où l'un au moins de ces nombres est imaginaire. Ces dernières sont conjuguées deux à deux; la série

$$L_\nu(s) = \sum \xi_r(s)\,\psi_\nu(r),$$

déduite des racines θ, η, ω, ω', ..., est conjuguée de la série

$$L_{\nu'}(s) = \sum \frac{\xi_r(s)}{\psi_\nu(r)},$$

déduite des racines $\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\eta}, \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega'}, \ldots$.

La série L_1 admet, comme seule singularité, le pôle simple $s = 1$. Quant aux autres séries L, elles sont holomorphes dans tout le plan $\left(\text{parce que la somme } \frac{1}{k}\sum \psi_\nu(r) \text{ des résidus au point } s = 1 \text{ est nulle}\right)$. Dirichlet démontre qu'elles sont toutes différentes de 0 pour $s = 1$.

9. De la relation générale (10), M. Hurwitz a pu déduire que certaines séries de seconde catégorie se reproduisent, à un facteur près, par le changement de s en $(1 - s)$ à la façon de la fonction ζ.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème démontré par M. Lipschitz [1], et qui est le suivant : *La série* $L_\nu(s)$ *est (à un facteur exponentiel et trigonométrique près, analogue à celui qui se*

(1) *Journal de Crelle*, t. 105, p. 127-157.

rencontre dans la formule relative à la fonction ζ) changée en sa conjuguée par le changement de s en 1 — *s, sous les conditions suivantes :*

1° $\lambda \geqq 3$, μ *impair;*
2° $\tau \neq p - 1$, *si* $\varpi = 1$; τ *non divisible par* p, *si* $\varpi > 1$;
3° $\tau' \neq p' - 1$, *si* $\varpi' = 1$; τ' *non divisible par* p', *si* $\varpi' > 1$; ....

Ce théorème nous fournit un renseignement important sur la distribution des zéros de $L_\nu(s)$. Puisque cette fonction n'a aucun zéro imaginaire dont la partie réelle soit plus grande que s, elle n'en a non plus aucun dont la partie réelle soit négative : les zéros imaginaires sont compris dans la même bande que ceux de $\zeta(s)$. Ils sont même, comme ceux de $\zeta(s)$, disposés symétriquement par rapport à la droite $\mathcal{R}(s) = \frac{1}{2}$, puisqu'à tout zéro α correspond un zéro α' (différent ou non du premier) tel que α et $1 - \alpha'$ soient imaginaires conjugués.

Toutefois, cette conclusion n'est pas encore démontrée dans les cas où la relation de Lipschitz ne s'applique pas; mais on ramène ces cas aux autres par les remarques suivantes :

1° Si une racine ω, par exemple, est égale à 1, on aura

$$L_\nu(s) = [1 - \psi'_\nu(p)p^{-s}]\, L'_\nu(s),$$

la série L'_ν étant composée en partant du nombre k supposé débarrassé du facteur p^ϖ. La même circonstance se produit pour le facteur 2 lorsque l'exposant λ est égal à 1.

2° Si l'entier τ est divisible par p^h, la série peut se composer en partant de l'entier k, divisé par p^h, la racine primitive g de p^ϖ étant une racine primitive de $p^{\varpi-h}$. La nouvelle valeur de τ ne contiendra plus p en facteur. Il en est de même pour le facteur 2 lorsque l'entier μ est pair, et aussi lorsque $\lambda = 2$, $\theta = 1$.

3° Le raisonnement de l'auteur est encore valable pour $\lambda = 2$, $\theta = -1$, en prenant pour l'expression (¹) $\left(\theta, \psi; e^{\frac{2ri\pi}{2^\lambda}}\right)$ la valeur

$$e^{\frac{2ri\pi}{4}} + \theta e^{\frac{-2ri\pi}{4}}.$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 144, formule (9). M. Lipschitz désigne par la lettre ψ la quantité que nous nommons η.

Notre conclusion est donc établie pour toutes les séries L_ν. On pourrait dès lors développer, sur la distribution des zéros de L_ν, une théorie analogue à celle de M. von Mangoldt ([1]). La seule remarque sur laquelle se fonde cet auteur, outre les propriétés communes à $\zeta(s)$ et aux séries L_ν, est que l'argument de $\zeta(s)$ reste fini lorsque le point d'affixe s décrit la droite $\mathfrak{R}(s) = a > 1$. Or, cette propriété appartient également aux fonctions L_ν. On pourrait donc compléter l'analyse présentée à cet égard ([2]) par Piltz.

10. L'équation fondamentale utilisée par Dirichlet pour la démonstration de son théorème, est

$$(16) \qquad \sum_\nu \frac{\log L_\nu(s)}{\psi_\nu(m)} = \varphi(k)\left(\sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2}\sum{}' \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3}\sum{}'' \frac{1}{q^{3s}} + \ldots\right),$$

où m est un entier quelconque premier avec k et où les signes $\sum$, $\sum'$, $\sum''$, $\ldots$, s'étendent, le premier aux nombres premiers q tels que $q \equiv m \pmod{k}$, le second aux nombres premiers q tels que $q^2 \equiv m \pmod{k}$, etc. Pour $m = 1$, ceci donne

$$\log \prod_\nu L_\nu(s) = \varphi(k)\left(\sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2}\sum{}' \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3}\sum{}'' \frac{1}{q^{3s}} + \ldots\right).$$

Donc *les séries de Dirichlet n'ont aucun zéro sur la droite* $\mathfrak{R}(s) = 1$, car la fonction $\prod_\nu L_\nu(s)$ satisfait aux conditions énumérées au n° 5.

II. — Conséquences arithmétiques.

11. Nous sommes bien loin, comme on le voit, d'avoir démontré l'assertion de Riemann-Stieltjes; nous n'avons même pas pu exclure l'hypothèse d'une infinité de zéros de $\zeta(s)$ s'approchant indéfiniment de la droite limite. Cependant le résultat auquel nous sommes parvenu suffit, à lui seul, pour démontrer les principales consé-

---

([1]) *Journal de Crelle*, t. 114.

([2]) *Habilitationschrift*, Iéna, 1884.

quences arithmétiques que l'on a, jusqu'ici, essayé de tirer des propriétés de $\zeta(s)$.

Tout d'abord on peut remarquer que l'équation

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \log(s-1) + \text{quantité finie}$$

fournit déjà quelques renseignements sur la distribution des nombres premiers. Soit, en effet, a un nombre plus grand que 1, et désignons par N_λ le nombre des nombres premiers compris entre a^λ et $a^{\lambda+1}$. Le premier membre de l'équation précédente est compris entre $\sum_\lambda \frac{N_\lambda}{a^{\lambda s}}$ et $\sum_\lambda \frac{N_\lambda}{a^{(\lambda+1)s}}$. En posant $\frac{1}{a^{s-1}} = x$ et remarquant que $s-1 = \frac{\log\frac{1}{x}}{\log a}$ peut être ici remplacé par $1-x$, on peut écrire, à une quantité finie près, pour x plus petit que 1, mais tendant vers 1

$$\sum \frac{N_\lambda}{a^\lambda} x^\lambda > \log(1-x) > \frac{x}{a} \sum \frac{N_\lambda}{a^\lambda} x^\lambda,$$

d'où l'on déduit que, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, on aura une infinité de fois

$$N_\lambda > \frac{(1-\varepsilon)\,a^\lambda}{\lambda}$$

et une infinité de fois

$$N_\lambda < \frac{(1+\varepsilon)\,a^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

conclusions analogues à celles que donne, par exemple, M. Poincaré dans son *Mémoire sur l'extension aux nombres premiers complexes des inégalités de M. Tchebicheff* (¹), et qui suffiraient, comme elles, à établir que si le rapport d'un nombre x à la somme des logarithmes des nombres premiers plus petits que lui a une limite, cette limite ne peut être que 1.

D'autres inégalités pourraient sans doute être tirées de ce fait que, quel que soit le nombre réel t différent de 0, la quantité $\sum \frac{1}{p^s} \cos(t \log p)$ reste finie lorsque s tend vers 1.

(¹) *Journal de M. Jordan*, 4ᵉ série, t. VIII, 1892.

12. Dans son Mémoire précédemment cité, M. Cahen présente une démonstration du théorème énoncé par Halphen : *La somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x.* Toutefois son raisonnement dépend de la proposition de Stieltjes sur la réalité des racines de $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)=0$. Nous allons voir qu'en modifiant légèrement l'analyse de l'auteur on peut établir le même résultat en toute rigueur.

A cet effet, au lieu de partir de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^z}{z}\,dz$, égale à 1 ou à 0 suivant que x est plus grand ou plus petit que 1, nous considérerons l'intégrale plus générale

$$J_\mu=\frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^z}{z^\mu}\,dz.$$

Dans cette intégrale, comme dans la première, x est une quantité positive ainsi que a; μ est positif.

Lorsque μ est un entier, cette intégrale s'évalue par les mêmes méthodes que J, ou s'en déduit par une intégration par parties, déduite de l'identité

$$\frac{1}{z^\mu}=\frac{(-1)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\frac{d^{\mu-1}}{dz^{\mu-1}}\left(\frac{1}{z}\right).$$

La partie tout intégrée disparaît à l'infini et il vient

$$J_\mu=\begin{cases}0, & \text{si } x<1,\\ \dfrac{1}{\Gamma(\mu)}\log^{\mu-1}x, & \text{si } x>1.\end{cases}\tag{17}$$

La même formule peut se démontrer pour μ non entier, auquel cas il est entendu que z^μ doit recevoir la détermination qui est réelle et positive pour $z=0$. Pour $x<1$, on intégrera le long d'un rectangle ayant un de ses côtés sur la droite $\mathfrak{R}(z)=a$ et situé dans la région $\mathfrak{R}(z)>a$, le second côté du rectangle augmentant indéfiniment comme la puissance $\mu'^{\text{ième}}$ $(0<\mu'<\mu)$ du premier. Le résultat est alors évident.

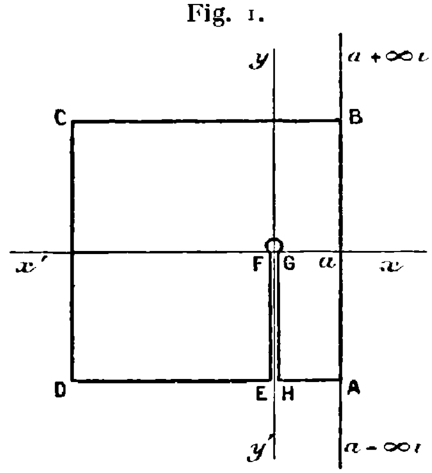
Pour $x>1$, on commencera par supposer $\mu<1$. On intégrera alors le long d'un contour ABCDEFGHA (*fig.* 1) composé encore d'un rectangle ayant un côté AB sur la droite $\mathfrak{R}(z)=a$, mais situé dans la région $\mathfrak{R}(z)<a$ et interrompu sur son côté DA par

un lacet qui va à l'origine et en revient en suivant la partie négative de l'axe imaginaire. Si le côté BC augmente indéfiniment comme la puissance $\mu'^{\text{ième}}$ $(0 < \mu' < \mu)$ de AB, l'intégrale prise le long des côtés qui s'éloignent à l'infini disparaît et il reste

$$J_\mu = \frac{1}{2i\pi} \lim \left(\int_{HG} + \int_{FE} \right).$$

Or, sur le chemin HG, l'argument de z est $-\frac{i\pi}{2}$, et, sur le

Fig. 1.



chemin FE, $\frac{3i\pi}{2}$. Il vient donc bien

$$J_\mu = \frac{\left(e^{\frac{\mu i\pi}{2}} - e^{-\frac{3\mu i\pi}{2}}\right)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x^{-it}\,dt}{t^\mu}$$

$$= -\frac{e^{-\frac{\mu i\pi}{2}} \sin\mu\pi}{i\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(t\log x) - i\sin(t\log x)}{t^\mu}\,dt = \frac{\log^{\mu-1} x}{\Gamma(\mu)}.$$

Cette formule, établie pour $\mu < 1$, s'étendra au cas de $\mu > 1$ par une intégration par parties déduite de l'identité

$$\frac{1}{z^{\mu+m}} = \frac{(-1)^m \Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+m)} \frac{d^m}{dz^m} \frac{1}{z^\mu}.$$

13. Parallèlement à la voie suivie par M. Cahen, nous appliquerons la formule (17) à l'intégrale

$$(18) \qquad \psi_\mu(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z}{z^\mu} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz,$$

où a est un nombre quelconque plus grand que 1. En vertu du développement

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_p \log p\left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots\right),$$

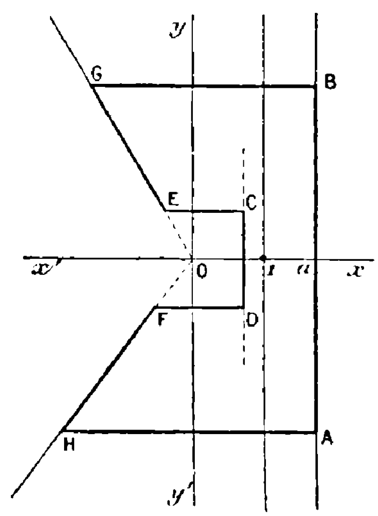
notre formule donne

$$(19) \qquad \psi_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum \log p \log^{\mu-1}\frac{x}{p} + \sum{}' \log p \log^{\mu-1}\frac{x}{p^2} + \ldots\Big),$$

le signe $\sum$ s'étendant aux nombres premiers plus petits que x, le signe $\sum'$ aux nombres premiers plus petits que $x^{\frac{1}{2}}$, etc.

14. L'avantage que nous trouvons à prendre $\mu > 1$ réside dans la convergence de la série $\frac{1}{|\alpha|^\mu}$, où α désigne successivement les zéros de $\zeta(z)$, convergence sur laquelle reposent, comme nous allons le voir, les raisonnements qui vont suivre.

Fig. 2.



Dans ces conditions, en effet, nous pouvons séparer de l'ensemble des racines α un nombre M de ces quantités assez grand pour que la somme $\sum \frac{1}{|\alpha|^\mu}$, étendue aux racines restantes, soit plus petite qu'un nombre positif quelconque ε. Aucun des α n'ayant sa partie réelle égale à 1, nous pourrons (*fig.* 2) tracer une parallèle CD à l'axe imaginaire, laissant à sa droite la parallèle $\mathcal{R}(z) = 1$ et à sa gauche les M premières racines α. Des points C, D de cette droite, nous ferons partir des parallèles CE, DF à l'axe réel, parallèles comprenant entre elles les M racines en question, ne passant par aucune autre racine, et que nous prolongerons jusqu'à rencontre en E, F respectivement avec deux droites OEG, OFH issues de l'origine et situées respectivement dans les deux angles formés par la partie négative de l'axe réel avec les deux directions de l'axe imaginaire. Enfin, nous fermerons le contour d'intégration ABGECDFHA (*fig.* 2) par deux parallèles variables BG, AH à l'axe réel (parallèles comprenant, bien entendu, CE et DF entre elles), rejoignant en A, B la droite $\mathcal{R}(z) = a$.

15. Je dis, en premier lieu, que l'on peut éloigner les parallèles BG, AH à l'infini, de telle façon que la partie de l'intégrale ψ_μ relatives à ces droites tendent vers zéro.

On peut suivre pour cela une marche analogue à celle qui est exposée dans mon Mémoire sur les propriétés des fonctions entières [1]. La méthode qui va suivre diffère légèrement de celle-là; elle me paraît plus avantageuse.

Soit A un nombre plus grand que l'unité. Traçons des parallèles à l'axe réel à des distances de cet axe représentées par $A^3, A^6, \ldots, A^{3\lambda}, \ldots$. Le nombre [2] des racines α, dont les coordonnées sont comprises entre $A^{3\lambda}$ et $A^{3\lambda+3}$ est au plus égal à $K\lambda A^{3\lambda}$, le nombre K étant fini [3], et il en sera de même *a fortiori* de l'intervalle $(A^{3\lambda+1}, A^{3\lambda+2})$; de sorte que si l'on range les racines α par ordre de coefficients de i croissants, il en existera au moins deux consécutives pour lesquelles les coefficients de i différeront d'une quantité supérieure à $\dfrac{A^{3\lambda+2} - A^{3\lambda+1}}{K\lambda A^{3\lambda}} = \dfrac{A(A-1)}{K\lambda}$.

---

(1) *Loc. cit.*, n° 29 et suiv.

(2) Chaque racine est, bien entendu, comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

(3) Il est clair qu'on peut se dispenser des précautions que nous prenons ici en utilisant les résultats obtenus par M. von Mangoldt sur la distribution des quantités α; la méthode du texte a l'avantage de s'appliquer chaque fois qu'on connaît le genre de la fonction étudiée.

Nous tracerons, à égale distance de ces deux racines, une parallèle à l'axe réel dont l'ordonnée sera désignée par z_0, et cette ordonnée aura, avec celle de toute racine α, une différence supérieure à $\frac{A(\lambda-1)}{2K\lambda}$.

Or, on a

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_\alpha \left(\dfrac{1}{z-\alpha} + \dfrac{1}{\alpha}\right) - \sum_\beta \left(\dfrac{1}{z-\beta} + \dfrac{1}{\beta}\right) - \dfrac{1}{z} + C \\ \qquad = \sum_\alpha \dfrac{z}{\alpha(z-\alpha)} - \sum_\beta \dfrac{z}{\beta(z-\beta)} - \dfrac{1}{z} + C, \end{cases}$$

les α désignant les zéros, les β les pôles (réels et négatifs) de ζ, et C étant une constante. Lorsque z varie sur le segment BG de la parallèle d'ordonnée z_0, le rapport $\frac{z-\beta}{\beta}$ reste supérieur à un nombre fixe, indépendant de β, et il en est de même pour le rapport $\frac{z-\alpha}{\alpha}$, si l'ordonnée de α est extérieure à l'intervalle $(A^{3\lambda}, A^{3\lambda+3})$. Les parties correspondantes du second membre de l'équation (20) donnent donc le produit de z par une somme finie $\left(\text{puisque les sommes } \sum \frac{1}{\alpha^2}, \sum \frac{1}{\beta^2} \text{ sont finies}\right)$.

Quant aux termes correspondant aux racines α comprises entre les parallèles d'ordonnées $A^{3\lambda}$ et $A^{3\lambda+3}$, elles donneront, d'après ce qui a été dit plus haut, une somme moindre que $K\lambda A^{3\lambda}\frac{2K\lambda A^3}{A(\lambda-1)}$, quantité de la forme $K'z_0 \log z_0$ (où K' est un nouveau nombre fini).

On aura donc

$$\left|\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| < K'z_0 \log z_0;$$

d'où en reportant dans notre intégrale

$$\left|\int_{BG} \frac{x^z}{z^\mu}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz\right| < \frac{K'\log z_0}{z_0^{\mu-1}}\int x^z\,|\,dz,$$

quantité infiniment petite pour z_0 infini.

16. L'intégrale prise le long de la droite indéfinie AB peut donc être remplacée par l'intégrale prise le long du contour indé-

fini HFDCEG, augmentée de la somme des résidus relatifs au pôle $z = 1$ et aux zéros α non compris entre les parallèles CE, DF.

Le résidu relatif au pôle $z = 1$ est $-x$.

Les résidus relatifs aux zéros de α non compris entre CE et DF ont une somme moindre que εx, où ε a été choisi aussi petit qu'on veut, et cela indépendamment de x.

Quant à l'intégrale prise le long du contour HFDCBG, elle est infiniment petite relativement à x. Cela est évident pour la partie finie FDCE, où il suffit de remarquer que $\frac{1}{z^\mu}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ est fini. Sur les parties infinies EG, FH, les rapports $\left|\frac{z-\alpha}{\alpha}\right|$, $\left|\frac{z-\beta}{\beta}\right|$ sont supérieurs à un nombre fixe, et, par conséquent, la quantité $\left|\frac{1}{z}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right|$ est finie. L'intégrale sur un de ces chemins est donc moindre que $K\int\left|\frac{x^z}{z^{\mu-1}}\right||dz|$ (le nombre K étant fini), c'est-à-dire qu'une quantité finie, décroissante quand x croît.

$\psi_\mu(x)$ est donc asymptotique à x, car, pour rendre la différence $[x - \psi_\mu(x)]$ moindre que ηx, il suffira de choisir $\varepsilon < \frac{\eta}{2}$, puis x assez grand pour que l'intégrale $\int_{\text{HFDCEG}}$ soit inférieure à $\frac{\eta}{2}x$.

17. Dans l'expression (19) de $\psi_\mu(x)$, nous ferons abstraction des termes compris sous les signes $\sum$ autres que le premier. Le nombre de ces signes est, en effet, moindre que $\frac{\log x}{\log 2}$, et la plus grande des sommes correspondantes est la première, inférieure elle-même à $\log\Gamma\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)\log^{\mu-1}x$, par conséquent (à un facteur fini près) à $x^{\frac{1}{2}}\log^{\mu+1}x$. Nous négligeons donc une quantité moindre que $x^{\frac{1}{2}}\log^{\mu+1}x$; et le résultat obtenu ci-dessus peut s'énoncer ainsi : *la somme* $\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum\log p\log^{\mu-1}\frac{x}{p}$, *étendue aux nombres premiers inférieurs à* x, *est asymptotique à* x.

Ce résultat (où il est entendu que nous devons supposer $\mu > 1$) diffère de l'énoncé d'Halphen : *la somme des logarithmes des nombres* *premiers inférieurs à x est asymptotique à x.* Nous allons voir qu'il le comprend comme cas particulier.

18. Pour cela, prenons $\mu = 2$, ce qui donne

$$\sum_0^x \log p \log \frac{x}{p} = x(1+\eta),$$

η étant (pour x assez grand) inférieur en valeur absolue à tel nombre qu'on voudra.

Dans cette relation, changeons x en $x(1+h)$ et retranchons membre à membre : il vient

$$\sum_0^x \log p \log(1+h) + \sum_x^{x(1+h)} \log p \log \frac{x(1+h)}{p} = x(h+\eta),$$

égalité dans laquelle le signe $\sum_\alpha^\beta F(p)$ désigne la somme des valeurs de la fonction F pour les nombres premiers compris entre α et β.

Pour les nombres premiers qui figurent sous le second signe $\sum$, la quantité $\frac{x(1+h)}{p}$ est comprise entre 1 et $1+h$: on peut donc écrire, en divisant par $\log(1+h)$,

$$(21) \qquad \sum_0^x \log p < x\frac{(h+\eta)}{\log(1+h)},$$

$$\sum_0^{x(1+h)} \log p > x\frac{(h+\eta)}{\log(1+h)}.$$

Dans cette dernière, nous changerons x en $\frac{x}{1+h}$: elle deviendra

$$(22) \qquad \sum_0^x \log p > x\frac{h+\eta}{(1+h)\log(1+h)}.$$

Les formules (21) et (22) démontrent l'énoncé d'Halphen. On voit, en effet, que $\sum_0^x \log p$ sera compris entre $x(1+\rho)$ et $x(1-\rho)$, si l'on a choisi h tel que

$$1-\frac{\rho}{2}<\frac{h}{(1+h)\log(1+h)}<\frac{h}{\log(1+h)}<1+\frac{\rho}{2},$$

puis x assez grand pour que $\eta < \frac{\rho}{2}\log(1+h)$.

19. Les résultats qui précèdent s'étendent d'eux-mêmes aux séries de Dirichlet. On considérera l'intégrale

$$(23)\qquad -\frac{1}{2i\pi}\int_{AB}\left[\sum_{\nu}\frac{1}{\psi_\nu(m)}\frac{L'_\nu(z)}{L_\nu(z)}\right]\frac{x^z}{z^\mu}\,dz$$

où μ est un nombre plus grand que 1, les autres lettres ayant le même sens que dans les n^os 8-10. Cette intégrale représente, à une quantité près infiniment petite relativement à x, le produit de $\varphi(k)$ par la somme des logarithmes des nombres premiers q congrus à m, suivant le module k et plus petits que x, multipliés respectivement par les valeurs correspondantes de $\log^{\mu-1}\frac{x}{q}$.

Or, on peut raisonner sur cette intégrale exactement comme nous l'avons fait sur l'intégrale (18), car les propriétés de $\zeta(s)$, que nous avons utilisées et qui sont relatives à la distribution des zéros et au genre, ont été démontrées pour les séries de Dirichlet. La quantité qui figure sous le signe $\int$ dans l'intégrale (23) a pour pôle simple $z=1$, pôle de $\frac{L'_1(z)}{L_1(z)}$, et le résidu correspondant $-\frac{x}{\psi_1(m)}=-x$; les résidus relatifs aux autres pôles donnent une somme qu'on peut considérer comme négligeable vis-à-vis de x, ainsi que l'intégrale prise le long du contour GECDFH, comme il a été expliqué.

Donc l'intégrale (23) est asymptotique à x. En suivant la même marche qu'au numéro précédent nous reconnaissons que *la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x et compris dans une progression arithmétique déterminée de raison k est asymptotique à* $\frac{x}{\varphi(k)}$.

L'équation générale

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{0}^{x}\log q \log^{\mu-1}\frac{x}{q}=\frac{x}{\varphi(k)}(1+\rho)$$

qui, comme nous venons de le voir, comprend la relation correspondant à $\mu = 1$, ne paraît pas pouvoir se déduire inversement de celle-ci; il serait intéressant de rechercher quels renseignements cette équation fournit sur l'ordre de grandeur de ρ, c'est-à-dire de l'erreur commise en remplaçant $\sum_{0}^{x}\log q$ par sa valeur asymptotique.

20. En terminant, je signalerai l'application possible de la même méthode aux séries de Weber [1] et de Meyer [2], par lesquelles on étend le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique aux formes quadratiques. Une fois démontré que ces séries sont uniformes, la relation [3], analogue à celle donnée précédemment au n° 10, prouvera qu'elles ne s'annulent pas sur la droite $\mathfrak{R}(s) = 1$.

Dans le cas où le déterminant est négatif, et où l'on considère la forme quadratique seule (sans faire intervenir de progression arithmétique), une formule donnée par Weber [4] fournit la démonstration demandée; en même temps, elle fait connaître le genre de ces séries et fournit la relation correspondant au changement de s en $1 - s$. Les méthodes exposées dans le présent Mémoire sont donc dès à présent applicables à ce cas particulier.

Nota. — Pendant la correction des épreuves, je reçois communication des recherches que M. de La Vallée-Poussin consacre au même sujet dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* [5]. Nos raisonnements, trouvés d'une façon indépendante, ont quelques

(1) *Math. Annalen*, t. XX, p. 301.
(2) *Journal de Crelle*, t. 103, p. 98; *cf.* Bachmann, *Analytische Zahlentheorie*, Ch. X (Teubner, Leipzig, 1894).
(3) Bachmann, *loc. cit.*, p. 291, ligne 6, formule (34).
(4) Bachmann, *loc. cit.*, p. 302, ligne 4.
(5) Tome XX, 2e Partie, 1896.

points communs : il est remarquable, en particulier, de constater que M. de La Vallée-Poussin a été conduit, lui aussi, à employer comme intermédiaire le fait que la fonction ζ n'a pas de racine de la forme $1 + ti$, quoique les procédés de démonstration soient tout à fait différents. Je crois qu'on ne refusera pas à ma méthode l'avantage de la simplicité.

Les critiques, adressées par M. de La Vallée-Poussin aux démonstrations fondées sur l'emploi de l'intégrale $\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^z \frac{dz}{z}$, n'intéressent point la nôtre, fondée sur l'intégrale

$$\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z\, dz}{z^\mu} \; (\mu > 1),$$

grâce au fait que cette dernière garde un sens, même lorsqu'on remplace chaque élément par son module.

UNE PROPRIÉTÉ DE LA FONCTION $\zeta(s)$

ET

DES SÉRIES DE DIRICHLET

(*Congrès de l'Association française pour l'Avancement des sciences*, La Rochelle, 1928.)

Les travaux de M. Landau et de ses continuateurs [1], parmi lesquels il faut nommer en première ligne M. W. Schnee, ont, comme on le sait, notablement précisé et étendu les conditions de validité d'une formule, analogue à celle de Parseval, obtenue précédemment par nous [2] et permettant de multiplier terme à terme deux séries de Dirichlet de la forme la plus générale

$$(1)\qquad \begin{cases} f(s)=\sum_n b_n e^{-\lambda_n s}, \\ g(s)=\sum_n c_n e^{-\lambda_n s}. \end{cases}$$

Cette formule s'écrit

$$(2)\qquad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{+\omega} f(\beta+ti)\, g(\gamma-ti)\, dt = \sum_n b_n c_n e^{-\lambda_n(\beta+\gamma)},$$

où β, γ sont deux nombres réels ou même complexes, de parties réelles convenablement choisies. (Les travaux auxquels nous avons fait allusion tout à l'heure ont eu précisément pour objet d'étendre

(1) *Voir* le Traité classique de M. LANDAU : *Lehrbuch über die Verteilung der Primzahlen*, t. II, nos 221 et suiv.

(2) *Acta Mathematica*, t. XXII, 1899, p. 55-63.

le résultat, non seulement au cas où l'une des abscisses β, γ appartient au domaine de convergence simple de la série correspondante, l'autre étant dans le domaine de convergence absolue, mais même à certains cas où, de part et d'autre, il n'y a que convergence simple.)

Mon intention n'est d'ailleurs pas d'aller plus loin dans la voie déjà si remarquablement parcourue, mais d'attirer l'attention sur une particularité intéressante qui se présente lorsque, pour la seconde des séries (1), on prend l'expression bien connue

$$(3) \qquad g(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_m \sum_p \frac{\log p}{p^{ms}} \qquad (m = 1, 2, \ldots; p = 2, 3, 5, \ldots).$$

Soit, d'abord, $f(s)$ pris lui-même simplement égal à $\zeta(s)$. On voit immédiatement que l'on a (sous les conditions de validité de la formule)

$$(4) \qquad -\frac{\zeta'(\beta+\gamma)}{\zeta(\beta+\gamma)} = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\zeta'}{\zeta}(\beta+ti)\,\zeta(\gamma-ti)\,dt.$$

Ce résultat peut être considéré comme un simple cas particulier du fait général que toute fonction représentée par une série de la forme $\sum \frac{b_n}{n^s}$ se reproduit purement et simplement lorsqu'on la « compose », par la formule (2), avec $\zeta(s)$. Mais il exprime aussi une propriété fonctionnelle appartenant à la fonction $\zeta(s)$, laquelle figure seule tant dans l'un que dans l'autre membre de la formule.

Mais, au lieu de regarder le premier membre de (3) comme représentant une sorte d'opération fonctionnelle exécutée sur $g(s)$ à l'aide de la fonction $f(s) = \zeta(s)$, on peut se placer au point de vue inverse et, dans ces conditions, la formule se généralise d'une manière remarquable en prenant, pour $f(s)$, l'une quelconque des séries « spéciales » de Dirichlet

$$(5) \qquad L(s, \chi) = \sum \frac{\chi(n)}{n^s}$$

à l'aide desquelles l'illustre géomètre a démontré son célèbre théorème sur la progression arithmétique. La seconde fonction introduite dans (2) étant encore $g(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, il vient

$$-\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} L(\beta+ti, \chi)\frac{\zeta'}{\zeta}(\gamma-ti)\,dt = \sum_m \sum_p \frac{\chi(p^m)\log p}{p^{m(\beta+\gamma)}},$$

c'est-à-dire, comme on sait,

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} L(\beta + ti, \chi) \frac{\zeta'}{\zeta}(\gamma - ti)\, dt = \frac{L'(\beta + \gamma, \chi)}{L(\beta + \gamma, \chi)},$$

relation qui, comme on le voit, lie les séries (5) à la fonction de Riemann.

Bien qu'il m'ait été jusqu'ici impossible d'en tirer aucun progrès positif, une telle relation me semble digne de l'attention de ceux qui s'intéressent à la théorie analytique des nombres premiers. Je ne saurais dire, quant à présent, dans quelle mesure elle peut conduire à un prolongement analytique des fonctions qui y figurent ni dans quelle mesure elle les caractérise. Il serait également intéressant de rechercher moyennant quelles modifications elle pourrait s'étendre aux autres transcendantes analogues que les divers chapitres de la théorie ont successivement introduites [1].

---

[1] *Note du Comité de rédaction :* Il nous a semblé utile de reproduire ce travail dans lequel on trouve encore un exemple de l'art avec lequel M. Hadamard soulève des questions nouvelles.

RÉSOLUTION

D'UNE

QUESTION RELATIVE AUX DÉTERMINANTS

(*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 17, 1893, 1re partie.)

1. Étant donné un déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix},$$

dans lequel on sait que les éléments sont inférieurs en valeur absolue à une quantité déterminée A, il y a souvent lieu de chercher une limite que le module de Δ ne puisse dépasser.

On voit immédiatement que Δ est inférieur à $1.2.3\dots n A^n$. Mais il est clair que cette limite est trop élevée; car elle ne pourrait être atteinte que si tous les termes du déterminant avaient le même signe, ce qui est manifestement impossible.

Je me propose en conséquence de rechercher le maximum du déterminant Δ dans les conditions indiquées.

2. Sans rien supposer d'abord sur les modules des éléments $a_1, \dots,$ $b_1, \dots,$ désignons par $a_1^0, \dots, b_1^0, \dots$ leurs conjugués dont le déterminant Δ_0 sera le conjugué de Δ. Prenons, dans le déterminant Δ, p lignes quelconques pour en former un tableau rectangulaire (T), (T_0) étant le tableau correspondant du déterminant Δ_0; considérons

le produit

$$P_p = (T)(T_0).$$

Si $p = n$, ce produit donnera $\Delta\Delta_0$, c'est-à-dire le carré du module de Δ; pour $p < n$, il fournira de même la somme des carrés des modules des différents déterminants que l'on déduit du tableau (T). Dans tous les cas, la quantité ainsi obtenue sera essentiellement réelle et positive [1].

Pour former le produit P_p, d'après les règles de la multiplication des déterminants, il faudra multiplier chaque ligne de (T) par chaque ligne de (T_0). Si l'on a choisi deux lignes correspondantes, par exemple les deux lignes de rang h, le résultat s_h donnera la somme des carrés des modules des éléments $a_h, b_h, \ldots, l_h$. Si, au contraire, on a pris deux lignes de rangs différents h et h', on trouvera l'expression

$$s_{h,h'} = a_h a_{h'}^0 + b_h b_{h'}^0 + \ldots + l_h l_{h'}^0. \tag{2}$$

Nous remarquerons que $s_{h,h'}$ est conjugué de $s_{h',h}$.

Les quantités s_h et $s_{h,h'}$ seront les éléments du déterminant P_p. Si, par exemple, les lignes qui composent le tableau (T) sont les p premières, on aura

$$P_p = \begin{vmatrix} s_1 & s_{1,2} & \ldots & s_{1,p} \\ s_{2,1} & s_2 & \ldots & s_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{p,1} & s_{p,2} & \ldots & s_p \end{vmatrix},$$

et, si nous isolons la partie qui contient en facteur un élément principal, le dernier par exemple, nous pouvons écrire

$$P_p = s_p P_{p-1} + Q_p, \tag{3}$$

où Q_p sera le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_{1,2} & \ldots & s_{1,p-1} & s_{1,p} \\ s_{2,1} & s_2 & \ldots & s_{2,p-1} & s_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{p-1,1} & s_{p-1,2} & \ldots & s_{p-1} & s_{p-1,p} \\ s_{p,1} & s_{p,2} & \ldots & s_{p,p-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

(1) Nous n'avons pas à prendre en considération le cas de $P_p = 0$, le déterminant Δ étant alors nul et, par suite, ne présentant aucun intérêt dans la question actuelle.

Le mineur de ce déterminant, relatif à la $h^{\text{ième}}$ ligne et à la $h'^{\text{ième}}$ colonne, étant désigné par $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, h')}$, nous constatons que les mineurs principaux sont des expressions Q_{p-1} sauf le dernier qui est une expression P_{p-1}. Quant aux autres mineurs, nous remarquerons seulement que $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, h')}$ est conjugué de $\frac{\partial Q_p}{\partial(h', h)}$.

3. Cela posé, il est facile de démontrer que le déterminant Q_p est négatif ou nul, le dernier cas ne pouvant se présenter que si tous les éléments de la dernière colonne sont égaux à zéro.

Il suffit pour cela (h étant un quelconque des nombres 1, 2, ..., $p-1$) de considérer les quatre mineurs $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, h)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(p, p)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, p)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(p, h)}$. L'identité bien connue qui existe entre ces mineurs nous donne une relation de la forme

$$Q_p P_{p-2} = Q_{p-1} P_{p-1} - \left[\frac{\partial Q_p}{\partial(h, p)}\right]^2.$$

Les P étant positifs, nous voyons donc bien que Q_p est nécessairement négatif ou nul si cette conclusion a été démontrée par Q_{p-1}. Nous pouvons dès lors l'admettre pour toute valeur de p, car elle est évidente pour Q_1, égal à o, et Q_2, égal à $-|s_{1,2}|^2$.

De plus, Q_p ne saurait être nul si Q_{p-1} l'est, c'est-à-dire (en admettant toujours que notre conclusion est établie pour Q_{p-1}) si tous les éléments de la dernière colonne sont nuls à l'exception du $h^{\text{ième}}$. Mais comme h est variable dès que p est au moins égal à 3, il ne peut y avoir aucun élément de la dernière colonne différent de zéro.

4. Revenons maintenant au déterminant P_p : nous sommes en mesure d'établir que ce déterminant est inférieur ou au plus égal à son terme principal $s_1 s_2 \ldots s_p$, l'égalité n'ayant lieu que si tous les éléments non principaux sont nuls.

En effet, nous pouvons admettre que le fait est vrai pour P_{p-1}, et dès lors l'équation (3) démontre l'inégalité $P_p < s_1 s_2 \ldots s_p$, puisque Q_p est négatif.

De plus, P_p ne peut être égal à $s_1 s_2 \ldots s_p$ que si, d'une part, P_{p-1} est égal $s_1 s_2 \ldots s_{p-1}$ et que, d'autre part, on ait $Q_p = 0$. D'après ce que nous avons vu plus haut, cette double condition exige que tous les éléments non principaux soient nuls.

En particulier, pour $p = n$, on a

$$|\Delta|^2 \leqq s_1 s_2 \ldots s_n.$$

Lorsque les modules des éléments sont au plus égaux à 1, les s_h ont pour valeur maximum n, et par suite $|\Delta|$ est au plus égal à $n^{\frac{n}{2}}$.

On voit que la valeur maximum du déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre est loin d'augmenter aussi rapidement que le produit $1.2\ldots n$. D'après la formule d'approximation de la fonction Γ, elle croît un peu plus vite que la racine carrée de ce produit.

5. Pour que Δ atteigne son maximum, il faut, en premier lieu, que tous les éléments aient pour module 1; puis que tous les $s_{h,h'}$ soient nuls $(h \neq h')$.

En écrivant l'équation $s_{h,h'} = 0$ pour toutes les valeurs de h', l'entier h restant fixe, on a un système d'équations linéaires et homogènes par rapport aux éléments de la $h^{\text{ième}}$ ligne, d'où résulte que chaque élément est proportionnel à la quantité conjuguée du mineur correspondant. Les formules relatives aux déterminants adjoints montrent même que les mineurs d'ordre k sont proportionnels aux mineurs complémentaires d'ordre $n - k$.

Nous sommes ainsi conduit aux déterminants appelés *inversement orthogonaux* par M. Sylvester [1] et dont un exemple simple est fourni, pour une valeur quelconque de n, par le déterminant de Vandermonde formé avec les racines de l'équation binome $x^n = 1$.

6. Pour $n = 3$, ainsi que l'a encore remarqué M. Sylvester, toutes les autres solutions se réduisent à celle-là, à des changements près que l'on peut appeler insignifiants, à savoir : permutation des lignes ou des colonnes; multiplication de tous les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne par un même facteur. Mais il n'en est plus de même pour les valeurs de n supérieures à 3 et la formation d'un déterminant maximum comporte même beaucoup plus d'arbitraire que ne l'a supposé le géomètre anglais.

---

[1] *Philosophical Magazine*, t. XXXIV, 1867, p. 461-475.

Reprenons en effet la méthode indiquée dans son Mémoire [1] pour construire un déterminant maximum d'ordre $n_1 n_2$ quand on suppose connus deux déterminants maximum Δ_1 et Δ_2 d'ordre n_1 et n_2 respectivement : on écrit n_2^2 fois le déterminant Δ_1, savoir n_2 fois en ligne horizontale sur n_2 fois en ligne verticale, formant ainsi un tableau ($\mathfrak{T}$). Puis dans le déterminant Δ_1 qui occupe dans ce tableau le $h^{\text{ième}}$ rang en ligne horizontale et le $k^{\text{ième}}$ en ligne verticale, on multiplie tous les éléments par l'élément du déterminant Δ_2 dont les indices sont h et k. Le tableau ($\mathfrak{T}$) ainsi modifié donne un déterminant maximum, car les relations $s_{h,k'} = 0$ sont vérifiées.

Mais ces relations ne cessent pas d'avoir lieu si, dans tous les déterminants Δ_1 de la première colonne, on multiplie une ligne déterminée par un certain nombre de module 1. Or, le nouveau déterminant obtenu par cette opération (que l'on peut évidemment varier de plusieurs façons) n'est pas réductible au précédent par les changements insignifiants dont nous avons parlé.

Par exemple, pour $n = 4$, M. Sylvester indique les deux types

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & 1 & i \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Notre méthode conduit au déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & -a \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -a & a \end{vmatrix} \qquad (a = e^{i\theta}),$$

lequel donne bien les déterminants (4) et (5) pour $a = 1$ et $a = i$, mais en est essentiellement distinct pour une valeur quelconque de θ.

[1] P. 465, nº 6.

7. Lorsque n est une puissance de 2, le procédé dont nous venons de parler permet d'obtenir un déterminant maximum à éléments réels. Peut-on trouver de tels déterminants pour d'autres valeurs de n ?

Dans ce cas, chaque élément devra être égal à ± 1, et cela de telle façon que, considérant deux lignes quelconques et comparant les éléments correspondants, il y ait autant de concordances que de discordances de signes [1].

On voit aisément que ceci ne peut avoir lieu que pour n multiple de 4. En effet, si l'on ramène les éléments de la première ligne à être des 1, la seconde ligne devra contenir autant de $+1$ que de -1, ce qui exige déjà que n soit pair : $n = 2n'$. Si l'on suppose alors dans la seconde ligne les n' premiers éléments positifs et les autres négatifs, la somme des n' premiers éléments de la troisième ligne devra être nulle; donc n' doit être à son tour un nombre pair.

D'ailleurs il existe en effet des déterminants maximum réels pour des valeurs de n non puissances de 2. Pour $n = 12$, par exemple, on arrivera au résultat de la façon suivante :

On groupera les colonnes 3 par 3 en quatre séries.

La première ligne étant composée de 1, la seconde comprendra des 1 dans les deux premières séries et des -1 dans les deux dernières; la troisième ligne aura ses quatre séries composées alternativement de $+1$ et de -1. Dans les neuf lignes suivantes, la première et la dernière série comprendront chacune deux éléments positifs et un négatif; la seconde et la troisième deux éléments négatifs et un positif, d'après le Tableau suivant :

1	1	1	1
1	2	2	2
1	3	3	3
2	1	2	3
2	2	3	1
2	3	1	2
3	1	3	2
3	2	1	3
3	3	2	1

les numéros indiquant dans chaque série le rang de l'élément qui est seul de son signe.

---

(1) SYLVESTER, *Échiquier anallagmatique.*

Il existe aussi un déterminant maximum réel pour $n = 20$. Pour l'obtenir, ayant encore partagé les colonnes en quatre séries de cinq chacune, on composera les trois premières lignes comme dans le cas précédent. La quatrième ligne aura, dans la première et la dernière série, tous ses éléments positifs, sauf le premier; dans la deuxième et la troisième, tous ses éléments négatifs, sauf le premier. Chacune des seize lignes qui restent comprendra, dans la première et la dernière série, deux éléments négatifs; dans la deuxième et la troisième, deux éléments positifs, d'après le Tableau suivant :

12	23	23	23
13	23	45	45
14	45	23	45
15	45	45	23
45	12	24	24
45	13	35	35
23	14	24	35
23	15	35	24
35	35	12	25
35	24	13	34
24	35	14	34
24	24	15	25
34	34	34	12
34	25	25	13
25	34	25	14
25	25	34	15

Il y a donc lieu de se demander quelles sont les valeurs de n pour lesquelles existent des déterminants maximum à éléments réels [1].

De plus, on peut rechercher, pour les autres valeurs, quel est le plus grand module que puisse atteindre le déterminant lorsqu'on impose aux éléments la condition d'être réels [2].

---

(1) Les déterminants maximum que nous venons de former pour $n = 12$ et $n = 20$ mettent encore une fois en évidence l'arbitraire que comporte la question actuelle; car il est clair que ces nouveaux déterminants maximum ne peuvent se déduire des procédés donnés au n° 6.

(2) *Note du Comité de rédaction.* Des démonstrations nouvelles du théorème sur le maximum du module d'un déterminant ont été données notamment par Wirtinger (*Bull. des Sci. math.*, 1907, p. 175), Kneser (*Die Integralgleichungen*, 1911, p. 227-231), L. K. Hua (*Tohoku Math. J.*, vol. 41).

BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 199-220
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__199_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA DISTRIBUTION DES ZÉROS DE LA FONCTION $\zeta(s)$ ET SES CONSÉQUENCES ARITHMÉTIQUES (¹);

Par M. HADAMARD.

I. — *Sur les zéros de la fonction ζ et de quelques fonctions analogues.*

1. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann est définie, lorsque la partie réelle de s est plus grande que 1, par l'équation

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \tag{1}$$

où p désigne successivement les différents nombres premiers; les logarithmes sont népériens. Elle est holomorphe dans tout le plan, sauf au point $s = 1$, qui est un pôle simple. Elle ne s'annule pour aucune valeur de s dont la partie réelle soit supérieure à 1, puisque le second membre de l'équation (1) est fini. Mais elle admet une infinité de zéros imaginaires dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Stieltjes avait démontré, conformément aux prévisions de Riemann, que ces zéros sont tous de la forme

(¹) Les résultats fondamentaux du présent Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences, dans la séance du 22 juin 1896.

$\frac{1}{2} + ti$ (le nombre t étant réel); mais sa démonstration n'a jamais été publiée, et il n'a même pas été établi que la fonction ζ n'ait pas de zéros sur la droite[1] $\mathcal{R}(s) = 1$.

C'est cette dernière conclusion que je me propose de démontrer.

2. Faisons d'abord tendre s vers 1 par valeurs réelles et décroissantes. Le logarithme de $\zeta(s)$, ou, à une quantité finie près, la série

$$S = \sum_p \frac{1}{p^s} \tag{2}$$

augmente indéfiniment comme $-\log(s-1)$.

Remplaçons maintenant s par $s + ti$ et imaginons que le point d'affixe $1 + ti$ soit un zéro de ζ. Alors la partie réelle de $\log(s + ti)$, c'est-à-dire (à une quantité finie près) la somme

$$P = \sum_p \frac{1}{p^s} \cos\left(t \log p\right), \tag{3}$$

devra croître indéfiniment par valeurs négatives *comme* $\log(s-1)$, *c'est-à-dire comme* $-S$, lorsque s tendra vers 1 (t restant fixe).

3. Cela posé, soit α un angle que nous supposerons petit; parmi les différents nombres premiers, distinguons deux catégories :

1° Ceux qui satisfont, pour quelque valeur entière de k, à la double inégalité

$$\frac{(2k+1)\pi - \alpha}{t} \leqq \log p \leqq \frac{(2k+1)\pi + \alpha}{t}. \tag{4}$$

Les parties des sommes S_n et P_n [c'est-à-dire des séries (2) et (3) bornées à leurs n premiers termes] correspondant à cette première catégorie de nombres premiers seront désignées par S'_n et P'_n.

2° Les nombres premiers restants, c'est-à-dire ceux qui ne

[1] $\mathcal{R}(s)$ désigne, comme d'habitude, la partie réelle de s.

vérifient la double inégalité (4) pour aucune valeur de k, donneront, dans les sommes S_n et P_n, les parties S''_n et P''_n.

Considérons le rapport $\rho_n = \frac{S'_n}{S_n}$, lequel est compris entre o et 1 : lorsque n augmentera indéfiniment, ce rapport aura soit une limite, soit des limites d'oscillation. *Si $\zeta(1+ti)$ était nul, cette ou ces limites devraient tendre vers* 1 *avec* s. Autrement dit, ρ étant un nombre quelconque plus petit que 1, on pourrait faire correspondre à toute valeur réelle de s supérieure à 1, mais suffisamment voisine de 1, une valeur de n à partir de laquelle on aurait

$$\rho_n > \rho. \tag{5}$$

On peut, en effet, écrire évidemment :

$$P'_n \geqq - S'_n \geqq - \rho_n S_n,$$
$$P''_n \geqq - S''_n \cos\alpha \geqq - (1-\rho_n) S_n \cos\alpha$$

(les inégalités ayant leur sens algébrique). Si donc on avait

$$\rho_n \leqq \rho,$$

il en résulterait

$$P_n = - \theta S_n$$

où $\theta = \rho + (1-\rho)\cos\alpha$ est un nombre fixe plus petit que 1 ; et si cela avait lieu pour une infinité de valeurs de n, on pourrait passer à la limite et écrire

$$P \geqq - \theta S,$$

ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse $\zeta(1+ti) = 0$, ainsi qu'il a été remarqué au numéro précédent.

L'égalité $\zeta(1+ti) = 0$ exige donc bien que la ou les limites de ρ_n tendent vers 1 avec s.

4. Changeons alors t en $2t$, dans la série (3) et soit Q la nouvelle série ainsi obtenue : les termes qui formaient, dans la série (3), les sommes $P'_n, P''_n, P_n = P'_n + P''_n$ donneront, dans cette nouvelle série, respectivement les sommes $Q'_n, Q''_n, Q_n = Q'_n + Q''_n$ et l'on aura, cette fois,

$$Q'_n \geqq S'_n \cos 2\alpha \geqq \rho_n S_n \cos 2\alpha,$$
$$Q''_n \geqq - S''_n \geqq - (1-\rho_n) S_n$$

et, par conséquent,

$$Q_n \geqq S_n[\rho_n \cos 2\alpha - (1 - \rho_n)] ;$$

d'où, moyennant l'inégalité (5) supposée vérifiée pour n suffisamment grand,

$$Q_n \geqq \theta' S_n,$$

θ' désignant le nombre $\rho \cos 2\alpha - (1 - \rho)$, lequel est positif si nous avons pris $1 > \rho > \frac{1}{1 + \cos 2\alpha}$.

Or ceci donnerait $Q \geqq \theta' S$ et, par suite, Q augmenterait indéfiniment par valeurs positives; de sorte que le point d'affixe $1 + 2ti$ serait un infini de $\zeta(s)$: ce que nous savons n'avoir pas lieu.

L'impossibilité de l'hypothèse $\zeta(1 + ti) = 0$ est donc mise en évidence.

5. Il est remarquable que cette démonstration ne repose que sur les propriétés les plus simples de $\zeta(s)$: nous nous sommes, en effet, exclusivement servi des remarques suivantes : 1° le logarithme de notre fonction est développable en série de la forme $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$, les nombres a_n étant tous positifs; 2° la fonction est uniforme sur la droite qui limite la convergence de cette série et ne présente sur cette droite qu'un seul pôle simple.

Toute fonction satisfaisant à ces conditions sera donc différente de 0 sur la droite limite.

Ainsi, dans la démonstration précédente, c'était uniquement pour simplifier l'écriture que nous avons réduit le second membre de l'équation (1) à la série S : la démonstration se serait également appliquée au développement complet de $\log \zeta(s)$. De même, les nombres premiers ayant été distribués d'une façon quelconque en deux catégories, les nombres de la première catégorie étant désignés par p', ceux de la deuxième par p'', si la fonction représentée (lorsque la partie réelle de s est supérieure à 1) par le produit infini

$$f(s) = \frac{1}{\prod_{p'} \left(1 - \frac{1}{p'^s}\right) \prod_{p''} \left(1 + \frac{1}{p''^s}\right)} \tag{6}$$

est holomorphe sur la droite limite $\mathcal{R}(s) = 1$, elle est différente de o sur cette droite [1].

En effet, le logarithme du produit

$$f(s)\zeta(s) = \frac{1}{\prod\limits_{p'}\left(1-\frac{1}{p'^s}\right)^2 \prod\limits_{p''}\left(1-\frac{1}{p''^{2s}}\right)}$$

est représenté par une série $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ à coefficients positifs ; ce produit satisfait donc aux conditions ci-dessus indiquées.

Ce cas est, par exemple, celui de la fonction de Schlömilch

$$(7) \qquad \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = \prod_p \frac{1}{1+\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^s}}.$$

6. Plus généralement, nous allons étendre la proposition qui précède aux séries introduites en Arithmétique par Dirichlet, et dont nous devons tout d'abord rappeler, en les complétant sur certains points, les principales propriétés.

Ces séries appartiennent à la catégorie des séries de la forme $\sum \frac{a_n}{n^s}$ *périodiques,* c'est-à-dire dont les coefficients a_n se reproduisent de k en k. De telles séries sont évidemment des combinaisons linéaires des k fonctions

$$\begin{aligned}
\xi_1(s) &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{(k+1)^s} + \frac{1}{(2k+1)^s} + \ldots, \\
\xi_2(s) &= \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(k+2)^s} + \frac{1}{(2k+2)^s} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\xi_k(s) &= \frac{1}{k^s} + \frac{1}{(k+k)^s} + \frac{1}{(2k+k)^s} + \ldots,
\end{aligned}$$

étudiées par MM. Hurwitz [2] et Cahen [3]. Ces fonctions sont

---

[1] Sauf peut-être au point $s=1$; mais cette circonstance ne se présentera pas dans la suite.

[2] *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXVII, p. 86-102; 1882.

[3] *Thèse de Doctorat*, 1894, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XI.

uniformes dans tout le plan, avec le seul pôle simple $s=1$ et le résidu correspondant $\frac{1}{k}$, ainsi qu'il résulte de l'expression

$$(8) \qquad \xi_r(s) = \frac{i}{2\pi}\Gamma(1-s)\int(-x)^{s-1}\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}\,dx,$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour C partant de $+\infty$ et y revenant après avoir tourné dans le sens trigonométrique autour de l'origine, et $-x$ étant considéré comme ayant (pour x réel et positif) l'argument $-i\pi$ dans la première partie du chemin d'intégration et, par suite, l'argument $+i\pi$ dans la seconde.

L'intégrale qui figure dans la formule précédente est une fonction entière de s, et les théorèmes généraux donnés dans mon Mémoire *Sur les propriétés des fonctions entières* (¹) permettent d'en déterminer le genre. A cet effet, on peut, par exemple, diviser le contour C en deux parties : l'une C′ partant du point $x=1$ et y revenant après circulation autour de l'origine; l'autre C″ comprenant les deux traits de 1 à $+\infty$; les intégrales prises suivant ces deux traits ne diffèrent entre elles et de l'intégrale

$$(9) \qquad \int_1^\infty x^{s-1}\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}\,dx$$

que par les facteurs exponentiels $e^{-i\pi s}$ pour la première, $e^{i\pi s}$ pour la seconde. Or, le coefficient de s^n dans l'intégrale (9), qui a pour valeur

$$\frac{1}{n!}\int_1^\infty(\log x)^n\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}\,\frac{dx}{x},$$

est (puisque r est un entier plus grand que 0) au plus comparable au coefficient correspondant de la fonction

$$Q(s) = \int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx,$$

qui intervient dans l'étude de la fonction Γ et dont l'ordre de

(¹) *Journal de M. Jordan*, 4ᵉ série, t. IX; 1893.

grandeur pour s infini est celui de Γ. Quant à l'intégrale prise le long de C', le coefficient de s^n, qui a pour valeur

$$\frac{1}{n!}\int_{C'}(\log x)^n \frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}\,dx,$$

y est au plus de l'ordre de $\frac{K^n}{1.2\ldots n}$, en désignant par K le module maximum de $\log x$ sur le contour en question. On voit donc que la fonction considérée est de genre 1 : le nombre de zéros de cette fonction, compris dans le cercle de rayon R, est de l'ordre de $R\log R$.

7. Lorsqu'on change s en $1-s$, les nouvelles valeurs des fonctions ξ s'expriment en fonction des anciennes par les relations établies par M. Hurwitz [1] et que l'on peut prendre sous la forme [2]

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(1-s)}\sum_{l=1}^{k}\sigma^{lr}\xi_l(s)\\ &\quad=\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{s-1}\left[e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_{k-r}(1-s)+e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_r(1-s)\right]\\ &\qquad\qquad (r=1,2,\ldots,k),\end{aligned}\right.$$

où σ désigne $e^{\frac{2i\pi}{k}}$

8. Pour définir ses séries, Dirichlet [3] part de la décomposition du nombre k en facteurs premiers

$$(11)\qquad k=2^\lambda p^\varpi p'^{\varpi'}\ldots \qquad (\lambda \geqq 0;\ \varpi,\varpi',\ldots>0),$$

et, à tout entier n premier avec k, fait correspondre les indices

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \gamma',\ \ldots,$$

---

(1) HURWITZ, *loc. cit.*, p. 93.

(2) CAHEN, *loc. cit.*, n°s 47, 53.

(3) *Abhandlungen der Berl. Acad.*, 1837; traduit par Terquem, *Journal de Liouville*, 1re série, t. IV; 1839. Nous nous conformons aux notations employées dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie,* éditées par Dedekind, édition de 1863, supplément VI.

définis par les congruences

$$(12)\quad \begin{cases} n \equiv (-1)^{\alpha} 5^{\beta} & (\mathrm{mod}\ 2^{\lambda}), \\ n \equiv g^{\gamma} & (\mathrm{mod}\ p^{\varpi}), \\ n \equiv g'^{\gamma'} & (\mathrm{mod}\ p'^{\varpi'}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où g, g', ... sont des racines primitives pour les modules respectifs p^{ϖ}, $p'^{\varpi'}$, ... Les nombres α et β sont ainsi définis aux modules a et b près : les nombres a et b ayant tous deux la valeur 1, si $\lambda = 0, 1$, et prenant les valeurs $a = 2$, $b = \frac{1}{2}\varphi(2^{\lambda})$, si $\lambda \geqq 2$. Pareillement, les nombres γ, γ', ... sont définis relativement aux modules

$$c = \varphi(p^{\varpi}), \qquad c' = \varphi(p'^{\varpi'}), \qquad \ldots,$$

où φ est la fonction bien connue qui exprime combien il y a de nombres premiers à un entier donné et inférieurs à lui.

Réciproquement, la connaissance des indices α, β, γ, γ', ... fait connaître le nombre n, au module k près. Autrement dit, aux $\varphi(k)$ valeurs de n premières avec k et incongrues entre elles suivant le module k correspondent, d'une façon univoque, les

$$a\,b\,c\,c' \ldots = \varphi(k)$$

systèmes de valeurs de α, β, γ, γ', ... incongrus entre eux suivant les modules a, b, c, c', ...

Désignant par θ, η, ω, ω', ... respectivement une racine $a^{\text{ième}}$, une racine $b^{\text{ème}}$, une racine $c^{\text{ième}}$, une racine $c'^{\text{ième}}$, ... de l'unité, autrement dit posant

$$(13)\quad \begin{cases} \theta = \pm 1, \\ \eta = e^{\frac{2i\pi\upsilon}{b}}, \\ \varpi = e^{\frac{2i\pi\tau}{c}}, \\ \varpi' = e^{\frac{2i\pi\tau'}{c'}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dirichlet introduit la fonction

$$\psi_{\nu}(n) = \begin{cases} 0, \text{ si } n \text{ n'est pas premier avec } k, \\ \theta^{\alpha}\eta^{\beta}\omega^{\gamma}\omega'^{\gamma'} \ldots, \text{ si } n \text{ est premier avec } k, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \ldots$ étant les indices de n [l'indice ν a pour but de distinguer les unes des autres les $\varphi(k)$ fonctions ψ correspondant aux différents choix possibles des racines $\theta, \eta, \omega, \omega', \ldots$].

Il forme ensuite la série (périodique au sens indiqué ci-dessus)

$$(14) \qquad L_\nu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^{k} \xi_r(s)\,\psi_\nu(r) \qquad [\nu = 1, 2, \ldots, \varphi(k)],$$

égale au produit infini

$$(15) \qquad L_\nu(s) = \prod \frac{1}{1 - \dfrac{\psi_\nu(q)}{q^s}},$$

dans lequel q doit être remplacée successivement par tous les nombres premiers.

Les séries L_ν se répartissent en trois catégories : la première comprend une seule série L_1, celle qui correspond à

$$\theta = \eta = \omega = \omega' = \ldots = 1;$$

la seconde comprend toutes les séries L, pour lesquelles les nombres $\theta, \eta, \ldots$ sont égaux à $+1$ ou à -1 (à l'exception de L_1); la troisième, les séries correspondant aux cas où l'un au moins de ces nombres est imaginaire. Ces dernières sont conjuguées deux à deux; la série

$$L_\nu(s) = \sum \xi_r(s)\,\psi_\nu(r),$$

déduite des racines $\theta, \eta, \omega, \omega', \ldots$, est conjuguée de la série

$$L_{\nu'}(s) = \sum \frac{\xi_r(s)}{\psi_\nu(r)},$$

déduite des racines $\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\eta}, \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega'}, \ldots$.

La série L_1 admet, comme seule singularité, le pôle simple $s=1$. Quant aux autres séries L, elles sont holomorphes dans tout le plan $\left[\text{parce que la somme } \frac{1}{k}\sum_r \psi_\nu(r) \text{ des résidus au point } s=1 \text{ est nulle}\right]$. Dirichlet démontre qu'elles sont toutes différentes de 0 pour $s=1$.

9. De la relation générale (10), M. Hurwitz a pu déduire que certaines séries de seconde catégorie se reproduisent, à un facteur près, par le changement de s en $(1-s)$ à la façon de la fonction ζ.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème démontré par M. Lipschitz [1], et qui est le suivant : *La série* $L_\nu(s)$ *est (à un facteur exponentiel et trigonométrique près, analogue à celui qui se rencontre dans la formule relative à la fonction* ζ*) changée en sa conjuguée par le changement de s en* $1-s$, *sous les conditions suivantes :*

1° $\lambda \geqq 3$, μ *impair;*

2° $\tau \neq p-1$, *si* $\varpi = 1$; τ *non divisible par* p, *si* $\varpi > 1$;

3° $\tau' \neq p'-1$, *si* $\varpi' = 1$; τ' *non divisible par* p', *si* $\varpi' > 1$; ...

Ce théorème nous fournit un renseignement important sur la distribution des zéros de $L_\nu(s)$. Puisque cette fonction n'a aucun zéro imaginaire dont la partie réelle soit plus grande que s, elle n'en a non plus aucun dont la partie réelle soit négative : les zéros imaginaires sont compris dans la même bande que ceux de $\zeta(s)$. Ils sont même, comme ceux de $\zeta(s)$, disposés symétriquement par rapport à la droite $\mathcal{R}(s) = \frac{1}{2}$, puisqu'à tout zéro α correspond un zéro α' (différent ou non du premier), tel que α et $1-\alpha'$ soient imaginaires conjugués.

Toutefois, cette conclusion n'est pas encore démontrée dans les cas où la relation de Lipschitz ne s'applique pas; mais on ramène ces cas aux autres par les remarques suivantes :

1° Si une racine ω, par exemple, est égale à 1, on aura

$$L_\nu(s) = [1 - \psi'_\nu(p)p^{-s}]L'_\nu(s),$$

la série L'_ν étant composée en partant du nombre k supposé débarrassé du facteur p^ϖ. La même circonstance se produit pour le facteur 2 lorsque l'exposant λ est égal à 1 ;

2° Si l'entier τ est divisible par p^h, la série peut se composer en partant de l'entier k, divisé par p^h, la racine primitive g de p^ϖ étant une racine primitive de $p^{\varpi-h}$. La nouvelle valeur de τ ne con-

---

[1] *Journal de Crelle*. t. 105, p. 127-157.

tiendra plus p en facteur. Il en est de même pour le facteur 2 lorsque l'entier μ est pair, et aussi lorsque $\lambda = 2$, $\theta = 1$.

3° Le raisonnement de l'auteur est encore valable pour $\lambda = 2$, $\theta = -1$, en prenant pour l'expression (¹) $\left(\theta, \psi; e^{\frac{2ri\pi}{2^\lambda}}\right)$ la valeur $e^{\frac{2ri\pi}{4}} + \theta e^{\frac{-2ri\pi}{4}}$.

Notre conclusion est donc établie pour toutes les séries L_ν. On pourrait dès lors développer, sur la distribution des zéros de L_ν, une théorie analogue à celle de M. von Mangoldt (²). La seule remarque sur laquelle se fonde cet auteur, outre les propriétés communes à $\zeta(s)$ et aux séries L_ν, est que l'argument de $\zeta(s)$ reste fini lorsque le point d'affixe s décrit la droite $\mathcal{R}(s) = a > 1$. Or cette propriété appartient également aux fonctions L_ν. On pourrait donc compléter l'analyse présentée à cet égard (³) par Piltz.

10. L'équation fondamentale utilisée par Dirichlet pour la démonstration de son théorème, est

$$(16) \qquad \sum_\nu \frac{\log L_\nu(s)}{\psi_\nu(m)} = \varphi(k)\left(\sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2}\sum' \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3}\sum'' \frac{1}{q^{3s}} + \ldots\right),$$

où m est un entier quelconque premier avec k et où les signes $\sum, \sum', \sum'', \ldots,$ s'étendent, le premier aux nombres premiers q tels que $q \equiv m \pmod{k}$, le second aux nombres premiers q tels que $q^2 \equiv m \pmod{k}$, etc. Pour $m = 1$, ceci donne

$$\log \prod_\nu L_\nu(s) = \varphi(k)\left(\sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2}\sum' \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3}\sum'' \frac{1}{q^{3s}} + \ldots\right).$$

Donc *les séries de Dirichlet n'ont aucun zéro sur la droite* $\mathcal{R}(s) = 1$, car la fonction $\prod_\nu L_\nu(s)$ satisfait aux conditions énumérées au n° 5.

(¹) *Loc. cit.*, p. 144, formule (9). M. Lipschitz désigne par la lettre ψ la quantité que nous nommons τ.
(²) *Journal de Crelle*, t. 114.
(³) *Habilitationschrift*, Iéna, 1884.

II. — *Conséquences arithmétiques.*

11. Nous sommes bien loin, comme on le voit, d'avoir démontré l'assertation de Riemann-Stieltjes; nous n'avons même pas pu exclure l'hypothèse d'une infinité de zéros de $\zeta(s)$ s'approchant indéfiniment de la droite limite. Cependant le résultat auquel nous sommes parvenu suffit, à lui seul, pour démontrer les principales conséquences arithmétiques que l'on a, jusqu'ici, essayé de tirer des propriétés de $\zeta(s)$.

Tout d'abord on peut remarquer que l'équation

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = -\log(s-1) + \text{quantité finie}$$

fournit déjà quelques renseignements sur la distribution des nombres premiers. Soit, en effet, a un nombre plus grand que 1, et désignons par N_λ le nombre des nombres premiers compris entre a^λ et $a^{\lambda+1}$. Le premier membre de l'équation précédente est compris entre $\sum_\lambda \frac{N_\lambda}{a^{\lambda s}}$ et $\sum_\lambda \frac{N_\lambda}{a^{(\lambda+1)s}}$. En posant $\frac{1}{a^{s-1}} = x$ et remarquant que $s-1 = \frac{\log\frac{1}{x}}{\log a}$ peut être ici remplacé par $1-x$, on peut écrire, à une quantité finie près, pour x plus petit que 1, mais tendant vers 1 :

$$\sum \frac{N_\lambda}{a^\lambda} x^\lambda > \log(1-x) > \frac{x}{a} \sum \frac{N_\lambda}{a^\lambda} x^\lambda,$$

d'où l'on déduit que, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, on aura une infinité de fois

$$N_\lambda > \frac{(1-\varepsilon)a^\lambda}{\lambda}$$

et une infinité de fois

$$N_\lambda < \frac{(1+\varepsilon)a^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

conclusions analogues à celles que donne, par exemple, M. Poincaré dans son *Mémoire sur l'extension aux nombres premiers* *complexes des inégalités de M. Tchebicheff* [1], et qui suffiraient, comme elles, à établir que si le rapport d'un nombre x à la somme des logarithmes des nombres premiers plus petits que lui a une limite, cette limite ne peut être que 1.

D'autres inégalités pourraient sans doute être tirées de ce fait que, quel que soit le nombre réel t différent de 0, la quantité $\sum \frac{1}{p^s}\cos(t\log p)$ reste finie lorsque s tend vers 1.

12. Dans son Mémoire précédemment cité, M. Cahen présente une démonstration du théorème énoncé par Halphen : *La somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x.* Toutefois son raisonnement dépend de la proposition de Stieltjes sur la réalité des racines de $\zeta(\frac{1}{2}+ti)=0$. Nous allons voir qu'en modifiant légèrement l'analyse de l'auteur on peut établir le même résultat en toute rigueur.

A cet effet, au lieu de partir de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^z}{z}dz$, égale à 1 ou à 0 suivant que x est plus grand ou plus petit que 1, nous considérerons l'intégrale plus générale

$$J_\mu = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^z}{z^\mu}dz.$$

Dans cette intégrale, comme dans la première, x est une quantité positive ainsi que a; μ est positif.

Lorsque μ est un entier, cette intégrale s'évalue par les mêmes méthodes que J, ou s'en déduit par une intégration par parties, déduite de l'identité

$$\frac{1}{z^\mu} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\frac{d^{\mu-1}}{dz^{\mu-1}}\left(\frac{1}{z}\right).$$

La partie tout intégrée disparaît à l'infini et il vient

$$(17)\qquad J_\mu = \begin{cases} 0, \text{ si } x<1 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\mu)}\log^{\mu-1}x, \text{ si } x>1. \end{cases}$$

---

(1) *Journal de M. Jordan*, 4e série, t. VIII; 1892.

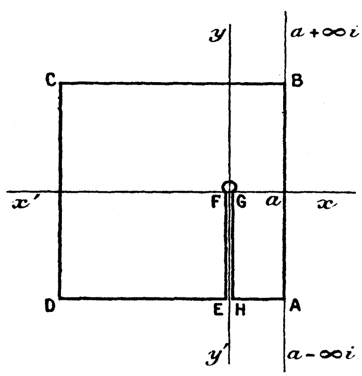
La même formule peut se démontrer pour μ non entier, auquel cas il est entendu que z^μ doit recevoir la détermination qui est réelle et positive pour $z = 0$. Pour $x < 1$, on intégrera le long d'un rectangle ayant un de ses côtés sur la droite $\mathcal{R}(z) = a$ et situé dans la région $\mathcal{R}(z) > a$, le second côté du rectangle augmentant indéfiniment comme la puissance $\mu'^{\text{ième}} (0 < \mu' < \mu)$ du premier. Le résultat est alors évident.

Pour $x > 1$, on commencera par supposer $\mu < 1$. On intégrera alors le long d'un contour ABCDEFGHA (*fig.* 1) composé encore d'un rectangle ayant un côté AB sur la droite $\mathcal{R}(z) = a$, mais situé dans la région $\mathcal{R}(z) < a$ et interrompu sur son côté DA par un lacet qui va à l'origine et en revient en suivant la partie négative de l'axe imaginaire. Si le côté BC augmente indéfiniment comme la puissance $\mu'^{\text{ième}} (0 < \mu' < \mu)$ de AB, l'intégrale prise le long des côtés qui s'éloignent à l'infini disparaît et il reste

$$J_\mu = \frac{1}{2i\pi} \lim \left(\int_{HG} + \int_{FE} \right).$$

Or, sur le chemin HG, l'argument de z est $-\frac{i\pi}{2}$, et, sur le

Fig. 1.



chemin FE, $\frac{3i\pi}{2}$. Il vient donc bien

$$J_\mu = \frac{\left(e^{\frac{\mu i \pi}{2}} - e^{-\frac{3\mu i\pi}{2}}\right)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x^{-it}\,dt}{t^\mu}$$

$$= -\frac{e^{-\frac{\mu i\pi}{2}} \sin \mu\pi}{i\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(t \log x) - i \sin(t \log x)}{t^\mu} dt = \frac{\log^{\mu-1} x}{\Gamma(\mu)}.$$

Cette formule, établie pour $\mu < 1$, s'étendra au cas de $\mu > 1$ par une intégration par parties déduite de l'identité

$$\frac{1}{z^{\mu+m}} = \frac{(-1)^m \Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+m)} \frac{d^m}{dz^m} \frac{1}{z^\mu}.$$

13. Parallèlement à la voie suivie par M. Cahen, nous appliquerons la formule (17) à l'intégrale

$$\psi_\mu(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z}{z^\mu} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz, \tag{18}$$

où a est un nombre quelconque plus grand que 1. En vertu du développement

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_p \log p \left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots\right),$$

notre formule donne

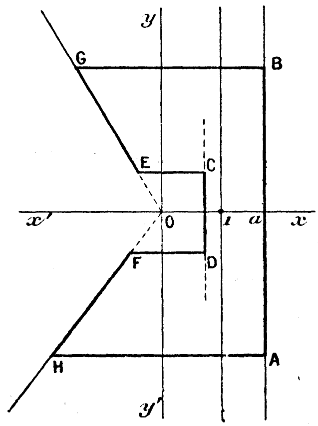
$$\psi_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\sum \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} + \sum' \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p^2} + \ldots\right), \tag{19}$$

le signe $\sum$ s'étendant aux nombres premiers plus petits que x, le signe $\sum'$ aux nombres premiers plus petits que $x^{\frac{1}{2}}$, etc.

14. L'avantage que nous trouvons à prendre $\mu > 1$ réside dans la convergence de la série $\frac{1}{|\alpha|^\mu}$, où α désigne successivement les zéros de $\zeta(z)$, convergence sur laquelle reposent, comme nous allons le voir, les raisonnements qui vont suivre.

Dans ces conditions, en effet, nous pouvons séparer de l'ensemble des racines α un nombre M de ces quantités assez grand pour que la somme $\sum \frac{1}{|\alpha|^\mu}$, étendue aux racines restantes, soit plus petite qu'un nombre positif quelconque ε. Aucun des α n'ayant sa partie réelle égale à 1, nous pourrons (*fig.* 2) tracer une parallèle CD à l'axe imaginaire, laissant à sa droite la parallèle $\mathcal{R}(z) = 1$ et à sa gauche les M premières racines α. Des points C, D de cette droite, nous ferons partir des parallèles CE, DF à l'axe réel, parallèles comprenant entre elles les M racines en question, ne passant par aucune autre racine, et que nous prolongerons jusqu'à rencontre en E, F respectivement avec deux droites OEG, OFH issues de l'origine et situées respectivement dans les deux angles formés par la partie négative de l'axe réel avec les deux directions de l'axe imaginaire. Enfin nous fermerons le contour d'intégration ABGECDFHA (*fig.* 2) par deux paral-

Fig. 2.



lèles variables BG, AH à l'axe réel (parallèles comprenant, bien entendu, CE et DF entre elles), rejoignant en A, B la droite $\mathcal{R}(z) = a$.

15. Je dis, en premier lieu, que l'on peut éloigner les parallèles BG, AH à l'infini, de telle façon que la partie de l'intégrale ψ_μ relative à ces droites tende vers zéro.

On peut suivre pour cela une marche analogue à celle qui est exposée dans mon Mémoire sur les propriétés des fonctions entières (¹). La méthode qui va suivre diffère légèrement de celle-là; elle me paraît plus avantageuse.

Soit A un nombre plus grand que l'unité. Traçons des parallèles à l'axe réel à des distances de cet axe représentées par A^3, A'^6, ..., $A^{3\lambda}$, ... Le nombre (²) des racines α, dont les coordonnées sont comprises entre $A^{3\lambda}$ et $A^{3\lambda+3}$ est au plus égal à $K\lambda A^{3\lambda}$, le nombre K

(¹) *Loc. cit.*, n° 29 et suiv.

(²) Chaque racine est, bien entendu, comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

étant fini ([1]), et il en sera de même *a fortiori* de l'intervalle $(A^{3\lambda+1}, A^{3\lambda+2})$; de sorte que si l'on range les racines α par ordre de coefficients de i croissants, il en existera au moins deux consécutives pour lesquelles les coefficients de i différeront d'une quantité supérieure à $\frac{A^{3\lambda+2}-A^{3\lambda+1}}{K\lambda A^{3\lambda}} = \frac{A(A-1)}{K\lambda}$.

Nous tracerons, à égale distance de ces deux racines, une parallèle à l'axe réel dont l'ordonnée sera désignée par z_0, et cette ordonnée aura, avec celle de toute racine α, une différence supérieure à $\frac{A(A-1)}{2K\lambda}$.

Or on a

$$\text{(20)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} &= \sum_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)-\sum_\beta\left(\frac{1}{z-\beta}+\frac{1}{\beta}\right)-\frac{1}{z}+C \\ &= \sum_\alpha\frac{z}{\alpha(z-\alpha)}-\sum_\beta\frac{z}{\beta(z-\beta)}-\frac{1}{z}+C, \end{aligned}\right.$$

les α désignant les zéros, les β les pôles (réels et négatifs) de ζ, et C étant une constante. Lorsque z varie sur le segment BG de la parallèle d'ordonnée z_0, le rapport $\frac{z-\beta}{\beta}$ reste supérieur à un nombre fixe, indépendant de β, et il en est de même pour le rapport $\frac{z-\alpha}{\alpha}$, si l'ordonnée de α est extérieure à l'intervalle $(A^{3\lambda}, A^{3\lambda+3})$. Les parties correspondantes du second membre de l'équation (20) donnent donc le produit de z par une somme finie $\left(\text{puisque les sommes} \sum \frac{1}{\alpha^2}, \sum \frac{1}{\beta^2} \text{ sont finies}\right)$.

Quant aux termes correspondant aux racines α comprises entre les parallèles d'ordonnées $A^{3\lambda}$ et $A^{3\lambda+3}$, elles donneront, d'après ce qui a été dit plus haut, une somme moindre que $K\lambda A^{3\lambda}\frac{2K\lambda A^3}{A(A-1)}$, quantité de la forme $K' z_0 \log z_0$ (où K' est un nouveau nombre fini).

([1]) Il est clair qu'on peut se dispenser des précautions que nous prenons ici en utilisant les résultats obtenus par M. von Mangoldt sur la distribution des quantités α; la méthode du texte a l'avantage de s'appliquer chaque fois qu'on connaît le genre de la fonction étudiée.

On aura donc

$$\left|\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right| < K' z_0 \log z_0\,;$$

d'où en reportant dans notre intégrale

$$\left|\int_{BG} \frac{x^z}{z^\mu}\,\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz\right| < \frac{K' \log z_0}{z_0^{\mu-1}} \int |x^z|\,dz,$$

quantité infiniment petite pour z_0 infini.

16. L'intégrale prise le long de la droite indéfinie AB peut donc être remplacée par l'intégrale prise le long du contour indéfini HFDCEG, augmentée de la somme des résidus relatifs au pôle $z = 1$ et aux zéros α non compris entre les parallèles CE, DF.

Le résidu relatif au pôle $z = 1$ est $-x$.

Les résidus relatifs aux zéros de α non compris entre CE et DF ont une somme moindre que εx, où ε a été choisi aussi petit qu'on veut, et cela indépendamment de x.

Quant à l'intégrale prise le long du contour HFDCBG, elle est infiniment petite relativement à x. Cela est évident pour la partie finie FDCE, où il suffit de remarquer que $\frac{1}{z^\mu}\,\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ est fini. Sur les parties infinies EG, FH, les rapports $\left|\frac{z-\alpha}{\alpha}\right|$, $\left|\frac{z-\beta}{\beta}\right|$ sont supérieurs à un nombre fixe, et, par conséquent, la quantité $\left|\frac{1}{z}\,\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\right|$ est finie. L'intégrale sur un de ces chemins est donc moindre que $K\int\left|\frac{x^z}{z^{\mu-1}}\right||dz|$ (le nombre K étant fini), c'est-à-dire qu'une quantité finie, décroissante quand x croît.

$\psi_\mu(x)$ est donc asymptotique à x, car, pour rendre la différence $[x - \psi_\mu(x)]$ moindre que ηx, il suffira de choisir $\varepsilon < \frac{\eta}{2}$, puis x assez grand pour que l'intégrale $\int_{HFDCEG}$ soit inférieure à $\frac{\eta}{2}x$.

17. Dans l'expression (19) de $\psi_\mu(x)$, nous ferons abstraction des termes compris sous les signes $\sum$ autres que le premier. Le nombre de ces signes est, en effet, moindre que $\frac{\log x}{\log 2}$, et la plus grande des sommes correspondantes est la première, inférieure

elle-même à $\log\Gamma\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)\log^{\mu-1}x$, par conséquent (à un facteur fini près) à $x^{\frac{1}{2}}\log^{\mu}x$. Nous négligeons donc une quantité moindre que $x^{\frac{1}{2}}\log^{\mu+1}x$; et le résultat obtenu ci-dessus peut s'énoncer ainsi : *la somme* $\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum\log p\log^{\mu-1}\frac{x}{p}$, *étendue aux nombres premiers inférieurs à x, est asymptotique à x.*

Ce résultat (où il est entendu que nous devons supposer $\mu>1$) diffère de l'énoncé d'Halphen : *la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x.* Nous allons voir qu'il le comprend comme cas particulier.

18. Pour cela, prenons $\mu=2$, ce qui donne

$$\sum_0^x \log p\log\frac{x}{p}=x(1+\eta),$$

η étant (pour x assez grand) inférieur en valeur absolue à tel nombre qu'on voudra.

Dans cette relation, changeons x en $x(1+h)$ et retranchons membre à membre : il vient

$$\sum_0^x \log p\log(1+h)+\sum_x^{x(1+h)}\log p\log\frac{x(1+h)}{p}=x(h+\eta),$$

égalité dans laquelle le signe $\sum\limits_\alpha^\beta F(p)$ désigne la somme des valeurs de la fonction F pour les nombres premiers compris entre α et β.

Pour les nombres premiers qui figurent sous le second signe $\sum$, la quantité $\frac{x(1+h)}{p}$ est comprise entre 1 et $1+h$: on peut donc écrire, en divisant par $\log(1+h)$,

$$(21)\qquad \begin{aligned}\sum_0^x \log p &< x\frac{(h+\eta)}{\log(1+h)}\\ \sum_0^{x(1+h)}\log p &> x\frac{(h+\eta)}{\log(1+h)}.\end{aligned}$$

Dans cette dernière, nous changerons x en $\frac{x}{1+h}$: elle deviendra

$$(22) \qquad \sum_0^x \log p > x \frac{h+\eta}{(1+h)\log(1+h)}.$$

Les formules (21) et (22) démontrent l'énoncé d'Halphen. On voit, en effet, que $\sum_0^x \log p$ sera compris entre $x(1+\rho)$ et $x(1-\rho)$, si l'on a choisi h tel que

$$1-\frac{\rho}{2} < \frac{h}{(1+h)\log(1+h)} < \frac{h}{\log(1+h)} < 1+\frac{\rho}{2},$$

puis x assez grand pour que $\eta < \frac{\rho}{2}\log(1+h)$.

19. Les résultats qui précèdent s'étendent d'eux-mêmes aux séries de Dirichlet. On considérera l'intégrale

$$(23) \qquad -\frac{1}{2i\pi}\int_{AB}\left[\sum_{\nu}\frac{1}{\psi_\nu(m)}\frac{L'_\nu(z)}{L_\nu(z)}\right]\frac{x^z}{z^\mu}dz,$$

où μ est un nombre plus grand que 1, les autres lettres ayant le même sens que dans les nos 8-10. Cette intégrale représente, à une quantité près infiniment petite relativement à x, le produit de $\varphi(k)$ par la somme des logarithmes des nombres premiers q congrus à m, suivant le module k et plus petits que x, multipliés respectivement par les valeurs correspondantes de $\log^{\mu-1}\frac{x}{q}$.

Or on peut raisonner sur cette intégrale exactement comme nous l'avons fait sur l'intégrale (18), car les propriétés de $\zeta(s)$, que nous avons utilisées et qui sont relatives à la distribution des zéros et au genre, ont été démontrées pour les séries de Dirichlet. La quantité qui figure sous le signe $\int$ dans l'intégrale (23) a pour pôle simple $z=1$, pôle de $\frac{L'_1(z)}{L_1(z)}$, et le résidu correspondant $-\frac{x}{\psi_1(m)}=-x$; les résidus relatifs aux autres pôles donnent une somme qu'on peut considérer comme négligeable vis-à-vis de x, ainsi que l'intégrale prise le long du contour GECDFH, comme il a été expliqué.

Donc l'intégrale (23) est asymptotique à x. En suivant la même marche qu'au numéro précédent nous reconnaissons que *la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x et compris dans une progression arithmétique déterminée de raison k est asymptotique à* $\frac{x}{\varphi(k)}$.

L'équation générale

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_0^x \log q \log^{\mu-1}\frac{x}{q} = \frac{x}{\varphi(k)}(1+\rho)$$

qui, comme nous venons de le voir, comprend la relation correspondant à $\mu = 1$, ne paraît pas pouvoir se déduire inversement de celle-ci; il serait intéressant de rechercher quels renseignements cette équation fournit sur l'ordre de grandeur de ρ, c'est-à-dire de l'erreur commise en remplaçant $\sum_0^x \log q$ par sa valeur asymptotique.

20. En terminant, je signalerai l'application possible de la même méthode aux séries de Weber ([1]) et de Meyer ([2]), par lesquelles on étend le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique aux formes quadratiques. Une fois démontré que ces séries sont uniformes, la relation ([3]), analogue à celle donnée précédemment au n° 10, prouvera qu'elles ne s'annulent pas sur la droite $\mathcal{R}(s) = 1$.

Dans le cas où le déterminant est négatif, et où l'on considère la forme quadratique seule (sans faire intervenir de progression arithmétique), une formule donnée par Weber ([4]) fournit la démonstration demandée; en même temps, elle fait connaître le genre de ces séries et fournit la relation correspondant au changement de s en $1 - s$. Les méthodes exposées dans le présent Mémoire sont donc dès à présent applicables à ce cas particulier.

([1]) *Math. Annalen*, t. XX, p. 301.

([2]) *Journal de Crelle*, t. 103, p. 98; cf. Bachmann, *Analytische Zahlentheorie*, Ch. X; Leipzig, Teubner, 1894.

([3]) Bachmann, *loc. cit.*, p. 291, ligne 6, formule (34).

([4]) Bachmann, *loc. cit.*, p. 302, ligne 4.

Nota. — Pendant la correction des épreuves, je reçois communication des recherches que M. de la Vallée-Poussin consacre au même sujet dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (¹). Nos raisonnements, trouvés d'une façon indépendante, ont quelques points communs : il est remarquable, en particulier, de constater que M. de la Vallée-Poussin a été conduit, lui aussi, à employer comme intermédiaire le fait que la fonction ζ n'a pas de racine de la forme $1 + ti$, quoique les procédés de démonstration soient tout à fait différents. Je crois qu'on ne refusera pas à ma méthode l'avantage de la simplicité.

Les critiques, adressées par M. de la Vallée-Poussin aux démonstrations fondées sur l'emploi de l'intégrale $\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^z \frac{dz}{z}$, n'intéressent point la nôtre, fondée sur l'intégrale

$$\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z\,dz}{z^\mu} \quad (\mu > 1),$$

grâce au fait que cette dernière garde un sens, même lorsqu'on remplace chaque élément par son module.

(¹) Tome XX, 2ᵉ Partie; 1896.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

J. HADAMARD

Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 9 (1893), p. 171-216.

<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1893_4_9_A3_0>

Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann [1];

Par M. J. HADAMARD.

---

1. La décomposition d'une fonction entière $F(x)$ en facteurs primaires, d'après la méthode de M. Weierstrass,

$$F(x) = e^{G(x)} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_p}\right) e^{Q_p(x)} \tag{1}$$

a conduit à la notion du genre de la fonction F.

On dit que F est du genre E si, dans le second membre de l'équation (1), tous les polynômes Q_p sont de degré E, et que la fonction entière $G(x)$ se réduise également à un polynôme de degré E au plus.

Dans un article inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France* [2], M. Poincaré a démontré une propriété des fonctions de genre E. L'énoncé auquel il est parvenu est le suivant :

Dans une fonction entière de genre E, *le coefficient de* x^m, *mul-*

---

[1] Les principaux résultats contenus dans le présent Mémoire ont été présentés à l'Académie des Sciences dans un travail couronné en 1892 (grand prix des Sciences mathématiques).

[2] Année 1883, pages 136 et suiv.

tiplié par la racine $\mathrm{E}+1^{\text{ième}}$ *du produit des m premiers nombres, tend vers zéro quand m croît indéfiniment.*

Je me propose de compléter ce théorème en étudiant, d'une façon générale, les relations qui lient les propriétés d'une fonction entière à la loi de décroissance des coefficients et, particulièrement, en démontrant la proposition inverse :

Si le coefficient de x^m *est moindre que* $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, *la fonction est, en général, de genre moindre que* λ.

PREMIÈRE PARTIE.

RELATIONS ENTRE LA LOI DE DÉCROISSANCE DES COEFFICIENTS ET L'ORDRE DE GRANDEUR DE LA FONCTION POUR LES GRANDES VALEURS DE LA VARIABLE.

2. Le développement taylorien d'une fonction entière est caractérisé [1] par cette circonstance que la racine $m^{\text{ième}}$ du coefficient de x^m tend vers zéro quand m augmente indéfiniment.

Si donc une fonction entière $\mathrm{F}(x)$ est donnée par le développement

$$\mathrm{F}(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m+\ldots, \tag{2}$$

le module de a_m peut être représenté par $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$, où $\varphi(m)$ est positif et infini avec m.

Pour obtenir une quantité supérieure au module de $\mathrm{F}(x)$, nous remplacerons chaque terme de la série (2) par son module, de sorte que nous pourrons considérer a_m comme égal à $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$ et x comme réel et positif.

---

(1) HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, n° 6 (ce Journal, 4e série, t. VIII).

Nous supposerons, en outre, que $\varphi(m)$ est une fonction continue et croissante, avec cette condition que $L\varphi(m) + \frac{k}{m}$ soit, à partir d'une certaine valeur de m, constamment croissant, quel que soit le nombre k.

Dans les cas usuels, ces hypothèses se trouvent vérifiées d'elles-mêmes; mais on peut les supposer vérifiées dans le cas le plus général, à la condition de remplacer, d'une manière convenable, certains coefficients a_m par des nombres plus grands, ce qui est permis, puisque nous agrandissons ainsi la somme de la série (2).

En un mot, on peut déterminer une fonction $\chi(m)$ au plus égale, pour les valeurs entières de m, au module de a_m (l'égalité ayant lieu pour une infinité de ces valeurs) et telle que la fonction

$$\varphi(m) = \sqrt[m]{\chi(m)} \tag{3}$$

satisfasse aux conditions que nous venons d'indiquer.

3. A cet effet, soit a_{m_0} le premier coefficient non nul. La quantité $\left|\sqrt[m-m_0]{\frac{a_m}{a_{m_0}}}\right|$, diminuant indéfiniment à mesure que m augmente, doit prendre nécessairement une valeur plus grande que toutes les autres. Soit m_1 l'indice correspondant. Pour les valeurs entières de m comprises entre m_0 et m_1, nous prendrons comme valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progression géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_0}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_1}|}$, dont la raison sera, par suite, $\left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$; ce qui revient (en faisant intervenir non seulement les valeurs entières de m, mais les valeurs fractionnaires ou incommensurables) à prendre pour $\chi(m)$ une certaine exponentielle de la forme e^{am-b}, où l'on aura $a = \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$.

Soit de même m_2 l'indice plus grand que m_1 pour lequel la quantité $\left|\sqrt[m-m_1]{\frac{a_m}{a_{m_1}}}\right|$ prend la plus grande valeur. Entre $m = m_1$ et $m = m_2$, on prendra pour valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progression géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_1}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_2}|}$. La raison de cette progression, à savoir $\left|\sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}}\right|$, sera plus grande que la précédente, car l'inégalité

$$\left|\sqrt[m_2-m_0]{\frac{a_{m_2}}{a_{m_0}}}\right| < \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_0}}}\right|$$

ou

$$\left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_1-m_0}\left|\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}\right|^{m_1-m_0} > \left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_2-m_0}$$

peut s'écrire

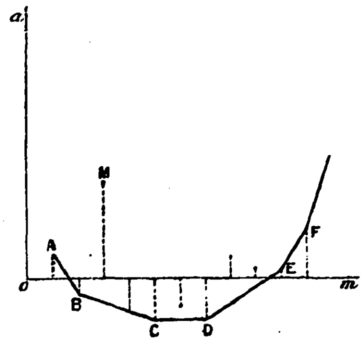
$$\left|\sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}}\right| > \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|.$$

On considérera ensuite la valeur m_3 de m pour laquelle $\left|\sqrt[m-m_2]{\frac{a_m}{a_{m_2}}}\right|$ sera le plus grand, et l'on continuera ainsi indéfiniment.

4. Au reste, ces opérations peuvent se ramener à la construction bien connue du polygone de Newton.

Pour cela on considérera m comme l'abscisse d'un point M (*fig.* 1) dont l'ordonnée sera fournie par la valeur correspondante de L $\left|\frac{1}{a_m}\right|$.

Fig. 1.



Nous aurons ainsi une suite indéfinie de points représentant les différents coefficients de notre série.

Prenons alors une demi-droite, tout d'abord parallèle à la partie négative de l'axe des y, et que nous ferons tourner autour du premier point représentatif dans le sens trigonométrique jusqu'à ce qu'elle passe par un ou plusieurs des points suivants. Ce sera le premier côté AB de notre polygone. Pour obtenir le second, nous considérerons une droite issue du point B et que nous ferons tourner autour de ce point, etc.

Continuant ainsi à la manière ordinaire, nous tracerons une ligne brisée convexe ABC... d'une infinité de côtés, qui passera par une infinité de points représentatifs et laissera tous les autres en dessus. Les coefficients angulaires des côtés pourront être d'abord négatifs; mais, à partir d'un certain moment, ils deviendront nécessairement positifs et même de plus en plus grands.

L'ordonnée de cette ligne brisée représente le logarithme de la fonction $\chi(m)$ définie au numéro précédent, et le coefficient angulaire de OM donne la valeur de $\mathrm{L}\varphi(m)$.

5. Nous voyons tout d'abord que $\chi(m)$ est une fonction croissante, et de manière que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit aussi croissant. Il en résulte que la fonction $\varphi(m)$, laquelle a une dérivée, sauf en des points isolés [1], est elle-même constamment et indéfiniment croissante.

En outre, m_0 étant un entier quelconque, la fonction $\mathrm{L}\chi(m)$ est, entre $m = m_0$ et $m = m_0 + 1$, de la forme $am - b$, où

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{L}\chi(m_0+1) - \mathrm{L}\chi(m_0), \\ b &= -(m_0+1)\mathrm{L}\chi(m_0) + m_0\mathrm{L}\chi(m_0+1) \\ &= m_0(m_0+1)[\mathrm{L}\varphi(m_0+1) - \mathrm{L}\varphi(m_0)]. \end{aligned}$$

$\mathrm{L}\varphi(m)$ étant par suite de la forme $a - \frac{b}{m}$, la quantité $\mathrm{L}\varphi + \frac{k}{m}$ sera

---

[1] Si l'on voulait que χ et par suite φ aient une dérivée pour toute valeur de m (ce qui n'est pas nécessaire pour la suite), il suffirait de circonscrire au polygone ABC... une courbe convexe, ce qui est évidemment possible, par exemple à l'aide d'arcs de coniques se raccordant entre eux aux sommets successifs. On verrait aisément que les autres propriétés des fonctions χ et φ subsisteraient dans ces nouvelles conditions.

croissante si $b > k$. Ceci devant être vrai quel que soit le nombre k, pourvu que l'on prenne m_0 assez grand, nous avons à montrer que b augmente indéfiniment avec m_0.

Or b est constamment croissant, car l'inégalité

$$m\mathrm{L}\chi(m+1)-(m+1)\mathrm{L}\chi(m) \geqq (m-1)\mathrm{L}\chi(m)-m\mathrm{L}\chi(m-1)$$

est équivalente à l'inégalité

$$\mathrm{L}\chi(m+1)-\mathrm{L}\chi(m) \geqq \mathrm{L}\chi(m)-\mathrm{L}\chi(m-1).$$

D'ailleurs, si b restait inférieur à une quantité fixe k, on aurait

$$\mathrm{L}\varphi(m+1)-\mathrm{L}\varphi(m) < \frac{k}{m(m+1)}$$

et, comme le second membre est le terme général d'une série convergente, φ serait fini pour m infini, ce qui est contraire à nos hypothèses.

La fonction φ, définie comme il vient d'être dit, remplit donc les conditions que nous nous sommes imposées. Nous remarquerons que, moyennant ces conditions, λ étant un nombre fixe supérieur d'aussi peu que l'on veut à l'unité, on a, pour les grandes valeurs de m,

$$\frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)} > 1 + \frac{1}{m}, \tag{4}$$

car la fonction

$$\mathrm{L}\varphi(tm)-\mathrm{L}\varphi(m)+\frac{\lambda}{\lambda-1}\left(\frac{1}{tm}-\frac{1}{m}\right),$$

considérée comme fonction de t, est croissante, d'après nos hypothèses, à partir de $t=1$, si m a été pris suffisamment grand. Étant nulle pour $t=1$, elle sera positive pour $t=\lambda$, d'où résulte

$$\frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)} > e^{m} > 1 + \frac{1}{m}.$$

6. Cela posé, soit $\psi(x)$ la fonction inverse de φ, qui est également une fonction positive, continue et croissante d'une variable positive.

Je dis que $F(x)$ *croît moins vite que* $x^{\varepsilon} e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx}$, le nombre ε étant positif, mais aussi petit qu'on le veut.

Pour le démontrer, soit x' un nombre supérieur à x. Dans la série qui représente $F(x')$, considérons le dernier terme qui soit plus grand que 1, c'est-à-dire tel que $\varphi(m) < x'$. Son rang m_0 sera le plus grand entier contenu dans $\psi(x')$.

Ayant isolé les m_0 premiers termes pour en former un premier groupe, nous séparerons un second groupe allant depuis $m = m_0 + 1$ jusqu'à la plus grande valeur de m qui satisfasse à l'inégalité

$$\varphi(m) < x'\left(1 + \frac{1}{m_0}\right),$$

valeur qui sera désignée par m_1.

Le nombre m_0 augmentant indéfiniment avec x, le rapport $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers l'unité, car l'inégalité (4) montre que ce rapport ne saurait demeurer supérieur à aucun nombre λ plus grand que 1.

Enfin un troisième groupe comprendra ce qui reste de la série depuis le terme de rang $m_1 + 1$ jusqu'à l'infini.

Dans la combinaison $F(x') - \left(\frac{x'}{x}\right)^{m_0} F(x)$, les m_0 premiers termes donneront une somme négative. Quant aux termes suivants, le terme en x'^{m_0+h} donnera

$$a_{m_0+h} x'^{m_0+h}\left[1 - \left(\frac{x}{x'}\right)^h\right].$$

Remplaçons $\left(\frac{x}{x'}\right)^h = e^{-h\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)}$ par la quantité plus petite $1 - h\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)$; nous voyons qu'il nous reste le produit de $\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)$ par une somme de termes de la forme $h\, a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$.

Considérons d'abord les termes du deuxième groupe. $a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$ étant inférieur à 1, la somme correspondante sera moindre que $\frac{(m_1 - m_0)^2}{2}$. Or nous pouvons supposer que $F(x')$ est supérieur à

$$e^{\int \frac{\psi x'}{x'} dx'} = e^{\int^{m_0} \frac{m \varphi'(m)}{\varphi(m)} dm},$$

sans quoi le théorème serait démontré; et nous allons voir que dans ces conditions le rapport $\frac{(m_1-m_0)^2}{F(x')}$ tend vers zéro.

D'abord il nous suffit de nous occuper de $\frac{m_0^2}{F(x')}$, puisque $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers 1. Or la quantité $\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}$ est, à partir d'un certain moment, plus grande que $\frac{3}{m}$, puisque la fonction $L\varphi(m)+\frac{3}{m}$ est croissante. Par suite l'intégrale $e^{\int\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}dm}$ est plus grande que Am^3, A étant une constante différente de o. $F(x')$ étant supposé plus grand que $e^{\int^{m_0}\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}dm}$, le rapport $\frac{m_0^2}{F(x')}$ tend bien vers zéro.

Dans les termes du troisième groupe, $a_{m_0+h}x'^{m_0-h}$ est moindre que $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m_0}}\right)^{m_0+h}$. Ces termes donnent donc une somme inférieure à la somme $\sum_{h=0}^{\infty} h\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m_0}\right)^h}=(m_0+1)^2$, laquelle est, comme la précédente, de la forme $\varepsilon F(x')$; de sorte que l'on peut écrire

$$F(x')\left[1-\varepsilon L\left(\frac{x'}{x}\right)\right] > F(x)\left(\frac{x'}{x}\right)^{\psi(x')}.$$

Prenons les logarithmes, divisons par $L\left(\frac{x'}{x}\right)$ et faisons tendre x' vers x, nous aurons

$$(5)\qquad \frac{dL\,F(x)}{dLx} < \psi(x)+\varepsilon,$$

ce qui, en intégrant, donne bien [1]

$$(6)\qquad F(x) < Ax^{\varepsilon}e^{\int\frac{\psi(x)}{x}dx},$$

A étant fini.

---

[1] Plus exactement, nous voyons que, pour les valeurs de x plus grandes qu'une certaine limite, ou bien $F(x)$ est moindre que $e^{\int\frac{\psi(x)}{x}dx}$, ou bien on a l'inégalité (5). Ceci suffit manifestement pour que l'inégalité (6) soit constamment vérifiée.

Par exemple, pour la fonction

$$(7) \qquad \mathfrak{F}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2} x^m, \qquad |q| < 1$$

[qui est une moitié du développement d'une fonction $\theta(z)$ où l'on aurait posé $e^{2i\pi\frac{z}{\omega}} = x$], on a

$$\varphi(m) = r^{m}$$

(en désignant par r le module de $\frac{1}{q}$); d'où

$$\psi(x) = \frac{Lx}{Lr}.$$

En appliquant le théorème précédent, on voit que $\mathfrak{F}(x)$ augmente indéfiniment moins vite que $e^{\int \frac{Lx}{Lr}\frac{dx}{x}} = e^{\frac{L^2x}{2Lr}}$, ce qui est bien conforme aux résultats fournis par la théorie des fonctions elliptiques [1].

7. Envisageons en particulier le cas où l'on a

$$(8) \qquad |a_m| \leq \frac{1}{(m!)^{\alpha}},$$

α étant un nombre positif quelconque.

Les formules connues pour l'approximation de la fonction Γ nous montrent que cette expression est de la forme

$$\frac{ke^{(m+1)\alpha}}{(m+1)^{\alpha\left(m+\frac{3}{2}\right)}},$$

---

[1] Les formules connues correspondant à l'addition des périodes dans la fonction θ donnent

$$\mathfrak{F}(x) < Ae^{\frac{L^2x}{4Lr}}.$$

La limite donnée par le théorème précédent est donc un peu trop élevée, ce dont il sera rendu compte plus loin.

k étant fini, de sorte que nous pouvons prendre

$$\varphi(m) = \left(\frac{m}{\mathrm{H}}\right)^{\alpha},$$

H étant une constante.

$\psi(x)$ sera de la forme $\mathrm{H}x^{\frac{1}{\alpha}}$ et l'intégrale $\int \frac{\psi(x)+\varepsilon}{x}\,dx$ aura la même forme. Nous arrivons donc à l'énoncé suivant :

Si le coefficient de x^m est moindre que $\frac{1}{(m!)^{\alpha}}$, la fonction croît moins vite que $e^{\mathrm{H}x^{\frac{1}{\alpha}}}$, où H *est une certaine constante.*

8. Au reste, dans ce cas particulier, on arriverait à la même conclusion par la comparaison directe des deux séries

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)}$$

$\Bigg($laquelle, en vertu des propriétés de la fonction Γ, peut être substituée dans notre raisonnement à $\sum \frac{x^m}{(m!)^{\alpha}}\Bigg)$, et

$$e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} = \sum \frac{x^{\frac{n}{\alpha}}}{\Gamma(1+n)}.$$

En posant $\frac{n}{\alpha} = m'$ et comparant les parties des deux séries qui correspondent aux valeurs de m et de m' comprises entre les mêmes limites, on reconnaît aisément que, pour $\alpha > 1$, on a

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)} < e^{x^{\frac{1}{\alpha}}};$$

et, pour $\alpha < 1$,

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)} < \mathrm{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right) x^{\frac{1}{\alpha}} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}},$$

où, bien entendu, $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ désigne le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{\alpha}$.

Enfin, si α est un nombre entier, on peut mettre ce résultat en évidence par l'emploi de la formule

$$(9)\quad \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^{\alpha-1}} \int_0^{2\pi} \int^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\alpha-1})} d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{\alpha-1},$$

où $F_{\alpha-1}$ est une fonction finie.

On peut démontrer cette formule en partant de la remarque suivante :

Si

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

et

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + \ldots$$

désignent des séries entières, la valeur de la série

$$f_3(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_m b_m x^m + \ldots$$

sera donnée par l'intégrale définie

$$(10)\qquad f_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x^\mu e^{i\theta}) f_2(x^{1-\mu} e^{-i\theta})\, d\theta,$$

μ désignant un exposant quelconque compris entre 0 et 1.

D'après cela, supposons la formule (9) démontrée pour une certaine valeur de α. Nous pourrons, dans l'égalité (10), faire $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$ avec $\mu = \frac{1}{\alpha+1}$. Cette égalité prendra bien alors la forme

$$\sum \frac{x^m}{(m!)^{\alpha+1}} = \frac{1}{(2\pi)^\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha+1}} F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha)} d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_\alpha,$$

pourvu que l'on pose

$$F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha) = e^{i\theta_\alpha} + e^{-\frac{i\theta_\alpha}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\alpha-1}).$$

La formule (9) conduit d'ailleurs précisément à l'évaluation précédemment obtenue pour la série $\sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$, car l'intégrale qui figure au second membre est évidemment plus petite que $e^{M|x|^{\frac{1}{\alpha}}}$, où M est le module maximum de $F_{\alpha-1}$.

9. Inversement, on peut chercher la loi de décroissance des coefficients, connaissant la loi de croissance de la fonction pour les grandes valeurs de x.

Dans son Mémoire précédemment cité, M. Poincaré résout cette question pour le cas particulier des fonctions que nous venons de considérer aux deux numéros précédents, en introduisant une fonction entière auxiliaire [1],

$$(11) \qquad \Phi(x) = \int_0^\infty e^{-t^\alpha} F(tx)\,dt,$$

l'intégrale étant prise sur la partie positive de l'axe réel ou suivant un chemin équivalent.

On peut étendre cette méthode au cas le plus général où, par exemple (V étant une fonction quelconque positive et indéfiniment croissante avec la variable), la fonction F est supposée croître moins vite que $e^{V(r)}$. Il faudra de même considérer l'intégrale

$$(12) \qquad \Phi(x) = \int_0^\infty e^{-V(t)} F(tx)\,dt,$$

---

(1) Nous transformons, par un changement de variable, l'expression de M. Poincaré. Sous cette nouvelle forme, les fonctions (11) et (12) présentent une remarquable analogie avec les expressions que j'ai considérées dans un Mémoire précédent (*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, nos 35-37). En cet endroit, l'intégrale est prise entre les limites o et 1 : la fonction ainsi obtenue n'admet alors d'autres points singuliers que ceux de F, et il n'est besoin que d'hypothèses très simples sur la fonction désignée par V(t). Dans le cas actuel, l'intégrale, étant prise entre o et ∞, est en général infinie; mais, toutes les fois qu'elle est finie, elle représente une fonction entière, ainsi qu'on le verrait par une discussion analogue à celle que j'ai présentée à l'endroit cité.

dans laquelle θ est une fonction de t telle que le rapport $\frac{\theta}{t}$ soit infini avec t, par exemple $t\mathrm{L}t$ ou $t^{1+\varepsilon}$.

Cette intégrale est finie, quel que soit x, et représente une fonction entière. Il en résulte immédiatement que les coefficients a_m de $F(x)$ sont plus petits que les inverses des quantités successives

$$\int_0^\infty e^{-V(\theta)}\, t^m\, dt. \tag{13}$$

Pour voir la loi de décroissance de a_m, il suffira donc d'étudier la manière dont varie la quantité (13) lorsque m augmente indéfiniment.

Mais on peut arriver au même résultat plus directement par la simple considération des intégrales définies qui fournissent les coefficients lorsqu'on donne les valeurs de la fonction

$$a_m = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z^{m+1}}.$$

Si, en effet, on prend pour le contour C une circonférence de rayon R, on voit que a_m est moindre que

$$\frac{e^{V(R)}}{R^m}. \tag{14}$$

10. Dans cette expression, le rayon R est entièrement arbitraire. Faisons $R = U(m)$, en désignant par U la fonction inverse de V; nous voyons que $|\sqrt[m]{a_m}|$ est inférieur à $\frac{e}{U(m)}$.

Pour $V(R) = R^{\frac{1}{2}}$, ceci donne bien le résultat obtenu par M. Poincaré, et d'après lequel $|\sqrt[m]{a_m}| < \frac{e}{m^2}$.

On voit encore, par ce procédé, que, dans le développement de e^{e^x}, on a

$$|a_m| < \left(\frac{e}{Lm}\right)^m;$$

et, en général, la série qui donne le développement de

$$e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}}$$

(le nombre des exponentielles superposées étant μ) a ses coefficients plus petits que ceux de la série

$$\sum \frac{(ex)^m}{(\mathrm{LL}\ldots\mathrm{L}m)^m}$$

(le nombre des signes L étant $\mu - 1$).

11. Mais cette manière d'opérer donne pour a_m une limite trop élevée. Pour obtenir une limite plus approchée, posons

$$\mathrm{V(R)} = \int \frac{\psi(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}\, d\mathrm{R}$$

et cherchons le minimum de l'expression (14). Il vient, en prenant la dérivée,

$$\psi(\mathrm{R}) = m,$$

ou bien (φ étant la fonction inverse de ψ)

$$\mathrm{R} = \varphi(m)$$

et, pour cette valeur de R, l'expression (14) devient

$$\frac{e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm}}{\varphi(m)^m}. \tag{15}$$

Supposons que la fonction $\psi(x)$ croisse plus vite que $x^{\frac{1}{\alpha}}$. La fonction $\varphi(m)$ croît moins vite que m^α, de sorte que l'on a

$$\left|\sqrt[m]{\frac{1}{a_m}}\right| > e^{-\alpha}\varphi(m).$$

Il peut arriver que la fonction ψ augmente plus vite que n'importe quelle puissance de x. Dans ce cas, on peut considérer α comme infiniment petit et écrire

$$\sqrt[m]{\left|\frac{1}{a_m}\right|} > (1-\varepsilon)\varphi(m).$$

Ceci peut être considéré comme la réciproque du théorème démontré au n° 6. On peut donc dire que, dans ce cas, ce théorème donne la véritable relation cherchée.

Si la fonction ψ croît plus lentement que toute puissance de la variable, et par suite φ plus vite que n'importe laquelle de ces puissances, les transformations précédentes de l'expression (15) ne sont plus applicables.

Si $\varphi(m)$ est à croissance moins rapide que celle de e^{m^k}, on aura

$$\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)\,\mathrm{L}\varphi(m)} = \frac{d}{dm}[\mathrm{LL}\varphi(m)] < \frac{k}{m};$$

d'où résultera

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < k\,\mathrm{L}\varphi(m)$$

ou

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < \frac{k}{k+1}\frac{d}{dm}[m\,\mathrm{L}\varphi(m)],$$

et $|\sqrt[m]{a_m}|$ est moindre que $\dfrac{1}{\varphi(m)^{\frac{1}{k+1}}}$. C'est le cas de la fonction $\mathfrak{F}(x)$ étudiée au n° 6.

Enfin, si la fonction φ est, pour les grandes valeurs de m, supérieure à toute fonction de la forme e^{m^k}, on peut affirmer en tout cas que $|\sqrt[m]{a_m}|$ est inférieur à $\dfrac{1}{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)}$.

En effet l'expression (15) peut s'écrire

$$e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}dm - m\,\mathrm{L}\varphi(m)} = e^{-\int \mathrm{L}\varphi(m)\,dm}.$$

Or, f étant une fonction quelconque à dérivée croissante, on a

$$f(m) > \frac{m}{2} f'\left(\frac{m}{2}\right) + f\left(\frac{m}{2}\right),$$

car $f(m) - f\left(\frac{m}{2}\right)$ est de la forme $\frac{m}{2} f'\left(\frac{m}{2} + \frac{\theta m}{2}\right)$. En intégrant (¹), il en résulte

$$\int f(m)\,dm > m f\left(\frac{m}{2}\right).$$

En posant $f(m) = \mathrm{L}\varphi(m)$, on obtient bien

$$e^{-\int \mathrm{L}\varphi(m)\,dm} < \frac{1}{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)^m}.$$

12. Nous allons maintenant nous occuper d'une certaine classe de fonctions qui jouent un grand rôle dans l'étude des fonctions entières : je veux parler des fonctions de la forme $e^{G(x)}$, où G est lui-même une fonction entière.

Le module d'une pareille fonction dépendant de la partie réelle de $G(x)$, nous présenterons tout d'abord quelques remarques sur la partie réelle d'une fonction entière.

Soit

$$\text{(2)} \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

une fonction holomorphe dans un cercle C ayant pour centre l'origine et pour rayon R; P la partie réelle de cette fonction au point $x = Re^{i\theta}$ de ce cercle. Le coefficient a_m sera donné par la formule

$$\text{(16)} \qquad a_m = \frac{1}{2\pi R^m} \int_0^{2\pi} P\, e^{-mi\theta}\, d\theta.$$

Faisons croître R indéfiniment et supposons que P reste *algébri-*

(¹) Nous négligeons la constante d'intégration, qui donne dans le résultat final un facteur constant.

quement (ainsi il faut remarquer qu'il n'est rien supposé sur les valeurs négatives de P) inférieur à R^λ, où λ est un certain exposant positif, soit

$$P < R^\lambda. \tag{17}$$

Je dis que F est un polynôme de degré au plus égal à λ.

Partageons, en effet, la circonférence du cercle C en deux parties : l'une C_1, formée par l'ensemble des arcs où P est positif; l'autre C_2, comprenant tous les arcs où cette quantité est négative. Soient I_1 l'intégrale $\int P\,d\theta$ considérée le long de C_1; I_2 l'intégrale $\int -P\,d\theta$ prise le long de C_2.

Le rapport $\frac{I_1}{R^m}$ tendra vers zéro pour $m > \lambda$, d'après les hypothèses faites sur P; et il en sera de même pour $\frac{I_2}{R^m}$, car la différence $I_1 - I_2$ est une constante, à savoir la partie réelle de $2\pi a_0$.

Or la formule (16) montre que le module du coefficient a_m est inférieur à $\frac{I_1 + I_2}{R^m}$. Ce coefficient ne peut donc être que nul.

En particulier, pour $\lambda = 1$, on voit que, si la partie réelle d'une fonction croît moins vite que le module de la variable, la fonction se réduit à une simple constante.

13. Nous avons supposé que l'inégalité (17) avait lieu pour toutes les valeurs suffisamment grandes de la variable; mais nous remarquerons que cette hypothèse n'est point complètement nécessaire. Les raisonnements précédents sont valables dès que l'on peut trouver une suite infinie de circonférences C dont les rayons aillent en augmentant indéfiniment et sur lesquelles l'inégalité (17) soit vérifiée.

14. Revenons maintenant aux fonctions considérées au n° **7**. Il sera préférable ici d'introduire, au lieu du nombre α, son inverse, que nous désignerons par la lettre λ, de sorte que l'on aura, pour les grandes valeurs de x

$$|F(x)| < e^{H|x|^\lambda}. \tag{18}$$

Supposons qu'une pareille fonction soit de la forme $e^{G(x)}$: la partie réelle de $G(x)$ devra rester algébriquement plus petite que $H|x|^\lambda$, et par suite la fonction $G(x)$ ne peut être qu'un polynôme. En particulier, si λ est plus petit que 1, la fonction G doit se réduire à une constante.

Ainsi, *lorsqu'une fonction* $F(x)$ *est de la forme* $e^{G(x)}$, *les coefficients de son développement ne peuvent pas décroître plus vite que* $\frac{1}{(m!)^\alpha}$, *à moins que* $G(x)$ *ne soit un polynôme.*

Il en serait de même si $F(x)$ était de la forme $\varphi(x)e^{G(x)}$ (la lettre φ représentant un polynôme quelconque); car la multiplication ou la division par un polynôme n'altèrent pas le fait exprimé par l'inégalité (18).

15. Les résultats précédents présentent cette particularité de ne pas changer si l'on ajoute à la fonction $F(x)$ un polynôme quelconque; aussi peuvent-ils servir à démontrer, du moins pour les fonctions qui satisfont à la condition (8) (n° 7), le théorème connu de M. Picard [1] sur les fonctions entières.

Considérons d'abord une fonction entière F dont les coefficients vérifient la condition (8) avec $\alpha > 1$. Le nombre λ sera plus petit que 1 et il sera impossible que F soit de la forme $\varphi e^{G(x)}$, du moins si G ne se réduit pas à une constante. L'équation $F = 0$ admettra donc une infinité de racines, et il en sera évidemment de même pour l'équation $F(x) = P(x)$, où P est un polynôme quelconque.

C'est par exemple le cas de la fonction $\mathfrak{F}$ définie par l'égalité (7). (n° 6).

16. Supposons maintenant α quelconque, et soit E l'entier immédiatement supérieur à $\frac{1}{\alpha}$. L'identité

$$F(x) = P(x) + \varphi(x)e^{G(x)} \tag{19}$$

pourra avoir lieu, mais G devra être un polynôme de degré E au plus.

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IX; 1880.

Or, dans ces conditions, l'identité (19) ne peut avoir lieu de deux façons différentes, car c'est un fait bien connu que l'équation

$$(20) \qquad Px + \mathfrak{P}(x)e^{G(x)} + P_1(x) + \mathfrak{P}_1(x)e^{G_1(x)} + \ldots = 0,$$

où $P, P_1, \ldots, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots, G, G_1$ sont des polynômes, n'admet pas d'autre solution que ses solutions banales.

On peut même ajouter que si $F_1, F_2, F_3, \ldots$ sont des fonctions entières dont les coefficients vérifient toujours la condition (8) et qui n'ont chacune qu'un nombre fini de zéros, la somme $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$ aura nécessairement un nombre infini de racines, à moins que F_1, $F_2, \ldots$ ne soient identiques à des facteurs constants et à des polynômes près. Cela résulte de la même proposition relative à l'équation (20).

17. La fonction F étant donnée, on peut résoudre l'équation (19) dès que l'on connaît le degré de $P(x)$. Il suffira pour cela de différentier un nombre de fois supérieur à ce degré. Le second membre prendra la forme Qe^G (où Q sera un nouveau polynôme), et, par conséquent, devra admettre un nombre fini de racines. Si l'on a obtenu ces racines, on connaîtra les polynômes Q et G, et la résolution d'équations linéaires fera connaître $\mathfrak{P}$.

En faisant, par exemple, P constant, on pourra, par ce procédé, reconnaître si l'équation

$$F = a + \mathfrak{P}e^G$$

est possible, et de la résoudre s'il y a lieu. On n'aura qu'une seule dérivée à prendre, et il viendra

$$Q = \mathfrak{P}' + G'\mathfrak{P}.$$

En égalant, dans cette identité, les coefficients de chaque puissance de x, on aura une série d'équations linéaires auxquelles devront satisfaire les coefficients de $\mathfrak{P}$.

Dans un grand nombre de cas, on pourra reconnaître immédiatement que l'équation (19) est impossible.

Faisons, par exemple,

$$F(x) = \frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \Gamma(x)\sin\pi x.$$

D'après les propositions connues relatives à la fonction Γ, le polynôme G devrait être du premier degré, ce qui est contraire à ce fait que la fonction F croît comme $|x|\,\mathrm{L}|x|$. Donc les équations $\frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \mathfrak{P}(x)$, $\frac{\pi}{\Gamma(1-x)} + k\sin x = \mathfrak{P}(x)$, ... ont toujours une infinité de racines.

En général, pareil fait se produira toutes les fois que F augmentera plus vite que e^{kx^E} et moins vite que $e^{\frac{1}{k}x^{E+1}}$, quelque grand que soit k.

18. Les considérations précédentes démontrent le théorème de M. Picard pour toutes les fonctions satisfaisant à la condition (8). C'est, d'après le théorème de M. Poincaré, le cas de toutes les fonctions qui ont un genre fini.

On peut étendre une partie de ces conclusions à des fonctions de genre infini au moyen d'un raisonnement devenu classique dans cette théorie. On sait, en effet, que, si la fonction

$$F(x) = e^{G(x)},$$

qui n'a aucun zéro, était telle que l'équation $F(x) = 1$ n'admette non plus aucune solution, on en conclurait immédiatement que les mêmes propriétés appartiennent à la fonction

$$F_1(x) = \frac{1}{2i\pi}G(x).$$

Si, d'ailleurs, F croît moins vite que $e^{\psi(x)}$, on peut déduire de notre théorie que F_1 croîtra moins vite que $\psi(x)$.

Formons alors la suite des fonctions

$$f_1 = e^x, \qquad f_2 = e^{e^x}, \qquad f_3 = e^{e^{e^x}}, \qquad \ldots.$$

Si la fonction donnée F est dépassée par une fonction f_m de cette suite, il suffira d'appliquer m fois le raisonnement précédent pour ramener F à vérifier la condition (8).

Mais, même à l'aide de l'extension précédente, la démonstration ne s'applique pas à une fonction quelconque; car on peut former une fonction entière croissant plus vite que n'importe quelle fonction f_m. On pourra, par exemple, procéder de la façon suivante :

Ayant pris une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h, \ldots$ qui tendent vers zéro, on appellera m_1 le plus petit entier tel que la racine $m_1^{\text{ième}}$ du coefficient de x^m dans $f_1(x)$ soit plus petite que ε_1, puis m_2 le plus petit entier tel que la racine $m_2^{\text{ième}}$ du coefficient de x^{m_2} dans $f_2(x)$ soit plus petite que ε_2, et ainsi de suite.

En écrivant les termes de f_1 jusqu'au rang $m_2 - 1$, puis les termes de f_2 depuis le rang m_2 jusqu'au rang $m_3 - 1$, puis les termes de f_3 depuis le terme de rang m_3 jusqu'au terme de rang $m_4 - 1, \ldots,$ on obtiendra une fonction entière qui jouira manifestement des propriétés demandées.

DEUXIÈME PARTIE.

RECHERCHE DE L'ORDRE DE GRANDEUR DES RACINES ET DU GENRE.

19. Les résultats obtenus dans notre première Partie permettent de compléter les conclusions de M. Poincaré, dans le cas des fonctions de genre zéro.

Soit, en effet,

$$\mathrm{F}(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_p}\right)\cdots$$

une fonction de genre zéro, et $\varphi(p)$ une fonction positive et croissante telle que le module ρ_p de x_p soit supérieur à $\varphi(p)$. Nous supposerons de plus que $\varphi(p)$ soit supérieur à p^α (où α est un nombre plus grand que 1), et cela de telle manière que le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha-\varepsilon}}$ soit croissant, mais le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha+\varepsilon}}$ décroissant.

Le module de F ne peut dépasser la quantité

$$F_0(R) = \left[1 + \frac{R}{\varphi(1)}\right]\left[1 + \frac{R}{\varphi(2)}\right]\cdots\left[1 + \frac{R}{\varphi(p)}\right]\cdots, \tag{21}$$

où R est le module de x.

Pour évaluer F_0, prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation (21); nous trouvons

$$\frac{d}{dR} LF_0(R) = \frac{1}{\varphi(1) + R} + \frac{1}{\varphi(2) + R} + \ldots + \frac{1}{\varphi(p) + R} + \ldots. \tag{22}$$

Soit ψ la fonction inverse de φ et, dans le second membre, isolons les $p_0 = \psi(R)$ premiers termes. Leur somme sera moindre que $\frac{\psi(R)}{R}$. Quant à la somme des termes qui restent, elle est inférieure à

$$\frac{1}{\varphi(p_0)} + \frac{1}{\varphi(p_0 + 1)} + \ldots.$$

Cette dernière quantité s'évalue à l'aide des procédés employés dans la théorie élémentaire des séries. On la remplace tout d'abord par la somme

$$\frac{(t-1)p_0}{\varphi(p_0)} + \frac{(t^2 - t)p_0}{\varphi(tp_0)} + \frac{(t^3 - t^2)p_0}{\varphi(t^2 p_0)} + \ldots, \tag{23}$$

où t est un nombre quelconque plus grand que 1. D'ailleurs, les hypothèses relatives à la fonction φ donnent

$$\varphi(t^\mu p_0) > t_0^{\mu\alpha'} \varphi(p_0),$$

où $(\alpha' = \alpha - \varepsilon)$. La série (23) est donc moindre que

$$\frac{(t-1)p_0}{\varphi(p_0)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{t^{\mu(\alpha'-1)}} = \frac{p_0}{\varphi(p_0)} \frac{t^{\alpha'-1}(t-1)}{t^{\alpha'-1} - 1}.$$

Le second facteur $\frac{t^{\alpha'-1}(t-1)}{t^{\alpha'-1} - 1}$ a pour limite $\frac{1}{\alpha' - 1}$ lorsque t tend vers 1, de sorte que la série (23) peut être remplacée par

$$\frac{1+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{p_0}{\varphi(p_0)}=\frac{1+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{\psi(R)}{R}.$$

Il vient donc ([1])

$$\frac{d}{dR}\,\mathrm{L}F_0(R)<\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{\psi(R)}{R},$$

ou

$$F_0(R)<e^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-1}\int\frac{\psi(R)}{R}dR}. \tag{24}$$

20. Ainsi le module de F ne peut croître plus vite que le second membre de l'inégalité précédente.

Si maintenant nous appliquons les conclusions du n° **11**, en supposant, pour fixer les idées, que α soit fini, nous voyons que la racine $m^{\text{ième}}$ du coefficient a_m est moindre que $\dfrac{e^\alpha}{\varphi\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+\varepsilon}m\right)}$, ce qui peut encore s'écrire $\dfrac{\left(\frac{e\alpha}{\alpha-1}\right)^\alpha+\varepsilon}{\varphi(m)}$, puisque $\varphi(m)$ croît moins vite que $m^{\alpha+\varepsilon}$.

([1]) La limite ainsi obtenue est trop élevée. On peut, dans la plupart des cas, en obtenir une plus approchée en formant un second groupe avec les termes de la série (22) dont le rang est compris entre $\psi(R)$ et $2^{\frac{1}{\alpha}}\psi(R)$, lesquels sont tous plus petits que $\frac{1}{2R}$; puis un troisième groupe allant du rang $2^{\frac{1}{\alpha}}\psi(R)$ au rang $3^{\frac{1}{\alpha}}\psi(R)$, les termes étant alors plus petits que $\frac{1}{3R}$. Après séparation d'un certain nombre de ces groupes, on calcule le reste de la série comme il a été expliqué. On trouve ainsi pour la série (22) $\left[\text{en laissant de côté le facteur }\frac{\psi(R)}{R}\right]$ les limites $\dfrac{1+\frac{\alpha}{\alpha-1}2^\alpha}{2}+\varepsilon$, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{6}+\dfrac{\frac{\alpha}{\alpha-1}3^{\frac{1}{\alpha}}}{3}+\varepsilon$, ...

Pour $\alpha=2$, le coefficient de $\frac{\psi(R)}{R}$ serait (au terme ε près)

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}+2\frac{\sqrt{3}}{3}=1,88\ldots$$

au lieu de 2.

21. Nous allons maintenant nous occuper de la question inverse et chercher comment on peut obtenir la loi de distribution des racines quand on connaît la loi des coefficients.

Cette recherche repose sur les formules que j'ai données dans un précédent travail (¹), et qui permettent de calculer les zéros successifs d'une fonction à l'aide des coefficients de son développement. Je vais tout d'abord résumer succinctement la marche suivie pour arriver à ces formules, en renvoyant pour les détails au Mémoire dont je viens de parler.

On commence par introduire une définition, celle de la *limite supérieure* d'une suite telle que

$$(25) \qquad u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_m, \quad \ldots,$$

pour m infini (les u étant des nombres réels).

C'est la plus petite quantité qui ne soit pas dépassée, ou du moins soit infiniment peu dépassée par les termes de la suite (25) à indices infiniment grands; ou encore, cette limite supérieure l est le plus grand nombre jouissant de cette propriété que dans la suite (25) on puisse trouver une série indéfinie de termes tendant vers l.

Dans un grand nombre de cas, l est la seule quantité satisfaisant à cette dernière condition. Alors l est, pour la suite (25), une limite, au sens ordinaire du mot. Nous exprimerons souvent ce fait en disant que les termes de la suite (25) *tendent régulièrement* vers l.

La notion de limite supérieure fournit d'abord une expression du rayon de convergence d'une série entière quelconque

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots.$$

Il suffit, en effet, de former la suite

$$|a_1|, \quad |\sqrt[2]{a_2}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[m]{a_m}|, \quad \ldots.$$

(¹) *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, 1^re et 2^e Parties (ce Journal, 4^e série, t. VIII; 1892).

Soit l la limite supérieure (supposée finie) de cette suite. Le rayon cherché est donné par la formule $\rho = \frac{1}{l}$.

22. Proposons-nous maintenant d'exprimer que les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ sont des pôles au nombre de P (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité).

S'il en est ainsi, on pourra débarrasser la fonction de ces pôles en la multipliant par un polynôme de degré P

$$\mathfrak{P}_P = 1 + A^{(1)}x + \ldots + A^{(P)}x^P$$

et la nouvelle série ainsi obtenue

$$F_1 = \Sigma b_m x^m$$

sera convergente dans un cercle de rayon $\rho' > \rho$, de sorte qu'on pourra écrire

$$(26)\qquad b_{m+P} = a_{m+P} + A^{(1)}a_{m+P-1} + \ldots + A^{(P)}a_m = \left[\frac{\theta(1+\varepsilon)}{\rho'}\right]^m,$$

où θ est de module inférieur à 1 et ε un infiniment petit.

Réciproquement, s'il existe des nombres $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(P)}$ jouissant de la propriété précédente, la fonction donnée ne pourra posséder sur le cercle primitif d'autres points singuliers que des pôles, dont les affixes seront racines de l'équation

$$(27)\qquad 1 + A^{(1)}x + \ldots + A^{(P)}x^P = 0.$$

Elle admettra bien tous ces pôles s'il est impossible de trouver un polynôme de degré moindre que P et remplissant les mêmes conditions.

23. Considérons alors le déterminant symétrique d'ordre $p+1$

$$(28)\qquad D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & \ldots & a_{m+2p} \end{vmatrix},$$

p étant un entier quelconque. Nous désignerons par l_p la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,p}|}$ pour un infini (p restant fixe).

Tout d'abord, quels que soient les points singuliers de notre fonction sur son cercle de convergence, l_p ne peut dépasser $\left(\frac{1}{\rho}\right)^{p-1}$, d'après ce qui a été supposé sur l'ordre de grandeur de a_m.

Mais, si le polynôme $\mathfrak{P}_p$ existe, nous trouverons pour l_p une valeur nécessairement moindre que la limite précédente. Car on pourra, dans la dernière colonne du déterminant (28), remplacer les a par les b de même indice, lesquels sont inférieurs à $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho'}\right)^m$. Il viendra donc

$$l_p \leqq \frac{1}{\rho^p \rho'}.$$

24. Inversement, supposons que l'inégalité

$$l_p < \frac{1}{\rho^{p+1}} \tag{29}$$

soit vérifiée pour $p = P$, mais non pour aucune valeur moindre de p.

En particulier, la quantité $\sqrt[m]{|D_{m,P-1}|}$ a pour limite supérieure $\rho^{\frac{1}{P}}$.

On démontre tout d'abord qu'elle tend régulièrement vers cette limite; puis on détermine les coefficients $A_m^{(1)}, \ldots, A_m^{(P)}$ par les équations

$$\begin{aligned}
a_{m+P} &+ A_m^{(1)} a_{m+P-1} + \ldots + A_m^{(P)} a_m &= 0,\\
a_{m+P+1} &+ A_m^{(1)} a_{m+P} + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+1} &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m+2P-1} &+ A_m^{(1)} a_{m+2P-2} + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+P-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Si l'on fait augmenter m indéfiniment, on constate que $A_m^{1}, A_m^{2}, \ldots, A_m^{(P)}$ tendent respectivement vers des limites $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(P)}$, lesquelles vérifient les équations (26) en prenant pour ρ' la valeur fournie par l'équation $l_P = \frac{1}{\rho^P \rho'}$.

La fonction, considérée sur le cercle de rayon ρ, admet donc au plus P pôles, les racines de l'équation (27). Elle les admet d'ailleurs tous, sans quoi l'inégalité (29) serait vérifiée pour $p < P$.

Soient $x = x_1$, $x = x_2$, .. , $x = x_p$, ... les différents pôles de notre fonction, rangés par ordre de module croissant (les pôles de module égal étant rangés dans un ordre arbitraire); $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots$ leurs modules. Les P premiers de ces modules seront tous égaux à ρ, de sorte que l'on aura, pour toutes les valeurs de p inférieurs à P, l'équation

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_p} = l_{p-1}. \tag{30}$$

25. Considérons maintenant les valeurs de p supérieures à P. Pour une quelconque de ces valeurs, l_p sera au plus égal à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}}\rho'^{p-\mathrm{P}+1}}$, et cela quels que soient les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ', ainsi qu'on le voit en transformant à l'aide des équations (26) les $p - \mathrm{P} + 1$ dernières colonnes du déterminant (28).

Mais si ces points singuliers sont des pôles au nombre de P′, une nouvelle réduction se produira pour $p = \mathrm{P} + \mathrm{P}'$; car il existera un polynôme de degré $\mathrm{P} + \mathrm{P}'$,

$$\mathfrak{P}'_{\mathrm{P}+\mathrm{P}'} = 1 + \mathrm{B}^{(1)}x + \ldots + \mathrm{B}^{(\mathrm{P}+\mathrm{P}')}x^{\mathrm{P}+\mathrm{P}'},$$

tel que la série $\mathrm{F}_2 = \mathfrak{P}'\mathrm{F} = \Sigma c_m x^m$ ait un rayon de convergence ρ'' supérieur à ρ'. Comme dans le déterminant $\mathrm{D}_{m,\mathrm{P}+\mathrm{P}'}$ on peut remplacer les éléments de la dernière colonne par les c de même indice, on voit que $l_{\mathrm{P}+\mathrm{P}'}$ ne peut être supérieur à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}}\rho'^{\mathrm{P}'}\rho''}$.

Inversement, considérant la suite des valeurs de p à partir de $p = \mathrm{P}$, on en rencontrera d'abord un certain nombre (qui peuvent d'ailleurs se réduire à une seule, $p = \mathrm{P}$) pour lesquelles l_p est égal à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}}\rho'^{p-\mathrm{P}+1}}$.

Si après cette série de valeurs en survient une, $p = \mathrm{P} + \mathrm{P}'$, pour laquelle l_p soit égal à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}}\rho'^{\mathrm{P}'}\rho''}$, où ρ'' est supérieur à ρ', cette circonstance dénotera, comme on le démontre à l'aide de raisonnements analogues aux précédents, la présence de P′ pôles sur le cercle de rayon ρ'.

Les modules $\rho_{P+1}, \ldots, \rho_{P+P'}$ sont donc tous égaux à ρ', et, par suite, on aura pour les valeurs de p comprises entre P et P + P′ inclusivement

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_p} = \frac{1}{\rho^P\rho'^{p-P}},$$

c'est-à-dire l'équation (30), d'après ce que nous savons sur les nombres $l_P, \ldots, l_{P+P'}$.

Ayant ainsi étudié les valeurs de l_p jusqu'à $p = P + P'$, on considérera les valeurs suivantes, et ainsi de suite indéfiniment.

On constate tout d'abord par ce procédé que le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ ne va jamais en diminuant. La condition nécessaire et suffisante pour que notre fonction soit méromorphe dans tout le plan est que ce rapport augmente indéfiniment. S'il en est ainsi, les raisonnements précédents, appliqués aux valeurs de p pour lesquelles le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ présente une croissance, permettent de calculer les affixes des différents pôles. Mais nous n'avons besoin, pour ce qui va suivre, que des modules de ces pôles.

A ce point de vue nos conclusions peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

L'équation (30) *est générale.*

26. Ayant appris à calculer les pôles d'une fonction $F(x)$ donnée par un développement taylorien quelconque, nous sommes à même de résoudre le même problème pour les zéros d'une telle fonction, car ces zéros ne sont autres que les pôles de la fonction $\frac{1}{F(x)}$.

Le calcul des coefficients d'une fonction à l'aide des coefficients de son inverse n'offre aucune difficulté.

Soit, comme précédemment, la fonction

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots, \tag{2}$$

dans laquelle seulement a_0 est supposé différent de zéro. On multipliera cette série par la série

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m + \ldots,$$

et, en égalant à zéro les coefficients de la série produit, à partir du second, on déterminera $C_0, C_1, \ldots$, etc. Des valeurs ainsi trouvées on déduit aisément l'expression du déterminant $D_{m,p}$ formé, comme nous l'avons expliqué, à l'aide des coefficients de la série $f(x)$. On trouve ainsi pour ce déterminant la valeur

$$(-1)^{m(p-1)+\frac{p(p+1)}{2}} \frac{E_{m,p}}{a_0^{m+2p+1}},$$

où l'on a posé

$$(31) \qquad E_{m,p} = \begin{vmatrix} a_{p+1} & a_p & a_0 & 0 & . & \ldots & 0 \\ a_{p+2} & a_{p+1} & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & .. & .. & . & \ldots & . \\ a_{m+p-1} & \ldots & .. & .. & . & \ldots & a_0 \\ \ldots\ldots & \ldots & .. & .. & . & \ldots & . \\ a_{m+2p} & \ldots & .. & .. & . & \ldots & a_{p+1} \end{vmatrix}$$

et l'équation (30) devient, en y changeant p en $p+1$,

$$(32) \qquad \frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{p+1}} = l_p = \limsup_{m=\infty} \sqrt[m]{\left|\frac{E_{m,p}}{a_0^{m+2p+1}}\right|} = \frac{1}{|a_0|} \limsup_{m=\infty} \sqrt[m]{|E_{m,p}|},$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots$ désignant cette fois les modules des zéros de $F(x)$.

Telle est la formule dont nous avions besoin de rappeler la démonstration et qui va nous servir de point de départ.

27. Supposons que $F(x)$ soit une fonction entière et que le coefficient a_m soit moindre que $\frac{1}{\chi(m)} = \frac{1}{\varphi(m)^m}$, où $\varphi(m)$ est une fonction positive indéfiniment croissante de m. Nous admettrons en outre que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ est constamment croissant, hypothèse toujours légitime, d'après ce qui a été expliqué aux nos **3-5**.

Nous aurons un maximum du déterminant $E_{m,p}$, défini par la formule (31), en y considérant tous les termes comme positifs et remplaçant chaque coefficient a_m par la valeur correspondante de $\frac{1}{\chi(m)}$, autrement dit en imaginant que dans le déterminant

$$(33)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\chi(p+1)} & \frac{1}{\chi(p)} & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\chi(p+2)} & \frac{1}{\chi(p+1)} & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{\chi(m+p-1)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} \\ \frac{1}{\chi(m+p)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\chi(m+2p)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(p+1)} \end{vmatrix}$$

on convienne de prendre tous les termes avec le signe $+$.

Dans le déterminant (33), l'élément $a_{i,k}$ correspondant à la colonne de rang i et à la ligne de rang k est égal à zéro si $i-k > p+1$ et à $\frac{1}{\chi(p+1+k-i)}$ dans le cas contraire. Le nombre des termes est

$$(p+2)^{m-1}(p+1)!$$

Je dis que le plus grand terme est celui qui correspond à la diagonale principale.

Effectivement tout autre terme que celui-là présente au moins une *inversion*, suivant la locution usitée dans la théorie élémentaire des déterminants. Il contient donc en facteurs deux éléments $a_{i,k'} . a_{i',k}$ tels que $i < i'$, $k < k'$. Si à ce produit on substitue le produit $a_{i,k} . a_{i',k'}$, on obtient un autre terme du déterminant, et ce nouveau terme est plus grand que le précédent. Ceci résulte de ce que le rapport $\frac{a_{i+1,k}}{a_{i,k}} = \frac{\chi(p+1+k-i)}{\chi(p+1+k-i-1)}$ est croissant avec k, d'après les hypothèses faites sur la fonction χ. Il en est de même des rapports

$\frac{a_{i+2,k}}{a_{i+1,k}}, \ldots, \frac{a_{i',k}}{a_{i'-1,k}}$ et par suite de leur produit $\frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$. On a donc bien

$$\frac{a_{i',k'}}{a_{i,k'}} > \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}.$$

Le plus grand terme est donc celui qui ne renferme pas d'inversion, c'est-à-dire le terme principal.

Il en résulte

$$|E_{m,p}| \leqq (p+1)!\,(p+2)^{m-1}\left[\frac{1}{\chi(p+1)}\right]^{m+p-1}$$

et

$$l_p \leqq \frac{p+2}{|a_0|\cdot\chi(p+1)}.$$

Mais le produit $\rho_1\rho_2\ldots\rho_{p+1}$ est égal à $\frac{1}{l_p}$. Le plus grand facteur de ce produit, à savoir le dernier, est donc au moins égal à $\sqrt[p+1]{\frac{1}{l_p}}$, c'est-à-dire, à un facteur près qui tend vers l'unité pour p infini, au moins égal à $\varphi(p+1)$.

Le raisonnement précédent ne s'appliquerait plus si la fonction s'annulait à l'origine. Mais on ramènerait ce cas au cas général en divisant par une puissance convenable de x et en raisonnant sur la fonction ainsi débarrassée de ses racines nulles.

Nous avons également supposé que l'inégalité

$$(34) \qquad |a_m| < \frac{1}{\chi(m)}$$

était vérifiée, quel que soit m. Mais il suffit manifestement qu'elle ait lieu pour les grandes valeurs de l'indice; car on ramènerait les premiers coefficients à vérifier la même inégalité en divisant toute la série par un certain nombre constant, ce qui ne changerait pas les racines.

La condition que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit croissant peut également n'être vérifiée que pour les grandes valeurs de m; car on pourra remplacer, s'il y a lieu, les valeurs de $\chi(m)$ jusqu'à un certain rang par d'autres qui satisfassent à cette condition.

Nous arrivons donc à cette conclusion :

Théorème. — *Si le coefficient* a_m *décroît plus vite que* $\frac{1}{\varphi(m)^m}$, *la* $p^{\text{ième}}$ *racine a un module supérieur à* $(1-\varepsilon)\varphi(p)$, où ε est infiniment petit pour p infini.

En un mot, *les modules des racines vont en croissant plus vite que* $\frac{1}{\sqrt[m]{|a_m|}}$.

Par exemple, les racines de la fonction

$$\mathfrak{F}(x) = \Sigma q^{n^2} x^n,$$

considérée au n° **6**, croissent au moins aussi vite que q^n. Il en est de même pour les racines de l'équation $\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{R}(x)$, où $\mathfrak{R}$ est une fonction rationnelle quelconque.

28. Venons maintenant à notre objet principal et proposons-nous d'étudier le genre d'une fonction donnée par son développement en série entière.

Pour cela, nous appliquerons le résultat que nous venons d'obtenir aux fonctions, étudiées au n° **7**, pour lesquelles on a

$$\chi(m) = (m!)^\alpha,$$

et, par suite,

$$\varphi(m) = m^\alpha.$$

Comme précédemment, nous introduirons, au lieu du nombre α, son inverse, que nous désignerons par la lettre λ.

Nous savons donc que le module ρ_p de la $p^{\text{ième}}$ racine croît, lorsque p augmente indéfiniment, plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Si λ n'est pas entier, et que $E+1$ soit l'entier immédiatement supérieur, la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ est convergente. Nous en conclurons plus loin que la fonction est du genre E.

Lorsque λ est un entier, il y a doute. C'est à cette hypothèse que se rattache l'exemple dont parle M. Poincaré dans son Mémoire (¹) et relatif à la fonction

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2 L^2 n}\right).$$

Il faudrait, dans les cas de cette espèce, étudier directement la convergence de la série $\sum_p \frac{1}{\varphi(p)^{\frac{1}{\lambda}}}$.

Quoi qu'il en soit, nous supposons que, le coefficient a_m étant moindre que $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, nous désignerons par $E+1$ l'entier immédiatement supérieur (et non égal) à λ, de sorte que la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ soit certainement convergente. Nous pourrons former, d'après la méthode de M. Weierstrass, la fonction

$$\Phi(x)=\prod\left(1-\frac{x}{x_p}\right)e^{Q_E\left(\frac{x}{x_p}\right)}, \tag{35}$$

(¹) M. Poincaré démontre, non seulement que a_m est plus petit que $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, mais que le produit $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ tend vers zéro. On peut même déduire de sa démonstration que la racine $m^{\text{ième}}$ de ce produit tend vers zéro; car $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ se présente comme $m^{\text{ième}}$ coefficient d'une série entière.

Inversement, si la série $m^{\text{ième}}$ de $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ tend vers zéro, nous savons que ρ_p est égal au produit de $p^{\frac{1}{\lambda}}$ par une quantité qui augmente indéfiniment. La série $\sum \frac{1}{\rho_p^{\lambda}}$ est donc telle que ses termes soient avec ceux de la série harmonique dans un rapport infiniment petit pour p infini. Mais une telle série n'est pas nécessairement convergente, et le contraire se produit précisément dans l'exemple donné par M. Poincaré.

où $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ sont les racines successives et $Q_E(z)$ est le polynôme

$$\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^E}{E},$$

obtenu en prenant dans le développement de $-L(1-z)$ les E premiers termes.

La fonction donnée $F(x)$ sera égale au produit de $\Phi(x)$ par un facteur de la forme $e^{G(x)}$. Puisque nous avons déjà démontré que les polynômes de la formule (1) sont de degré E, tout se réduit à établir que $G(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à E.

29. Or je vais faire voir qu'*on peut décrire, avec l'origine comme centre, des cercles aussi grands qu'on le veut sur lesquels la fonction $\Phi(x)$ reste constamment supérieure à $e^{-|x|^{\lambda+\epsilon}}$.*

Les rayons de ces cercles seront déterminés ainsi qu'il suit :

Les modules ρ_p, d'après nos hypothèses, croissent plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Admettons en outre que la quantité $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, ce qui peut évidemment se faire en donnant, s'il y a lieu, un petit accroissement à λ.

Puisque $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, il existera une infinité d'entiers p pour chacun desquels cette quantité prendra une valeur plus petite que toutes les valeurs suivantes. Soit p_0 un tel entier, de sorte qu'on ait pour $h > 0$

$$\rho_{p_0+h}^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda > h. \tag{36}$$

Nous déterminerons R par la relation

$$R^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda = \tfrac{1}{2}, \tag{37}$$

de sorte que l'inégalité (36) pourra s'écrire

$$\rho_{p_0+h} > (h - \tfrac{1}{2} + R^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{38}$$

Pour chaque valeur de l'entier p_0, nous aurons ainsi une valeur de R; nous obtenons donc bien une suite de cercles dont les rayons vont en augmentant indéfiniment. Je dis que ces cercles satisfont à la condition indiquée.

30. Pour plus de clarté, je considérerai d'abord le cas où λ est plus petit que 1 (l'égalité étant exclue), de façon qu'on a $E = 0$. Les facteurs exponentiels disparaissant, la formule (35) se réduit à

$$\Phi(x) = \prod \left(1 - \frac{x}{x_p}\right), \tag{35'}$$

et, lorsque le point x décrira le cercle de rayon R, le module de $\Phi(x)$ restera supérieur à la quantité

$$\prod_{p=1}^{p_0} \left(\frac{R}{\rho_p} - 1\right) \prod_{p=p_0+1}^{\infty} \left(1 - \frac{R}{\rho_p}\right). \tag{39}$$

Nous évaluerons cette expression en partageant les facteurs qui la composent en trois groupes. Le premier Π_1 comprendra tout ce qui figure sous le premier signe Π,

$$\Pi_1 = \prod_{p=1}^{p_0} \left(\frac{R}{\rho_p} - 1\right). \tag{40}$$

Le nombre p_0 de ces facteurs est, nous le savons, moindre que $R^\lambda - \frac{1}{2}$. Le plus petit est le dernier, égal à

$$\frac{R}{(R^\lambda - \frac{1}{2})^{\frac{1}{\lambda}}} - 1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} - 1,$$

par conséquent supérieur à $\frac{1}{2R^\lambda}$, puisque λ est plus petit que 1.

Si nous envisageons les autres facteurs du produit (39), la formule

(38) nous montre que l'on a

$$(41) \qquad 1 - \frac{R}{\rho_{p_0+h}} > 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Nous composerons le produit Π_2 avec tous les facteurs pour lesquels $h - \frac{1}{2}$ est plus petit que R^λ. Le nombre de ces facteurs est moindre que $R^\lambda + \frac{1}{2}$. Le plus petit est le premier, au moins égal à $1 - \frac{R}{(R^\lambda + \frac{1}{2})^{\frac{1}{\lambda}}}$, par conséquent supérieur à $\frac{k}{2R^\lambda}$ (k restant fini pour R infini).

Les facteurs restants, qui forment le produit Π_3, peuvent se mettre sous la forme $1 - u$, où $u = \frac{1}{\left(1 + \frac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ est plus petit que $\frac{1}{2}$.

Or, sous cette condition, on voit aisément que $1 - u$ est supérieur à e^{-2u}. Chacun des facteurs du produit Π_3 est donc plus grand que la valeur correspondante de $e^{-\frac{2}{\left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}}$, ou, plus simplement, de $e^{-\frac{2R}{h^{\frac{1}{\lambda}}}}$.

D'après ces remarques, on voit que le produit Π_1 est supérieur à $\left(\frac{1}{2R^\lambda}\right)^{R^\lambda}$, ou (comme $2R^\lambda$ croît moins vite que e^{R^ε}, si petit que soit ε) supérieur à $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Une évaluation semblable s'applique au produit Π_2.

Quant au produit Π_3, il est plus grand que $e^{-R\sigma}$, où σ est le reste de la série $\sum \frac{1}{h^{\frac{1}{\lambda}}}$ arrêtée au terme qui a pour rang l'entier h_0 immédiatement supérieur à $R^\lambda + \frac{1}{2}$. Or le reste d'une pareille série est de l'ordre de $h_0^{1-\frac{1}{\lambda}}$ ou de $R^{\lambda-1}$, de sorte que Π_3 est aussi moindre que $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Nous trouvons donc bien, ainsi que nous l'avons annoncé,

$$\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 > e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}.$$

31. Pour généraliser cette proposition au cas d'un genre quelconque, nous remarquerons que, pour $u < 1$, la quantité $(1 - u)e^{Q_E(u)}$ est supérieure à $1 - u^{E+1}$. C'est ce qui résulte des deux développements

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &L(1-u) + Q_E(u) \\ &\quad = -\frac{u^{E+1}}{E+1} - \frac{u^{E+2}}{E+2} - \ldots - \frac{u^{2(E+1)}}{2(E+1)} - \ldots - \frac{u^{3(E+1)}}{3(E+1)} - \ldots; \end{aligned}\right.$$

$$(43)\qquad L(1 - u^{E+1}) = -u^{E+1} - \frac{u^{2(E+1)}}{2} - \frac{u^{3(E+1)}}{3} - \ldots.$$

Les termes de la série (42) sont constamment décroissants en valeur absolue. Le premier terme de la série (43) sera donc (en valeur absolue) supérieur à l'ensemble des $E + 1$ premiers termes de la série (42); le deuxième terme de (43) à la somme des $E + 1$ suivants, etc.

D'après cela, au lieu des facteurs $1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ qui composaient tout à l'heure les produit Π_2 et Π_3, nous aurons à considérer des facteurs de la forme $1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{E+1}{\lambda}}}$.

Pour les valeurs de h inférieures à $R^\lambda + \frac{1}{2}$, nous remplacerons $\dfrac{E+1}{\lambda}$ par l'unité, et nous trouverons pour le produit Π_2 de ces facteurs la même évaluation que précédemment.

Quant aux facteurs suivants, nous constaterons comme plus haut que leur produit est supérieur à $e^{-R^{E+1}\sigma'}$, où σ' est le reste de la série $\dfrac{1}{h^{\frac{E+1}{\lambda}}}$, arrêtée au terme de rang h_0.

Ce reste étant comparable à $\dfrac{1}{h_0^{\frac{E+1}{\lambda} - 1}}$, le produit Π_3 est encore supérieur à $e^{-R^{\lambda+1}}$.

Au produit Π_1 correspondra un produit de facteurs polynômes et de facteurs exponentiels. Les premiers sont en nombre au plus égal à $R^\lambda - \frac{1}{2}$. Le plus petit est supérieur à $\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} - 1$, quantité de la forme $\frac{k}{R^\lambda}$, où k est fini. Leur produit satisfait donc encore aux conclusions précédentes.

Les facteurs exponentiels sont respectivement plus grands que les quantités $e^{-\left(\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\dots+\frac{u^E}{E}\right)}$, où $u = \frac{R}{\rho_p}$ est plus grand que 1. Nous diminuerons encore une telle quantité en supprimant les dénominateurs du polynôme Q_E. Le plus grand terme de ce polynôme devient alors le dernier et nous pourrons remplacer tous les autres par celui-là. Nous trouvons donc un produit plus grand que l'expression

$$e^{-ER^E \sum_{p=1}^{p_0} \frac{1}{\rho_p^E}}. \tag{44}$$

ρ_p étant de l'ordre de $p^{\frac{1}{\lambda}}$, la série $\frac{1}{\rho_p^E}$ est divergente; mais sa somme, lorsqu'on la limite au terme de rang p_0, n'augmente pas plus vite que $p^{1-\frac{E}{\lambda}}$.

En prenant $p_0 = R^\lambda$ et substituant dans l'expression (44), on arrive pour cette dernière au même résultat que pour les précédentes.

32. Notre proposition auxiliaire est donc démontrée. Sur chacun des cercles de rayon R, l'inégalité

$$|\Phi(x)| > e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$$

est vérifiée.

Comme on a, d'autre part, ainsi qu'il a été vu au n° **7**,

$$|F(x)| < e^{HR^\lambda},$$

il vient

$$\left|\frac{F}{\Phi}\right| = |e^{G(x)}| < e^{R^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer à la fonction $e^{G(x)}$ les considérations développées aux n^{os} **12-13**, et nous en concluons que $G(x)$ est un polynôme de degré E au plus, de sorte que notre fonction F est bien du genre E.

33. Ainsi, nous avons établi que, *lorsque le coefficient a_m est de l'ordre de $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, où λ n'est pas entier, la fonction $\Sigma a_m x^m$ est du genre* E, *en désignant par* $E+1$ *l'entier immédiatement supérieur à* λ. La réciproque du théorème de M. Poincaré est donc bien établie pour λ non entier.

Si λ est un entier $E+1$, il y a doute. Notre fonction peut être du genre E ou du genre $E+1$.

A cause de ce cas douteux, les recherches précédentes ne permettent pas encore de résoudre complètement la question posée par M. Poincaré dans son Mémoire, et de décider si le genre se conserve dans la différentiation ou dans une combinaison linéaire. Nous pouvons seulement affirmer que la dérivée d'une fonction de genre E ou la somme de deux pareilles fonctions est *en général* de genre E et *au plus* de genre $E+1$.

Le cas où les résultats précédents affectent la forme la plus simple est celui où, λ étant plus petit que 1, le genre est égal à zéro.

C'est ce qui arrivera, par exemple, pour $\frac{\sin x}{x}$ si l'on considère cette quantité comme fonction de x^2. Nous complétons ainsi, comme on le voit, la démonstration de la formule

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots.$$

On sait en effet que, dans les cours de Calcul intégral ([1]), on n'arrive pas à déduire immédiatement cette formule du théorème de M. Weierstrass. Une démonstration spéciale est nécessaire pour établir que le facteur exponentiel disparaît.

([1]) *Voir*, par exemple, PICARD, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 151.

Ici, cette circonstance apparaît tout d'abord, en supposant seulement connu le développement taylorien de $\sin x$, ou, plus simplement encore, en partant de sa relation avec la fonction exponentielle.

La fonction $\mathfrak{f}(x)$ du n° 6 est également du genre zéro, ainsi que ses combinaisons linéaires avec d'autres fonctions analogues ou des polynômes, etc.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION A LA FONCTION DE RIEMANN.

34. Dans son Mémoire intitulé : *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (¹), Riemann utilise les propriétés de la fonction

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

dont l'étude est elle-même ramenée à celle d'une fonction entière $\xi(x)$ donnée par la formule

$$\xi(x) = \frac{1}{2} - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^{\infty} \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{x}{2} \log t\right) dt, \tag{45}$$

où

$$\Psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}. \tag{46}$$

L'analyse de Riemann repose sur ce fait que $\xi(x)$, considéré comme fonction de x^2, est de genre zéro, fait qui est énoncé dans son Mémoire, mais sans démonstration suffisante.

Les recherches précédentes vont nous permettre de déterminer en toute rigueur le genre de $\xi(x)$.

(¹) Riemann, *Œuvres complètes* (Ed. Weber et Dedekind), p. 136 et suiv.

35. Nous aurons tout d'abord à développer ξ en série. L'intégrale qui figure au second membre de la formule (45) est de la forme $\Sigma(-1)^m C_{2m} x^{2m}$, où l'on a

$$C_m = \frac{1}{2^m m!}\int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} (\log t)^m\, dt. \tag{47}$$

On aura donc, en considérant ξ comme fonction de x^2,

$$\xi(x) = \sum_0^\infty a_m x^{2m}, \tag{48}$$

où les coefficients a sont donnés, à l'exception du premier, par la formule

$$a_m = (-1)^m \left(\frac{C_{2m}}{4} - C_{2m-2}\right). \tag{49}$$

36. Remarquons tout d'abord que la série $\Psi(t)$ peut être remplacée, à un facteur fini (¹) près, par son premier terme $e^{-\pi t}$. On peut également faire abstraction du facteur $t^{-\frac{3}{4}}$ qui est plus petit que 1.

D'ailleurs, si ε est un nombre positif, mais aussi petit qu'on le voudra, l'inégalité

$$(\log t)^m < e^{\varepsilon t}$$

ou

$$\log t < e^{\frac{\varepsilon t}{m}} \tag{50}$$

est vérifiée à partir de la valeur $t = m^{1+\varepsilon}$, du moins pour les grandes valeurs de m; car on a bien, pour m suffisamment grand,

$$(1+\varepsilon)\log m < e^{\varepsilon m^{\varepsilon}}$$

(¹) Ce facteur est même très voisin de 1. Il est inférieur à

$$1 + \frac{e^{-3\pi}}{1 - e^{-5\pi}} < 1 + \frac{1}{10000}.$$

et de plus, en prenant les dérivées des deux membres de l'inégalité (50), on trouve

$$\frac{1}{t} < \frac{\varepsilon}{m} e^{\frac{\varepsilon t}{m}},$$

inégalité dont le premier membre est décroissant tandis que le second est croissant et qui est vérifiée pour $t = m^{1+\varepsilon}$, si m est suffisamment grand.

Si donc, dans la formule (47), nous décomposons l'intégrale qui multiplie $\frac{1}{2^m m!}$ en deux, l'une prise entre les limites 1 et $m^{1+\varepsilon}$, l'autre entre $m^{1+\varepsilon}$ et $+\infty$, la seconde sera moindre que $\frac{e^{-(\pi-\varepsilon)m^{1+\varepsilon}}}{\pi-\varepsilon}$, c'est-à-dire infiniment petite pour m infini.

La première sera manifestement inférieure à

$$C_0(1+\varepsilon)^m(\log m)^m,$$

où C_0 est l'intégrale $\int_1^\infty e^{-\pi t} t^{-\frac{3}{4}}\,dt$.

C_m sera donc au plus de l'ordre de $\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^m \frac{(\log m)^m}{m!}$, ce qui donne

$$|a_m| < \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{2m} \frac{(\log 2m)^{2m}}{(2m)!}.$$

Il faut donc prendre (¹)

$$\varphi(m) = \left(\frac{2}{1+\varepsilon}\,\frac{2m}{e\log m}\right)^2.$$

D'après ce qui précède, cette formule exprime également la loi de croissance des racines de l'équation $\xi(x) = 0$, considérée comme équation en x^2.

Si l'on considère x comme l'inconnue de l'équation, il faut prendre

---

(¹) La fonction $\varphi(m)$ ainsi définie satisfait manifestement aux conditions indiquées au n° 27.

la racine carrée de l'expression précédente et l'on trouve

$$\rho_p > \frac{kp}{\log p}, \tag{51}$$

en posant

$$k = \frac{4-\varepsilon}{e}. \tag{52}$$

37. Si nous voulions avoir une limite supérieure des modules des racines successives, il faudrait commencer par trouver une limite inférieure du module de a_m. Or on aura une limite inférieure de C_m en prenant l'intégrale entre les limites $m^{1-\varepsilon}$ et $m^{1-\varepsilon'}$ (où ε et $\varepsilon' < \varepsilon$ sont deux nombres positifs très petits. On trouve ainsi

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m e^{-\pi m^{1-\varepsilon'}} m^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon')}}{2^m m!} (m^{1-\varepsilon'} - m^{1-\varepsilon}),$$

ce qui peut s'écrire

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m}{2^m m!},$$

en réunissant tous les facteurs de la forme $(1-\varepsilon)^m$.

D'ailleurs le rapport $\frac{C_m}{C_{m-2}}$ tend vers zéro; car dans l'évaluation de ce rapport on peut, d'après ce que nous avons vu, considérer l'intégrale prise seulement jusqu'à la limite $t = m^{1+\varepsilon}$, et il vient alors

$$C_m < C_{m-2} \frac{(1+\varepsilon)^2 \log^2 m}{4m(m-1)}.$$

Il en résulte que $|a_m|$ est, à un facteur constant près, supérieur à C_{2m-2} ou à $\frac{(1-\varepsilon)^{2m} (\log m)^{2m}}{2^{2m} (2m)!}$.

Nous pourrons alors appliquer les raisonnements des nos **19-20** en prenant $\varphi(p) = \left(\frac{k'p}{\log p}\right)^2$, où k' est une constante indéterminée. On a ici $\alpha = 2 - \varepsilon$, et l'on trouve

$$|a_m| < \left[\frac{(2e+\varepsilon)\log m}{k' m}\right]^{2m}.$$

En appliquant la réduction indiquée dans la note 1 (p. 21), on obtient une limite un peu moins élevée

$$|a_m| < \left[\frac{(1,88+\varepsilon)\, e \log m}{k' m}\right]^{2m}.$$

Si l'on compare cette valeur à celle qui vient d'être trouvée pour a_m, il vient

$$k' = 7,56\ldots$$

Telle est la quantité que $\frac{\rho_p \log p}{p}$ ne saurait dépasser constamment, lorsque p grandit indéfiniment.

Les conclusions auxquelles nous arrivons sont donc les suivantes :

Le rapport $\frac{1}{\rho_p}\frac{p}{\log p}$ reste fini et sa limite supérieure, pour p infini, est comprise entre $\frac{1}{7,56}$ et $\frac{e}{4}$.

Riemann donne, entre un module ρ et le nombre p des racines de module plus petit que ρ, la relation approchée

$$p = \frac{\rho}{2\pi}\left(\log\frac{\rho}{2\pi} - 1\right). \tag{53}$$

Pour comparer ce résultat à ceux que nous venons d'obtenir, il faut résoudre cette équation par rapport à ρ, ce qui se fait aisément par la méthode des approximations successives. On trouve ainsi comme valeur approchée

$$\rho = \frac{2\pi p}{\log p},$$

de sorte que le rapport $\frac{1}{\rho}\frac{p}{\log p}$ devrait tendre vers $\frac{1}{2\pi}$. Cette valeur est comprise entre les deux limites précédemment indiquées, de sorte que nous ne sommes pas à même de décider si le coefficient $\frac{1}{2\pi}$ de la formule (53) est exact ou non.

38. Mais, ainsi que nous l'avons dit plus haut, ce point n'est pas celui sur lequel repose le raisonnement de Riemann. C'est la détermination du genre de $\xi(x)$ qui constitue la question essentielle et les recherches qui précèdent en donnent immédiatement la solution.

Nous avons, en effet, constaté que, en considérant toujours $\xi(x)$ comme fonction de x^2, son développement satisfait à la condition (8) avec $\alpha = 2 - \varepsilon$, et, par conséquent, $\lambda = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Dès lors, les conclusions du n° **33** nous permettent d'affirmer la proposition suivante :

La fonction $\xi(x)$ (considérée comme fonction de x^2) est de genre zéro.

Elle s'exprime par le produit de facteurs primaires et d'une simple constante, sans aucun facteur exponentiel.

C'est le résultat que nous nous proposions d'établir.